Dopełnienie podprzestrzeni w przestrzeni biegunowej

Krzysztof Petelczyc

(współautor Mariusz Żynel)

kryzpet@math.uwb.edu.pl

Uniwersytet w Białymstoku
Instytut Matematyki

XII PSG; Lublin, 17-19 czerwca 2018

Zrekonstruować horyzont

semiafinicznej przestrzeni biegunowej

K. Petelczyc, M. Żynel
The complement of a subspace in a classical polar space,
sent to J. Combin. Theory Ser. A

Motywacje i referencje

A. M. Cohen, and E. E. Shult,
Affine polar spaces,
Geom. Dedicata **35** (1990), 43–76.

M. Marchi, S. Pianta,
Partial parallelism spaces and slit spaces,
North-Holland Math. Stud. **83** (1978), 591–600.

A. Kreuzer,
Semiaffine spaces,
J. Combin. Theory Ser. A **6** (1993), 63—78.

K. Petelczyc, M. Żynel,
The complement of a point subset in a projective space and a Grassmann space,
J. Appl. Logic **13** (2015), no. 3, 169-187.

A. M. Cohen, and E. E. Shult,
Affine polar spaces,
Geom. Dedicata **35** (1990), 43–76.

M. Marchi, S. Pianta,
Partial parallelism spaces and slit spaces,
North-Holland Math. Stud. **83** (1978), 591–600.

A. Kreuzer,
Semiaffine spaces,
J. Combin. Theory Ser. A **6** (1993), 63—78.

K. Petelczyc, M. Żynel,
The complement of a point subset in a projective space and a Grassmann space,
J. Appl. Logic **13** (2015), no. 3, 169-187.

Motywacje i referencje

A. M. Cohen, and E. E. Shult,
Affine polar spaces,
Geom. Dedicata **35** (1990), 43–76.

M. Marchi, S. Pianta,
Partial parallelism spaces and slit spaces,
North-Holland Math. Stud. **83** (1978), 591–600.

A. Kreuzer,
Semiaffine spaces,
J. Combin. Theory Ser. A **6** (1993), 63—78.

K. Petelczyc, M. Żynel,
The complement of a point subset in a projective space and a Grassmann space,
J. Appl. Logic **13** (2015), no. 3, 169-187.

Motywacje i referencje

A. M. Cohen, and E. E. Shult,
Affine polar spaces,
Geom. Dedicata **35** (1990), 43–76.

M. Marchi, S. Pianta,
Partial parallelism spaces and slit spaces,
North-Holland Math. Stud. **83** (1978), 591–600.

A. Kreuzer,
Semiaffine spaces,
J. Combin. Theory Ser. A **6** (1993), 63—78.

K. Petelczyc, M. Żynel,
The complement of a point subset in a projective space and a Grassmann space,
J. Appl. Logic **13** (2015), no. 3, 169-187.

Przestrzeń punkty-proste

- $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$, gdzie:
  - S – punkty
  - $\mathcal{L}$ – proste, $\mathcal{L} \subset 2^S$
- $\mathfrak{M}$ jest częściową przestrzenią prostych jeśli dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny i na każdej prostej są co najmniej dwa punkty
- $\mathfrak{M}$ jest niezdegenerowana jeśli nie ma w niej punktu, który jest wpółliniowy ze wszystkimi innymi punktami

Przestrzeń punkty-proste

- $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$, gdzie:
  - S – punkty
  - $\mathcal{L}$ – proste, $\mathcal{L} \subset 2^S$
- $\mathfrak{M}$ jest częściową przestrzenią prostych jeśli dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny i na każdej prostej są co najmniej dwa punkty
- $\mathfrak{M}$ jest niezdegenerowana jeśli nie ma w niej punktu, który jest wpółliniowy ze wszystkimi innymi punktami

Przestrzeń punkty-proste

- $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$, gdzie:
  - S – punkty
  - $\mathcal{L}$ – proste, $\mathcal{L} \subset 2^S$
- $\mathfrak{M}$ jest częściową przestrzenią prostych jeśli dwie różne proste mają co najwyżej jeden punkt wspólny i na każdej prostej są co najmniej dwa punkty
- $\mathfrak{M}$ jest niezdegenerowana jeśli nie ma w niej punktu, który jest wpółliniowy ze wszystkimi innymi punktami

Przestrzeń punkty-proste

- $\mathfrak{M}$ jest mocna jeśli każdy dwa jej punkty są współliniowe
- podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$ to podzbiór $X \subseteq S$ zawierający każdą prostą, króra ma z X co najmniej dwa wspólne punkty
- właściwą podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$, która ma punkt wspólny z każdą prostą z $\mathfrak{M}$ nazywamy hiperpłaszczyzną przestrzeni $\mathfrak{M}$
- płaszczyzna w $\mathfrak{M}$ to mocna podprzestrzeń wymiaru 2

Przestrzeń punkty-proste

- $\mathfrak{M}$ jest mocna jeśli każdy dwa jej punkty są współliniowe
- podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$ to podzbiór $X \subseteq S$ zawierający każdą prostą, krórа ma z X co najmniej dwa wspólne punkty
- właściwą podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$, która ma punkt wspólny z każdą prostą z $\mathfrak{M}$ nazywamy hiperpłaszczyzną przestrzeni $\mathfrak{M}$
- płaszczyzna w $\mathfrak{M}$ to mocna podprzestrzeń wymiaru 2

Przestrzeń punkty-proste

- $\mathfrak{M}$ jest mocna jeśli każdy dwa jej punkty są współliniowe
- podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$ to podzbiór $X \subseteq S$ zawierający każdą prostą, króra ma z X co najmniej dwa wspólne punkty
- właściwą podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$, która ma punkt wspólny z każdą prostą z $\mathfrak{M}$ nazywamy hiperpłaszczyzną przestrzeni $\mathfrak{M}$
- płaszczyzna w $\mathfrak{M}$ to mocna podprzestrzeń wymiaru 2

Przestrzeń punkty-proste

- $\mathfrak{M}$ jest mocna jeśli każdy dwa jej punkty są współliniowe
- podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$ to podzbiór $X \subseteq S$ zawierający każdą prostą, króra ma z X co najmniej dwa wspólne punkty
- właściwą podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$, która ma punkt wspólny z każdą prostą z $\mathfrak{M}$ nazywamy hiperpłaszczyzną przestrzeni $\mathfrak{M}$
- płaszczyzna w $\mathfrak{M}$ to mocna podprzestrzeń wymiaru 2

Dopełnienie

- $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ – gruba cześciowa przestrzeń prostych
- $\mathcal{W}$ – właściwa podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$
- $S_{\mathcal{W}} := S \setminus \mathcal{W}$ oraz $\mathcal{L}_{\mathcal{W}} := \{k \cap S_{\mathcal{W}} \colon k \in \mathcal{L} \wedge k \not\subseteq \mathcal{W}\}$

Dopełnieniem podprzestrzeni $\mathcal{W}$ w $\mathfrak{M}$ jest struktura

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{W}) := \langle S_{\mathcal{W}}, \mathcal{L}_{\mathcal{W}} \rangle.$$

Dopełnienie

- $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ – gruba cześciowa przestrzeń prostych
- $\mathcal{W}$ – właściwa podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$
- $S_{\mathcal{W}} := S \setminus \mathcal{W}$ oraz $\mathcal{L}_{\mathcal{W}} := \{k \cap S_{\mathcal{W}} : k \in \mathcal{L} \wedge k \not\subseteq \mathcal{W}\}$

Dopełnieniem podprzestrzeni $\mathcal{W}$ w $\mathfrak{M}$ jest struktura
$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{W}) := \langle S_{\mathcal{W}}, \mathcal{L}_{\mathcal{W}} \rangle.$$

Dopełnienie

- $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ – gruba cześciowa przestrzeń prostych
- $\mathcal{W}$ – właściwa podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$
- $S_{\mathcal{W}} := S \setminus \mathcal{W}$ oraz $\mathcal{L}_{\mathcal{W}} := \{k \cap S_{\mathcal{W}} \colon k \in \mathcal{L} \wedge k \nsubseteq \mathcal{W}\}$

Dopełnieniem podprzestrzeni $\mathcal{W}$ w $\mathfrak{M}$ jest struktura

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{W}) := \langle S_{\mathcal{W}}, \mathcal{L}_{\mathcal{W}} \rangle.$$

Dopełnienie

- $\mathfrak{M} = \langle S, \mathcal{L} \rangle$ – gruba cześciowa przestrzeń prostych
- $\mathcal{W}$ – właściwa podprzestrzeń przestrzeni $\mathfrak{M}$
- $S_{\mathcal{W}} := S \setminus \mathcal{W}$ oraz $\mathcal{L}_{\mathcal{W}} := \{k \cap S_{\mathcal{W}} \colon k \in \mathcal{L} \wedge k \nsubseteq \mathcal{W}\}$

Dopełnieniem podprzestrzeni $\mathcal{W}$ w $\mathfrak{M}$ jest struktura

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{W}) := \langle S_{\mathcal{W}}, \mathcal{L}_{\mathcal{W}} \rangle.$$

Naturalna równoległość

- domknięcie prostej $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ to $\overline{L} \in \mathcal{L}$ taka, że $L \subseteq \overline{L}$

$$K \parallel_{\mathcal{W}} L \quad \text{wtw. gdy} \quad \overline{K} \cap \overline{L} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$$

- $\mathcal{W}$ – horyzont dopełnienia $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{W})$

Naturalna równoległość

- domknięcie prostej $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ to $\overline{L} \in \mathcal{L}$ taka, że $L \subseteq \overline{L}$

$$K \parallel_{\mathcal{W}} L \quad \text{wtw. gdy} \quad \overline{K} \cap \overline{L} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$$

- $\mathcal{W}$ – horyzont dopełnienia $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{W})$

Naturalna równoległość

- domknięcie prostej $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ to $\overline{L} \in \mathcal{L}$ taka, że $L \subseteq \overline{L}$

$$K \parallel_{\mathcal{W}} L \quad \text{wtw. gdy} \quad \overline{K} \cap \overline{L} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$$

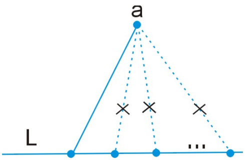
- $\mathcal{W}$ – horyzont dopełnienia $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}(\mathcal{W})$

Przestrzeń biegunowa

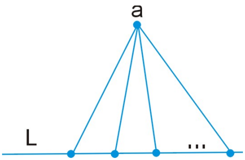
Definicja (Buekenhout & Shult, 1974)

Przestrzeń biegunowa $\mathfrak{P}$ to częściowa przestrzeń prostych spełniająca aksjomat one-or-all.

one-or-all:



or



Przestrzeń biegunowa

- rząd przestrzeni biegunowej to maksymalna liczba n, dla której istnieje łańcuch mocnych podprzestrzeni $\emptyset \neq X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n$

- $a^{\perp}$ – zbiór wszystkich punktów wpółliniowych z a

Fakt

Dla dowolnego punktu a zbiór $a^{\perp}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$.

- dla $X \subseteq S$:

$$X^{\perp} = \bigcap\{a^{\perp} : a \in X\}, \quad \operatorname{rad} X = X \cap X^{\perp}$$

Przestrzeń biegunowa

- rząd przestrzeni biegunowej to maksymalna liczba n, dla której istnieje łańcuch mocnych podprzestrzeni $\emptyset \neq X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n$
- $a^\perp$ – zbiór wszystkich punktów wpółliniowych z a

Fakt

Dla dowolnego punktu a zbiór $a^\perp$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$.

- dla $X \subseteq S$:

$$X^\perp = \bigcap\{a^\perp : a \in X\}, \quad \operatorname{rad} X = X \cap X^\perp$$

Przestrzeń biegunowa

- rząd przestrzeni biegunowej to maksymalna liczba n, dla której istnieje łańcuch mocnych podprzestrzeni $\emptyset \neq X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n$

- $a^\perp$ – zbiór wszystkich punktów wpółliniowych z a

Fakt

Dla dowolnego punktu a zbiór $a^\perp$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$.

- dla $X \subseteq S$:

$$X^\perp = \bigcap\{a^\perp \colon a \in X\}, \quad \operatorname{rad} X = X \cap X^\perp$$

Dopełnienie w przestrzeni biegunowej

- $\mathfrak{P}$ – klasyczna przestrzeń biegunowa (zanurzalna w przestrzeń rzutową)
- $\mathcal{W}$ – podprzestrzeń zawarta w hiperpłaszczyźnie
- $\mathcal{L}^*$ – proste afiniczne, czyli takie, że $L \parallel_{\mathcal{W}} L$
- L^∞ – punkt w nieskończoności – punkt wspólny prostej $\overline{L}$ i $\mathcal{W}$

Dopełnienie w przestrzeni biegunowej

- $\mathfrak{P}$ – klasyczna przestrzeń biegunowa (zanurzalna w przestrzeń rzutową)
- $\mathcal{W}$ – podprzestrzeń zawarta w hiperpłaszczyźnie
- $\mathcal{L}^*$ – proste afiniczne, czyli takie, że $L \parallel_{\mathcal{W}} L$
- L^∞ – punkt w nieskończoności – punkt wspólny prostej $\overline{L}$ i $\mathcal{W}$

Dopełnienie w przestrzeni biegunowej

- $\mathfrak{P}$ – klasyczna przestrzeń biegunowa (zanurzalna w przestrzeń rzutową)
- $\mathcal{W}$ – podprzestrzeń zawarta w hiperpłaszczyźnie
- $\mathcal{L}^*$ – proste afiniczne, czyli takie, że $L \parallel_{\mathcal{W}} L$
- L^∞ – punkt w nieskończoności – punkt wspólny prostej $\overline{L}$ i $\mathcal{W}$

Dopełnienie w przestrzeni biegunowej

- $\mathfrak{P}$ – klasyczna przestrzeń biegunowa (zanurzalna w przestrzeń rzutową)
- $\mathcal{W}$ – podprzestrzeń zawarta w hiperpłaszczyźnie
- $\mathcal{L}^*$ – proste afiniczne, czyli takie, że $L \parallel_{\mathcal{W}} L$
- L^∞ – punkt w nieskończoności – punkt wpólny prostej $\overline{L}$ i $\mathcal{W}$

Głębokie punkty i proste

- a jest głębokim punktem jeśli nie ma prostej $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ takiej, że $a = L^{\infty}$
- Π – płaszczyzna semiafiniczna, $\Pi^{\infty} = \{M^{\infty} \colon M \in \mathcal{L}^{*}$ i $M \subseteq \Pi\}$
- $L \subseteq \mathcal{W}$ jest głęboką prostą jeśli nie ma płaszczyzny w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$ takiej, że $L = \Pi^{\infty}$

Lemat

- Jeśli $\mathcal{W}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to istnieje co najwyżej jeden głęboki punkt w $\mathcal{W}$ i jest on w zbiorze rad $\mathcal{W}$.
- Jeśli $\mathcal{W}$ nie jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to nie ma głębokich punktów w $\mathcal{W}$.

Głębokie punkty i proste

- a jest głębokim punktem jeśli nie ma prostej $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ takiej, że $a = L^{\infty}$
- Π – płaszczyzna semiafiniczna, $\Pi^{\infty} = \{M^{\infty} \colon M \in \mathcal{L}^{*}$ i $M \subseteq \Pi\}$
- $L \subseteq \mathcal{W}$ jest głęboką prostą jeśli nie ma płaszczyzny w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$ takiej, że $L = \Pi^{\infty}$

Lemat

- Jeśli $\mathcal{W}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to istnieje co najwyżej jeden głęboki punkt w $\mathcal{W}$ i jest on w zbiorze rad $\mathcal{W}$.
- Jeśli $\mathcal{W}$ nie jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to nie ma głębokich punktów w $\mathcal{W}$.

Głębokie punkty i proste

- a jest głębokim punktem jeśli nie ma prostej $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ takiej, że $a = L^{\infty}$
- Π – płaszczyzna semiafiniczna, $\Pi^{\infty} = \{M^{\infty} \colon M \in \mathcal{L}^{*} \text{ i } M \subseteq \Pi\}$
- $L \subseteq \mathcal{W}$ jest głęboką prostą jeśli nie ma płaszczyzny w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$ takiej, że $L = \Pi^{\infty}$

Lemat

- Jeśli $\mathcal{W}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to istnieje co najwyżej jeden głęboki punkt w $\mathcal{W}$ i jest on w zbiorze rad $\mathcal{W}$.
- Jeśli $\mathcal{W}$ nie jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to nie ma głębokich punktów w $\mathcal{W}$.

Głębokie punkty i proste

- a jest głębokim punktem jeśli nie ma prostej $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ takiej, że $a = L^{\infty}$
- Π – płaszczyzna semiafiniczna, $\Pi^{\infty} = \{M^{\infty} \colon M \in \mathcal{L}^{*}$ i $M \subseteq \Pi\}$
- $L \subseteq \mathcal{W}$ jest głęboką prostą jeśli nie ma płaszczyzny w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$ takiej, że $L = \Pi^{\infty}$

Lemat

- Jeśli $\mathcal{W}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to istnieje co najwyżej jeden głęboki punkt w $\mathcal{W}$ i jest on w zbiorze rad $\mathcal{W}$.
- Jeśli $\mathcal{W}$ nie jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to nie ma głębokich punktów w $\mathcal{W}$.

Głębokie punkty i proste

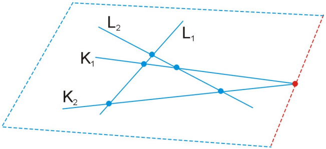
- a jest głębokim punktem jeśli nie ma prostej $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ takiej, że $a = L^{\infty}$
- Π – płaszczyzna semiafiniczna, $\Pi^{\infty} = \{M^{\infty} \colon M \in \mathcal{L}^{*} \text{ i } M \subseteq \Pi\}$
- $L \subseteq \mathcal{W}$ jest głęboką prostą jeśli nie ma płaszczyzny w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$ takiej, że $L = \Pi^{\infty}$

Lemat

- Jeśli $\mathcal{W}$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to istnieje co najwyżej jeden głęboki punkt w $\mathcal{W}$ i jest on w zbiorze rad $\mathcal{W}$.
- Jeśli $\mathcal{W}$ nie jest hiperpłaszczyzną w $\mathfrak{P}$, to nie ma głębokich punktów w $\mathcal{W}$.

Naturalna równoległość vs. Veblenowska równoległość

$$K \parallel_{\mathcal{W}} L \quad \text{wtw. gdy} \quad \overline{K} \cap \overline{L} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$$



$K_1 \parallel^* K_2$ wtw. gdy $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ oraz istnieją dwie różne proste $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ przecinające każdą z prostych K_1, K_2 takie, że $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ i $L_1 \cap L_2 \cap K_i = \emptyset$ dla $i = 1, 2$

Naturalna równoległość vs. Veblenowska równoległość

- $K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ – dwie różne proste takie, że $K \parallel_{\mathcal{W}} L$

Lemat 1

Podprzestrzeń $\mathcal{W}$ może być rozszerzona do hiperpłaszczyzny przestrzeni $\mathfrak{P}$, która nie zawiera prostych $\overline{K}$ i $\overline{L}$.

Lemat 2

W $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$ istnieje ciag płaszczyzn $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ takich, że $K^\infty = L^\infty \in \overline{\Pi_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$ i $K \subseteq \Pi_1$, $L \subseteq \Pi_n$, oraz Π_j, Π_{j+1} mają wspólną prostą dla $j = 1, \ldots, n-1$.

Naturalna równoległość vs. Veblenowska równoległość

- $K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ – dwie różne proste takie, że $K \parallel_{\mathcal{W}} L$

Lemat 1

Podprzestrzeń $\mathcal{W}$ może być rozszerzona do hiperpłaszczyzny przestrzeni $\mathfrak{P}$, która nie zawiera prostych $\overline{K}$ i $\overline{L}$.

Lemat 2

W $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$ istnieje ciag płaszczyzn $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ takich, że $K^\infty = L^\infty \in \overline{\Pi_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$ i $K \subseteq \Pi_1$, $L \subseteq \Pi_n$, oraz Π_j, Π_{j+1} mają wspólną prostą dla $j = 1, \ldots, n-1$.

- $K, L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ – dwie różne proste takie, że $K \parallel_{\mathcal{W}} L$

Lemat 1

Podprzestrzeń $\mathcal{W}$ może być rozszerzona do hiperpłaszczyzny przestrzeni $\mathfrak{P}$, która nie zawiera prostych $\overline{K}$ i $\overline{L}$.

Lemat 2

W $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$ istnieje ciag płaszczyzn $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ takich, że $K^\infty = L^\infty \in \overline{\Pi_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$ i $K \subseteq \Pi_1$, $L \subseteq \Pi_n$, oraz Π_j, Π_{j+1} mają wspólną prostą dla $j = 1, \ldots, n-1$.

Naturalna równoległość vs. Veblenowska równoległość

- $\parallel$ – tranzytywne domknięcie relacji $\parallel^*$
- $\parallel$ jest zwrotna na zbiorze $\mathcal{L}^*$

Stwierdzenie

Relacje $\parallel_{\mathcal{W}}$ oraz $\parallel$ pokrywają się na zbiorze $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$.

Wniosek

Proste afiniczne są definiowalne w zbiorze $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$.

Naturalna równoległość vs. Veblenowska równoległość

- $\|$ – tranzytywne domknięcie relacji $\|^*$
- $\|$ jest zwrotna na zbiorze $\mathcal{L}^*$

Stwierdzenie

Relacje $\|_{\mathcal{W}}$ oraz $\|$ pokrywają się na zbiorze $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$.

Wniosek

Proste afiniczne są definiowalne w zbiorze $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$.

Naturalna równoległość vs. Veblenowska równoległość

- $\parallel$ – tranzytywne domknięcie relacji $\parallel^*$
- $\parallel$ jest zwrotna na zbiorze $\mathcal{L}^*$

Stwierdzenie

Relacje $\parallel_{\mathcal{W}}$ oraz $\parallel$ pokrywają się na zbiorze $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$.

Wniosek

Proste afiniczne są definiowalne w zbiorze $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$.

Naturalna równoległość vs. Veblenowska równoległość

- $\|$ – tranzytywne domknięcie relacji $\|^*$
- $\|$ jest zwrotna na zbiorze $\mathcal{L}^*$

Stwierdzenie

Relacje $\|_{\mathcal{W}}$ oraz $\|$ pokrywają się na zbiorze $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$.

Wniosek

Proste afiniczne są definiowalne w zbiorze $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}$.

Punkty z $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} = \{L^\infty : L \in \mathcal{L}^*\} \quad \longleftrightarrow \quad \{[L]_{\parallel} : L \in \mathcal{L}^*\}$$

Głębokie proste z $\mathcal{W}$

- anty-euklidesowa równoległość $\sim \subseteq \mathcal{L}^* \times \mathcal{L}^*$

$$K_1 \sim K_2 \quad \text{wtw. gdy} \quad \text{dla każdego } M \in \mathcal{L}^* \text{ jeśli } M \cap K_1 \neq \emptyset \text{ to } M \nparallel K_2$$

- i jej pochodna $\equiv \subseteq \mathcal{L}^*/_{\parallel} \times \mathcal{L}^*/_{\parallel}$

$$[K_1]_{\parallel} \equiv [K_2]_{\parallel} \quad \text{wtw. gdy} \quad \text{dla każdego } M \in [K_1]_{\parallel}, N \in [K_2]_{\parallel} \; M \sim N \text{ i } N \sim M$$

Rekonstrukcja

Punkty z $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} = \{L^\infty : L \in \mathcal{L}^*\} \quad \longleftrightarrow \quad \{[L]_\parallel : L \in \mathcal{L}^*\}$$

Głębokie proste z $\mathcal{W}$

- anty-euklidesowa równoległość $\sim \subseteq \mathcal{L}^* \times \mathcal{L}^*$

$$K_1 \sim K_2 \quad \text{wtw. gdy} \quad \text{dla każdego } M \in \mathcal{L}^* \text{ jeśli } M \cap K_1 \neq \emptyset \text{ to } M \nparallel K_2$$

- i jej pochodna $\equiv \subseteq \mathcal{L}^*/_\parallel \times \mathcal{L}^*/_\parallel$

$$[K_1]_\parallel \equiv [K_2]_\parallel \quad \text{wtw. gdy} \quad \text{dla każdego } M \in [K_1]_\parallel, N \in [K_2]_\parallel \; M \sim N \text{ i } N \sim M$$

Rekonstrukcja

Punkty z $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} = \{L^\infty \colon L \in \mathcal{L}^*\} \quad \longleftrightarrow \quad \{[L]_{\parallel} \colon L \in \mathcal{L}^*\}$$

Głębokie proste z $\mathcal{W}$

- anty-euklidesowa równoległość $\sim \subseteq \mathcal{L}^* \times \mathcal{L}^*$

$$K_1 \sim K_2 \quad \text{wtw. gdy} \quad \text{dla każdego } M \in \mathcal{L}^* \; \text{jeśli } M \cap K_1 \neq \emptyset \text{ to } M \nparallel K_2$$

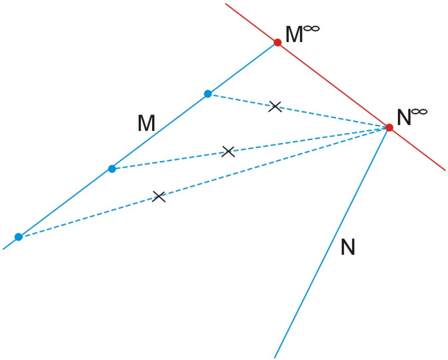
- i jej pochodna $\equiv \subseteq \mathcal{L}^*/_{\parallel} \times \mathcal{L}^*/_{\parallel}$

$$[K_1]_{\parallel} \equiv [K_2]_{\parallel} \quad \text{wtw. gdy} \quad \text{dla każdego } M \in [K_1]_{\parallel}, N \in [K_2]_{\parallel} \; M \sim N \text{ i } N \sim M$$

Lemat

Niech M, N będę dwiema nierównoległymi prostymi afinicznymi. NWSR:

- $[M]_{\|} \equiv [N]_{\|}$,
- istnieje głęboka prosta $L \subseteq \mathcal{W}$ taka, że $M^{\infty}, N^{\infty} \in L$.



Rekonstrukcja

- K_1, K_2, K_3 – parami nierównoległe proste afiniczne

Ternarna współliniowość na głębokich prostych...

Jeżeli $[K_i]_{\parallel} \equiv [K_{i+1 \mod 3}]_{\parallel}$ dla $i = 1, 2, 3$, to punkty K_1^∞, K_2^∞, K_3^∞ leżą na jednej prostej.

...i na wszystkich prostych horyzontu $\mathcal{W}$

Punkty K_1^∞, K_2^∞, K_3^∞ leżą na jednaj prostej wtw. gdy zachodzi jeden z warunków:

- istnieją proste afiniczne $M_1 \parallel K_1$, $M_2 \parallel K_2$, $M_3 \parallel K_3$ takie, że M_1, M_2, M_3 tworzą trójkąt w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$,
- $[K_1]_{\parallel} \equiv [K_2]_{\parallel}$, $[K_2]_{\parallel} \equiv [K_3]_{\parallel}$, oraz $[K_3]_{\parallel} \equiv [K_1]_{\parallel}$.

Rekonstrukcja

- K_1, K_2, K_3 – parami nierównoległe proste afiniczne

Ternarna współliniowość na głębokich prostych...

Jeżeli $[K_i]_{\|} \equiv [K_{i+1 \mod 3}]_{\|}$ dla $i = 1, 2, 3$, to punkty K_1^∞, K_2^∞, K_3^∞ leżą na jednej prostej.

...i na wszystkich prostych horyzontu $\mathcal{W}$

Punkty K_1^∞, K_2^∞, K_3^∞ leżą na jednaj prostej wtw. gdy zachodzi jeden z warunków:

- istnieją proste afiniczne $M_1 \parallel K_1$, $M_2 \parallel K_2$, $M_3 \parallel K_3$ takie, że M_1, M_2, M_3 tworzą trójkąt w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$,
- $[K_1]_{\|} \equiv [K_2]_{\|}$, $[K_2]_{\|} \equiv [K_3]_{\|}$, oraz $[K_3]_{\|} \equiv [K_1]_{\|}$.

Rekonstrukcja

- K_1, K_2, K_3 – parami nierównoległe proste afiniczne

Ternarna współliniowość na głębokich prostych...

Jeżeli $[K_i]_{\|} \equiv [K_{i+1 \mod 3}]_{\|}$ dla $i = 1, 2, 3$, to punkty K_1^∞, K_2^∞, K_3^∞ leżą na jednej prostej.

...i na wszystkich prostych horyzontu $\mathcal{W}$

Punkty K_1^∞, K_2^∞, K_3^∞ leżą na jednaj prostej wtw. gdy zachodzi jeden z warunków:

- istnieją proste afiniczne $M_1 \parallel K_1$, $M_2 \parallel K_2$, $M_3 \parallel K_3$ takie, że M_1, M_2, M_3 tworzą trójkąt w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$,
- $[K_1]_{\|} \equiv [K_2]_{\|}$, $[K_2]_{\|} \equiv [K_3]_{\|}$, oraz $[K_3]_{\|} \equiv [K_1]_{\|}$.

Izomorfizm

- $\big[[K]_{\|}, [L]_{\|}\big]_{\equiv} := \{[M]_{\|} : [M]_{\|} \equiv [K]_{\|}, [L]_{\|}\}$
- $\mathcal{L}' := \Big\{\big[[K]_{\|}, [L]_{\|}\big]_{\equiv} : [K]_{\|} \equiv [L]_{\|}$ oraz $K \nparallel L\Big\}$
- $\mathcal{L}'' := \{\Pi^{\infty} : \Pi$ jest płaszczyzną semiafiniczną w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})\}$

$$\mathfrak{P} \cong \langle S_{\mathcal{W}} \cup \mathcal{L}^{*}/_{\|},\ \mathcal{L}_{\mathcal{W}} \cup \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'',\ |\rangle$$

- $[K]_{\|} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ wtw. gdy $K \parallel L$
- $[K]_{\|} \mid L \in \mathcal{L}'$ wtw. gdy istnieje $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ taka, że $\big[[K]_{\|}, [M]_{\|}\big]_{\equiv} = L$
- $[K]_{\|} \mid L \in \mathcal{L}''$ wtw. gdy $K \subseteq \Pi$ oraz $L = \Pi^{\infty}$

Izomorfizm

- $\big[[K]_{\|},[L]_{\|}\big]_{\equiv} := \{[M]_{\|} : [M]_{\|} \equiv [K]_{\|},[L]_{\|}\}$
- $\mathcal{L}' := \Big\{\big[[K]_{\|},[L]_{\|}\big]_{\equiv} : [K]_{\|} \equiv [L]_{\|}$ oraz $K \nparallel L\Big\}$
- $\mathcal{L}'' := \{\Pi^{\infty} : \Pi$ jest płaszczyzną semiafiniczną w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})\}$

$$\mathfrak{P} \cong \langle S_{\mathcal{W}} \cup \mathcal{L}^{*}/_{\|},\ \mathcal{L}_{\mathcal{W}} \cup \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'',\ |\rangle$$

- $[K]_{\|} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ wtw. gdy $K \parallel L$
- $[K]_{\|} \mid L \in \mathcal{L}'$ wtw. gdy istnieje $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ taka, że $\big[[K]_{\|},[M]_{\|}\big]_{\equiv} = L$
- $[K]_{\|} \mid L \in \mathcal{L}''$ wtw. gdy $K \subseteq \Pi$ oraz $L = \Pi^{\infty}$

Izomorfizm

- $\big[[K]_\parallel, [L]_\parallel\big]_\equiv := \{[M]_\parallel : [M]_\parallel \equiv [K]_\parallel, [L]_\parallel\}$
- $\mathcal{L}' := \Big\{\big[[K]_\parallel, [L]_\parallel\big]_\equiv : [K]_\parallel \equiv [L]_\parallel$ oraz $K \nparallel L\Big\}$
- $\mathcal{L}'' := \{\Pi^\infty : \Pi$ jest płaszczyzną semiafiniczną w $\mathfrak{D}_\mathfrak{P}(\mathcal{W})\}$

$$\mathfrak{P} \cong \langle S_\mathcal{W} \cup \mathcal{L}^*/_\parallel,\ \mathcal{L}_\mathcal{W} \cup \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'',\ |\rangle$$

- $[K]_\parallel \mid L \in \mathcal{L}_\mathcal{W}$ wtw. gdy $K \parallel L$
- $[K]_\parallel \mid L \in \mathcal{L}'$ wtw. gdy istnieje $M \in \mathcal{L}_\mathcal{W}$ taka, że $\big[[K]_\parallel, [M]_\parallel\big]_\equiv = L$
- $[K]_\parallel \mid L \in \mathcal{L}''$ wtw. gdy $K \subseteq \Pi$ oraz $L = \Pi^\infty$

Izomorfizm

- $\big[[K]_{\|}, [L]_{\|}\big]_{\equiv} := \{[M]_{\|} : [M]_{\|} \equiv [K]_{\|}, [L]_{\|}\}$
- $\mathcal{L}' := \Big\{\big[[K]_{\|}, [L]_{\|}\big]_{\equiv} : [K]_{\|} \equiv [L]_{\|} \text{ oraz } K \nparallel L\Big\}$
- $\mathcal{L}'' := \{\Pi^{\infty} : \Pi \text{ jest płaszczyzną semiafiniczną w } \mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})\}$

$$\mathfrak{P} \cong \langle S_{\mathcal{W}} \cup \mathcal{L}^{*}/_{\|},\ \mathcal{L}_{\mathcal{W}} \cup \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'',\ |\rangle$$

- $[K]_{\|} \mid L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ wtw. gdy $K \parallel L$
- $[K]_{\|} \mid L \in \mathcal{L}'$ wtw. gdy istnieje $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ taka, że $\big[[K]_{\|}, [M]_{\|}\big]_{\equiv} = L$
- $[K]_{\|} \mid L \in \mathcal{L}''$ wtw. gdy $K \subseteq \Pi$ oraz $L = \Pi^{\infty}$

Izomorfizm

- $\big[[K]_\|, [L]_\|\big]_\equiv := \{[M]_\| : [M]_\| \equiv [K]_\|, [L]_\|\}$
- $\mathcal{L}' := \Big\{\big[[K]_\|, [L]_\|\big]_\equiv : [K]_\| \equiv [L]_\| \text{ oraz } K \nparallel L\Big\}$
- $\mathcal{L}'' := \{\Pi^\infty : \Pi$ jest płaszczyzną semiafiniczną w $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})\}$

$$\mathfrak{P} \cong \big\langle S_{\mathcal{W}} \cup \mathcal{L}^*/_\|,\ \mathcal{L}_{\mathcal{W}} \cup \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}'',\ \big|\big\rangle$$

- $[K]_\| \ \big|\ L \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ wtw. gdy $K \parallel L$
- $[K]_\| \ \big|\ L \in \mathcal{L}'$ wtw. gdy istnieje $M \in \mathcal{L}_{\mathcal{W}}$ taka, że $\big[[K]_\|, [M]_\|\big]_\equiv = L$
- $[K]_\| \ \big|\ L \in \mathcal{L}''$ wtw. gdy $K \subseteq \Pi$ oraz $L = \Pi^\infty$

Główny rezultat

Twierdzenie

Niech $\mathfrak{P}$ będzie grubą, niezdegenerowaną, klasyczną przestrzenią biegunową rzędu co najmniej 3, oraz niech $\mathcal{W}$ będzie jej podprzestrzenią rozszerzalną do hiperpłaszczyzny. Przestrzeń biegunowa $\mathfrak{P}$ może być zrekonstruowana z dopełnienia $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$.

Czy maksymalna właściwa podprzestrzeń przestrzeni biegunowej musi być jej hiperpłaszczyzną?

Twierdzenie

Niech $\mathfrak{P}$ będzie grubą, niezdegenerowaną, klasyczną przestrzenią biegunową rzędu co najmniej 3, oraz niech $\mathcal{W}$ będzie jej podprzestrzenią rozszerzalną do hiperpłaszczyzny. Przestrzeń biegunowa $\mathfrak{P}$ może być zrekonstruowana z dopełnienia $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{W})$.

Czy maksymalna właściwa podprzestrzeń przestrzeni biegunowej musi być jej hiperpłaszczyzną?


THE END