

# Konfiguracje reprezentujące skośną perspektywę

Krzysztof Prażmowski

joint work with Kamil Maszkowski and Małgorzata Prażmowska

Uniwersytet w Białymstoku  
Instytut of Matematyki

XII PSG, 2018, Lublin

Kontynuacja zagadnień klasyfikacji konfiguracji dwumianowych via ich (maksymalne) wolne podgrafy pełne.

Poglądowo: dwa takie podgrafy są w konfiguracji (dwa  $K_n$ )  
 $\equiv$  konfiguracja reprezentuje skośną perspektywę dwu podgrafów pełnych (dwa  $K_{n-1}$ ).

Dany zbiór  $X$ :  $\wp(X)$  – rodzina podzbiorów  $X$ ,  $\wp_k(X)$  –  $k$ -el'towe podzbiory  $X$ ,  $\mathcal{S}_X$  – rodzina permutacji  $X$ ,  $K_X = \langle X, \wp_2(X) \rangle$  – graf pełny o wierzchołkach  $X$ . Gdy  $\varphi \in \mathcal{S}_X$ ,  $\bar{\varphi} \in \mathcal{S}_{\wp_2(X)}$ : naturalne rozszerzenie  $\varphi$ .  $\varkappa: \wp(X) \rightarrow \wp(X)$ : boolowskie dopełnienie,  $\varkappa(a) = X \setminus a$ .

*Konfiguracja*: struktura  $\langle S, \mathcal{L} \rangle$  (słowami:  $\langle$ punkty, proste $\rangle$ ) gdzie (na ogół)  $\mathcal{L} \subset \wp(X)$  (lub z *relacją incydencji*) w której co najwyżej jedna prosta przechodzi przez dwa różne punkty, o stałej liczbie ( $r$ ) punktów na prostych i stałej liczbie prostych ( $m$ ) przez punkt; oznacza się ją wtedy jako  $(\nu_r b_m)$ -konfigurację,  $\nu$  to liczność  $S$  i  $b$  to liczność  $\mathcal{L}$ .

Interesować nas będą *dwumianowe partial Steiner triple systems* to znaczy  $\left( \binom{n}{2}_{n-2} \binom{n}{3}_3 \right)$ -konfiguracje dla pewnej liczby całkowitej  $n \geq 4$ .

## Konstrukcja 0.1

Parametry (argumenty):  $I$  – zbiór,  $0 < n := |I| < \infty$  (typowo:  $I = I_n := \{1, \dots, n\}$ ).  $A = \{a_i : i \in I\}$ ,  $B = \{b_i : i \in I\}$   
 $n$ -elementowe zbiory,  $C = \{c_u : u \in \wp_2(I)\}$   $\binom{n}{2}$ -elementowy  
 zbiór t.ż.  $A, B, \{p\}, C$  parami rozłączne, permutacja  $\sigma$  zbioru  
 $\wp_2(I)$ . Połóżmy

$$\mathcal{P} := A \cup B \cup \{p\} \cup C.$$

$$\mathcal{L}_p := \{\{p, a_i, b_i\} : i \in I\},$$

$$\mathcal{L}_A := \{\{a_i, a_j, c_{\{i,j\}}\} : \{i, j\} \in \wp_2(I)\},$$

$$\mathcal{L}_B := \{\{b_i, b_j, c_{\sigma^{-1}(\{i,j\})}\} : \{i, j\} \in \wp_2(I)\}.$$

$\mathcal{L}_C \subset \wp_3(C)$ :  $\mathfrak{N} = \langle C, \mathcal{L}_C \rangle$  jest jakąś  $\left(\binom{n}{2}_{n-2} \binom{n}{3}_3\right)$ -konfiguracją.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_p \cup \mathcal{L}_A \cup \mathcal{L}_B \cup \mathcal{L}_C \text{ i } \mathbf{\Pi}(n, \sigma, \mathfrak{N}) := \langle \mathcal{P}, \mathcal{L} \rangle.$$

# Perspektywy w klasie dwumianowych partial Steiner triple systems

Struktura  $\Pi(n, \sigma, \mathfrak{N})$ : *skośna perspektywa o skosie  $\sigma$ .*

$$\Pi(n, \sigma, \mathfrak{N}) \text{ jest } \left( \binom{n+2}{2}_n \binom{n+2}{3}_3 \right) \text{ konfiguracją.} \quad (1)$$

Standardowa notacja:  $\overline{xy}$ : prosta łącząca dwa współliniowe punkty  $x, y \in \mathcal{P}$ , operacja częściowa  $\oplus$  o własnościach:  $x \oplus x = x$ ,  $\{x, y, x \oplus y\} \in \mathcal{L}$  jeśli tylko istnieje  $\overline{xy}$ .

Odwzorowanie

$$\pi = (a_i \mapsto b_i, i \in I)$$

to *perspektywa punktowa*  $K_A$  na  $K_B$  o *środku*  $p$ . Odwzorowanie

$$\xi = (\overline{a_i a_j} \mapsto \overline{b_{i'} b_{j'}}, \sigma(\{i, j\}) = \{i', j'\} \in \wp_2(I))$$

to *perspektywa prostych*, gdzie  $\mathfrak{N}$  to *oś* w tej perspektywie.

# Perspektywy w klasie dwumianowych partial Steiner triple systems

(Pod)graf  $\mathcal{G}$  jest wolny w  $\left(\binom{n}{2}_{n-2} \binom{n}{3}_3\right)$ -konfiguracji  $\mathfrak{B}$ :

wierzchołki  $\mathcal{G} \subset$  punkty  $\mathfrak{B}$ , każda krawędź  $e$  w  $\mathcal{G}$  jest zawarta w pewnej prostej  $\bar{e}$  z  $\mathfrak{B}$  i odwzorowanie  $e \mapsto \bar{e}$  jest injekcją, proste z  $\mathfrak{B}$  zawierające rozłączne krawędzie z  $\mathcal{G}$  nie przecinają się w  $\mathfrak{B}$ .

Oczywiste:  $A^* = A \cup \{p\}$  i  $B^* = B \cup \{p\}$  są  $K_{n+1}$ -grafami wolno zawartymi w  $\mathfrak{N}(n, \sigma, \mathfrak{N})$ .

**Fakt 0.2 ([1, Prop. 2.6, Thm. 2.12])**

Niech  $N = n + 2$ . Następujące warunki są równoważne.

(i)  $\mathfrak{N}$  jest  $\left(\binom{N}{2}_{N-2} \binom{N}{3}_3\right)$ -konfiguracją, która zawiera wolno dwa  $K_{N-1}$ -grafy.

(ii)  $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{N}(n, \sigma, \mathfrak{N})$  dla pewnej  $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}_2(I)}$  i pewnej  $\left(\binom{n}{2}_{n-2} \binom{n}{3}_3\right)$ -konfiguracji  $\mathfrak{N}$  zdefiniowanej na  $\mathcal{P}_2(I)$ .

## Stwierdzenie 0.3

Niech  $f \in \mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ ,  $f(p) = p$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_{\wp_2(I)}$ , i niech  $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$  będą dwiema  $\left( \binom{n}{2}_{n-2} \binom{n}{3}_3 \right)$ -konfiguracjami zdefiniowanymi na  $\wp_2(I)$ .  
Następujące warunki są równoważne.

- (i)  $f$  jest izomorfizmem  $\Pi(n, \sigma_1, \mathfrak{N}_1)$  na  $\Pi(n, \sigma_2, \mathfrak{N}_2)$ .

(ii) Istnieje  $\varphi \in \mathcal{S}_I$  takie, że jedno z poniższych zachodzi

$\bar{\varphi}$  jest izomorfizmem  $\mathfrak{N}_1$  na  $\mathfrak{N}_2$ , (2)

$$f(x_i) = x_{\varphi(i)}, \quad x = a, b, \quad f(c_{\{i,j\}}) = c_{\{\varphi(i), \varphi(j)\}}, \quad i, j \in I, i \neq j, \quad (3)$$

$$\bar{\varphi} \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \bar{\varphi}, \quad (4)$$

lub

$\sigma_2^{-1} \bar{\varphi}$  jest izomorfizmem  $\mathfrak{N}_1$  na  $\mathfrak{N}_2$ , (5)

$$f(a_i) = b_{\varphi(i)}, \quad f(b_i) = a_{\varphi(i)}, \quad f(c_{\{i,j\}}) = c_{\sigma_2^{-1}\{\varphi(i), \varphi(j)\}}, \quad (6)$$

$i, j \in I, i \neq j$

$$\bar{\varphi} \circ \sigma_1 = \sigma_2^{-1} \circ \bar{\varphi}. \quad (7)$$

Dowód



main (the simplest) series of perspectives:

skos zachowuje adiacencję krawędzi  $K_A$ , czyli skos postaci  $\bar{\sigma}$ ,  
 $\sigma \in \mathcal{S}_{I_n}$ , bądź  $\bar{\sigma} \not\sim$  ( $n = 4$ ,  $\sigma \in \mathcal{S}_{I_4}$ ).

# Inne podgrafy wolne: jakie one mogą być?

Niech  $\sigma \in \mathcal{S}_I$ ,

## Lemat 0.4

Następujące warunki są równoważne.

(i)  $\Pi(n, \sigma, \mathfrak{N})$  wolno zawiera  $K_{n+1}$ -graf  $G \neq K_{A^*}, K_{B^*}$ .

(ii) Istnieje  $i_0 \in \text{Fix}(\sigma)$  takie, że  $S(i_0) = \{c_u : i_0 \in u \in \wp_2(I)\}$  jest kliką współliniowości w  $\mathfrak{N}$  wolno w  $\mathfrak{N}$  zawartą.

W przypadku (ii),

$$G_{(i_0)} := \{a_{i_0}, b_{i_0}\} \cup S(i_0) \quad (8)$$

jest grafem pełnym wolno zawartym w  $\Pi(n, \sigma, \mathfrak{N})$ . *Dowód*

## Lemat 0.5

$\Pi(4, \bar{\sigma}\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$  nie zawiera wolno żadnego trzeciego grafu  $K_5$ . *Dowód*

# Przypadek szczególny: oś to uogólniona konfiguracja Desarguesa

## Stwierdzenie 0.6

Niech  $\mathfrak{M} = \Pi(n, \sigma, \mathbf{G}_2(n))$ ,  $\sigma \in \mathcal{S}_{I_n}$ ,  $n \geq 4$ . Albo  $\mathfrak{M} = \mathbf{G}_2(n+2) = \Pi(n, \text{id}, \mathbf{G}_2(n))$  i wtedy każdy punkt w  $\mathfrak{M}$  może być wybrany jako środek (skośnej) perspektywy, albo  $\mathfrak{M}$  nie zawiera żadnego punktu  $q \neq p$  takiego, że  $\mathfrak{M} \cong \Pi(n, \sigma', \mathfrak{B}) =: \mathfrak{M}'$  dla pewnej konfiguracji  $\mathfrak{B}$ , i takiego, że  $q$  jest środkiem perspektywy w  $\mathfrak{M}'$ .

## Wniosek 0.7

Niech  $\mathcal{S}_{I_n} \ni \sigma_1 \neq \text{id}_{I_n}$ ,  $n \geq 4$ . Jeśli  $f$  jest izomorfizmem  $\Pi(n, \sigma_1, \mathbf{G}_2(n))$  na  $\Pi(n, \sigma_2, \mathbf{G}_2(n))$  to  $f(p) = p$  i  $\sigma_2 \neq \text{id}_I$ . Ponadto  $f$  jest wyznaczony przez permutację  $\varphi \in \mathcal{S}_{I_n}$  (por. (3), (6)) a stąd albo  $f$  zachowuje  $A$  i  $B$  a wówczas  $\sigma_2 = \varphi \circ \sigma_1 \circ \varphi^{-1} = \sigma_1^\varphi$ , albo  $f$  wymienia  $A$  z  $B$  i wtedy  $\sigma_2^{-1} = \sigma_1^\varphi$  (patrz Stwierdzenie/ 0.3).

# Klasyfikacja $\left(\binom{6}{2}_{6-2} \binom{6}{3}_3\right)$ -konfiguracji; pierwszy krok: veblen poetykietowany

Niech  $\mathfrak{M} = \mathbf{\Pi}(4, \zeta, \mathfrak{V})$ , gdzie  $\zeta \in \mathcal{S}_{\wp_2(I_4)}$  zachowuje adiacencję krawędzi; zatem  $\zeta = \bar{\sigma}$  lub  $\zeta = \varkappa\bar{\sigma}$  dla pewnej  $\sigma \in \mathcal{S}_{I_4}$ .

Znane: istnieje dokładnie 6 (z dokładnością do permutacji z  $\mathcal{S}_{I_4}$ ) etykietowań  $\mathfrak{V}$ . Są to:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_2(I_4) &= \langle \wp_2(I_4), \{T(i) : i \in I_4\} \rangle, \\ \mathbf{B}(2) &= \langle \wp_2(I_4), \{T(1), T(2), \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \\ &\quad \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}\} \rangle, \quad (9) \\ \mathcal{V}_5 &= \langle \wp_2(I_4), \{T(3), \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 2\}, \\ &\quad \{2, 3\}, \{3, 4\}\}, \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}\} \rangle, \end{aligned}$$

i  $\varkappa$ -obrazy tych trzech struktur z listy (9):

$$\varkappa(\langle S, \mathcal{L} \rangle) = \langle S, \{\varkappa(L) : L \in \mathcal{L}\} \rangle.$$

$$\varkappa(\mathbf{G}_2(I_4)) = \mathbf{G}_2^*(I_4), \quad \varkappa(\mathbf{B}(2)) = \mathcal{V}_4, \quad \varkappa(\mathcal{V}_5) = \mathcal{V}_6. \quad (10)$$

$$Y \in \wp_3(I_4): T(Y) := \wp_2(Y); i_0 \in I_4: T(i_0) = T(I_4 \setminus \{i_0\}).$$

# Klasyfikacja $(15_4 20_3)$ -perspektyw, drugi krok: które są już znane?

Jeśli  $(15_4 20_3)$ -konfiguracja  $\mathfrak{M}$  zawiera co najmniej trzy wolne  $K_5$ -podgrafy: już jest scharakteryzowana w literaturze; jeśli nadto,  $\mathfrak{M}$  wyznaczona przez permutację  $\sigma$  w  $\mathcal{S}_{I_4}$ :  $\text{Fix}(\sigma) \neq \emptyset$ . Krok ten polega więc na *identyfikacji* perspektyw o  $\text{Fix}(\sigma) \neq \emptyset$  wśród konfiguracji i klasyfikacji tych o  $\text{Fix}(\sigma) = \emptyset$ . Te wyznaczone przez  $\varkappa\bar{\sigma}$  nie zawierają trzeciego  $K_5$  (por. 0.5).

Auxiliary (look at 0.3 and 0.4):

- — classification of automorphisms of Pasch configurations determined by permutations of indices
- — star-triangles in Pasch configurations defined on  $\mathcal{P}_2(I_4)$

# Wynik dla $(15_4 20_3)$ -perspektyw o skosie wyznaczonym przez permutację indeksów

## Twierdzenie 0.8

Niech  $\mathfrak{M} = \mathbf{\Pi}(p, \sigma, \mathfrak{N})$ , gdzie  $\sigma \in \mathcal{S}_{l_4}$  i  $\mathfrak{N}$  jest konfiguracją Veblena na  $\mathcal{P}_2(l_4)$ . Wówczas  $\mathfrak{M}$  jest izomorficzna z dokładnie jedną z poniższych  $\mathfrak{M}_0 = \mathbf{\Pi}(p, \sigma_0, \mathfrak{V})$  (typy nie znalezione w literaturze zaznaczone są następującym kolorem).

- $\mathfrak{V} = \mathbf{G}_2(l_4)$ : (i;  $C(\sigma) = (1, 1, 1, 1)$ ),  $\sigma_0 = \text{id}$ ) –  $\mathfrak{M}_0 = \mathbf{G}_2(6)$ ,  
to a uogólniona konfiguracja Desarguesa  
(inaczej: konfiguracja Cayley-Simsona).
- (ii;  $C(\sigma) = (2, 2)$ ,  $\sigma_0 = (1, 2)(3, 4)$ ) –  $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{K}_4$   
to quasi grassmannian z [3],
- (iii;  $C(\sigma) = (1, 3)$ ,  $\sigma_0 = (1)(2, 3, 4)$ ) –  $\mathfrak{M}_0$  ma typ  
2.8(ii) z [4],

- (iv;  $C(\sigma) = (1, 1, 2)$ ,  $\sigma_0 = \text{id}$ ) –  $\mathfrak{M}_0$  ma typ 2.10(iii) z [4], ponadto,  
 $\mathfrak{M}_0 \cong \mathbb{W}_{l_4}^P \triangleright_{L_4} \mathbf{G}_2(l_4)$ , (to *multiveblen*) i  
 $\mathfrak{M}_0 \cong \mathbf{\Pi}(n, \text{id}, \mathbf{B}(2))$  (tu,  $\mathbf{B}(2)$  ma proste  $\mathbf{T}(2)$  and  $\mathbf{T}(3)$ ),  
 (v;  $C(\sigma) = (4)$ ,  $\sigma_0 = (1, 2, 3, 4)$ )

- $\mathfrak{Y} = \mathbf{G}_2^*(l_4)$ : (vi;  $C(\sigma) = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\sigma_0 = \text{id}$ )  
 (vii;  $C(\sigma) = (2, 2)$ ,  $\sigma = (1, 2)(3, 4)$ )  
 (viii;  $C(\sigma) = (1, 3)$ ,  $\sigma = (1)(2, 3, 4)$ )  
 (ix;  $C(\sigma) = (1, 1, 2)$ ,  $\sigma = (1)(2)(3, 4)$ )  
 (x;  $C(\sigma) = (4)$ ,  $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ )

- $\mathfrak{Y} = \mathbf{B}(2)$ :  $1, 2 \notin \text{Fix}(\sigma)$   
 (xi;  $C(\sigma) = (2, 2)$ ,  $\sigma_0 = (1, 2)(3, 4)$ )  
 (xii;  $C(\sigma) = (2, 2)$ ,  $\sigma_0 = (1, 3)(2, 4)$ )  
 (xiii;  $C(\sigma) = (1, 3)$ ,  $\sigma_0 = (3)(1, 2, 4)$ )  
 (xiv;  $C(\sigma) = (4)$ ,  $\sigma_0 = (1, 2, 3, 4)$ )  
 (xv;  $C(\sigma) = (4)$ ,  $\sigma_0 = (1, 3, 2, 4)$ )

(xvi;  $C(\sigma) = \frac{1, 2 \in \text{Fix}(\sigma)}{(1, 1, 2), \sigma_0 = (1)(2)(3, 4)}$  –  $\mathfrak{M}_0$   
 $\cong \mathbb{W}_{I_4}^P \triangleright_{N_4} \mathbf{G}_2(I_4)$ , ma typ 2.10(ii) z [4].  
 –  $\sigma_0 = id$ : struktura zdefiniowana w  
 (iv).  
 $1 \in \text{Fix}(\sigma), 2 \notin \text{Fix}(\sigma)$

(xvii;  $\sigma_0 = (1)(2, 3, 4)$ ) –  $\mathfrak{M}_0$  ma typ 2.8(xii) z [4].

(xviii;  $\sigma_0 = (1)(4)(2, 3)$ ) –  $\mathfrak{M}_0$  ma typ 2.8(xi) z  
 [4].

$\mathfrak{B} = \mathcal{V}_4$ : (xix;  $C(\sigma) = (1, 1, 1, 1), \sigma_0 = id$ )  
 (xx;  $C(\sigma) = (2, 2), \sigma_0 = (1, 2)(3, 4)$ )  
 (xxi;  $C(\sigma) = (2, 2), \sigma_0 = (1, 3)(2, 4)$ )  
 (xxii;  $C(\sigma) = (1, 3), \sigma_0 = (1)(2, 3, 4)$ )  
 (xxiii;  $C(\sigma) = (1, 3), \sigma_0 = (4)(1, 2, 3)$ )  
 (xxiv;  $C(\sigma) = (1, 1, 2), \sigma_0 = (1)(2)(3, 4)$ )  
 (xxv;  $C(\sigma) = (1, 1, 2), \sigma_0 = (1, 2)(3)(4)$ )  
 (xxvi;  $C(\sigma) = (1, 1, 2), \sigma_0 = (1)(2, 3)(4)$ )  
 (xxvii;  $C(\sigma) = (4), \sigma_0 = (1, 2, 3, 4)$ )  
 (xxviii;  $C(\sigma) = (4), \sigma_0 = (1, 3, 2, 4)$ )



$\mathfrak{B} = \mathcal{V}_5$ :

$3 \in \text{Fix}(\sigma)$

(xxix;  $C(\sigma) = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\sigma_0 = \text{id}$ ) –  $\mathfrak{M}_0$  ma typ 2.8(v) z [4].

(xxx;  $C(\sigma) = (1, 3)$ ,  $\sigma = (3)(1, 2, 4)$ ) –  $\mathfrak{M}_0$  ma typ 2.8(i) z [4].

(xxxi;  $C(\sigma) = (1, 1, 2)$ ,  $\sigma = (3)(1)(2, 4)$ ) –  $\mathfrak{M}_0$  ma typ 2.8(xiv) z [4].

$3 \notin \text{Fix}(\sigma)$

(xxxii;  $C(\sigma) = (2, 2)$ ,  $\sigma = (1, 2)(3, 4)$ )

(xxxiii;  $C(\sigma) = (1, 3)$ ,  $\sigma = (1)(2, 3, 4)$ )

(xxxiv;  $C(\sigma) = (1, 1, 2)$ ,  $\sigma = (1)(2)(3, 4)$ )

(xxxv;  $C(\sigma) = (4)$ ,  $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ )

$\mathfrak{B} = \mathcal{V}_6$ :

(xxxvi;  $C(\sigma) = (1, 1, 1, 1)$ ,  $\sigma_0 = \text{id}$ )

(xxxvii;  $C(\sigma) = (2, 2)$ ,  $\sigma_0 = (1, 2)(3, 4)$ )

(xxxviii;  $C(\sigma) = (1, 3)$ ,  $\sigma_0 = (1)(2, 3, 4)$ )

(xxxix;  $C(\sigma) = (1, 3)$ ,  $\sigma_0 = (3)(1, 2, 4)$ )

(xli;  $C(\sigma) = (1, 1, 2)$ ,  $\sigma_0 = (1)(3)(2, 4)$ )

(xlii;  $C(\sigma) = (1, 1, 2)$ ,  $\sigma_0 = (1)(2)(3, 4)$ )

(xliv;  $C(\sigma) = (4)$ ,  $\sigma_0 = (1, 2, 3, 4)$ )

# Wynik dla $(15_4 20_3)$ -perspektyw o skosie wyznaczonym przez dopełnienie boolowskie

## Twierdzenie 0.9

Niech  $\mathfrak{M} = \Pi(p, \overline{\varphi}\varkappa, \mathfrak{N})$ , gdzie  $\mathfrak{N}$  jest konfiguracją Veblena na  $\wp_2(I_4)$ . Wówczas  $\mathfrak{M}$  jest izomorficzna z (dokładnie jedną) z poniższych.

$$(1) \quad \Pi(4, \varkappa, \mathbf{G}_2(I_4)), \quad \Pi(4, \overline{(1, 2), (3, 4)}\varkappa, \mathbf{G}_2(I_4)), \\ \Pi(4, \overline{(1), (2), (3, 4)}\varkappa, \mathbf{G}_2(I_4)), \quad \Pi(4, \overline{(1), (2, 3, 4)}\varkappa, \mathbf{G}_2(I_4)), \\ \Pi(4, \overline{(1, 2, 3, 4)}\varkappa, \mathbf{G}_2(I_4)).$$

$$(2) \quad \Pi(4, \varkappa, \mathbf{B}(2)), \quad \Pi(4, \overline{(1)(2)(3, 4)}\varkappa, \mathbf{B}(2)), \\ \Pi(4, \overline{(1, 2)(3)(4)}\varkappa, \mathbf{B}(2)), \quad \Pi(4, \overline{(1)(2, 3, 4)}\varkappa, \mathbf{B}(2)), \\ \Pi(4, \overline{(4)(1, 2, 3)}\varkappa, \mathbf{B}(2)), \quad \Pi(4, \overline{(1, 2)(3, 4)}\varkappa, \mathbf{B}(2)), \\ \Pi(4, \overline{(1, 4)(2, 3)}\varkappa, \mathbf{B}(2)), \quad \Pi(4, \overline{(1, 2, 3, 4)}\varkappa, \mathbf{B}(2)).$$

$$(3) \quad \Pi(4, \varkappa, \mathcal{V}_5), \quad \Pi(4, \overline{(1)(3)(2, 4)}\varkappa, \mathcal{V}_5), \quad \Pi(4, \overline{(1)(2)(3, 4)}\varkappa, \mathcal{V}_5), \\ \Pi(4, \overline{(1)(2, 3, 4)}\varkappa, \mathcal{V}_5), \quad \Pi(4, \overline{(3)(1, 2, 4)}\varkappa, \mathcal{V}_5), \\ \Pi(4, \overline{(1, 2, 3, 4)}\varkappa, \mathcal{V}_5), \quad \Pi(4, \overline{(1, 2)(3, 4)}\varkappa, \mathcal{V}_5).$$

# Wynik dla $(15_4 20_3)$ -perspektyw o skosie zachowującym adiacencję krawędzi

## Stwierdzenie 0.10

*Niech  $\mathfrak{W}$  będzie konfiguracją Veblena na  $\mathcal{P}_2(I_4)$ , niech  $\sigma \in \mathcal{S}_{I_4}$ . Nie ma  $\sigma' \in \mathcal{S}_{I_4}$  takiego, by  $\Pi(4, \kappa\bar{\sigma}, \mathfrak{W}) \cong \Pi(4, \bar{\sigma}', \mathfrak{W}')$  dla pewnej konfiguracji Veblena  $\mathfrak{W}'$  na  $\mathcal{P}_2(I_4)$ .*

Zatem,

istnieje 62  $(15_4 20_3)$ -perspektyw o skosie zachowującym adiacencję krawędzi.

Warn: still there are (some) perspectives left

# Definicja "uogólnionego veronezowego skosu"

$n$ : ustalona liczba całkowita; definiujemy:

$\zeta = \zeta_n: \wp_2(I_n) \longrightarrow \wp_2(I_n)$  warunkiem

$$\zeta(\{i, j\}) := \{j - i, j\} \quad \text{dla} \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (11)$$

Uwaga:  $i < j$ ,  $u = \{i, j\} \in \wp_2(I_n)$ , i  $\zeta(u) = \{i', j'\}$ ,  $i' < j'$  daje  $j = j'$ .

Oczywiste:  $\zeta = \zeta^{-1}$ .

## Fakt 0.11

$$\mathbf{V}_k(X) \cong \mathbf{\Pi}(k, \zeta, \mathbf{V}_{k-2}(X)).$$

## Details

## Lemat 0.12

*Notacja: jak w 0.4, niech  $\mathfrak{M} = \Pi(n, \zeta_n, \mathfrak{N})$ ,  $n > 3$ . Zbiór  $G_{(n)}$  jest jedynym pełnym  $K_{n+1}$ -grafem wolno zawartym w  $\mathfrak{M}$  różnym od  $A^*$  i  $B^*$  wtw  $S(n)$  jest kliką współliniowości wolno zawartą w  $\mathfrak{N}$ . Gdy  $S(n)$  nie jest taką kliką w  $\mathfrak{N}$ , to  $\mathfrak{M}$  nie zawiera trzeciego pełnego wolnego  $K_{n+1}$ -grafu.*

## Lemat 0.13

Niech  $\mathfrak{M} = \Pi(n, \zeta_n, \mathfrak{N})$  dla pewnej  $\left(\binom{n}{2}_{n-2} \binom{n}{3}_3\right)$ -konfiguracji  $\mathfrak{N}$ .  
Niech  $n > 3$  i  $k \in I_n$ ,  $k > 3$ . Następujące warunki są równoważne:

(i) formuła

$$\forall i \neq k \exists j \neq k \overline{a_k, a_i} \text{ przecina } \overline{b_k, b_j}$$

zachodzi w  $\mathfrak{M}$ ;

(ii)  $n = k$ .

## Lemat 0.14

Niech  $\mathfrak{N}$  będzie  $\left(\binom{n}{2}_{n-2} \binom{n}{3}_3\right)$ -konfiguracją na  $\mathcal{P}_2(I_n)$ . Oczywiście,  $\zeta$ -obraz  $\zeta(\mathfrak{N})$  struktury  $\mathfrak{N}$  jest  $\left(\binom{n}{2}_{n-2} \binom{n}{3}_3\right)$ -konfiguracją. Wówczas (inwolucyjne) przekształcenie

$$\mathcal{S}: \begin{cases} a_i & b_j & c_u \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_i & a_j & c_{\zeta(u)} \end{cases} \quad \text{for all } i, j \in I_n, \quad u \in \mathcal{P}_2(I_n) \quad (12)$$

jest izomorfizmem  $\Pi(n, \zeta, \mathfrak{N})$  na  $\Pi(n, \zeta, \zeta(\mathfrak{N}))$ .  $\mathcal{S}$  przekształca  $S(n)$  na  $S(n)$ .



## Stwierdzenie 0.15

Niech  $\varphi \in \mathcal{S}_{I_4}$ ,  $\mathfrak{V}$  będzie jednym z etykietowań konfiguracji Veblena,  $\mathfrak{M} = \Pi(4, \zeta, \varphi(\mathfrak{V}))$ . Wtedy:

$\mathfrak{V} = \mathbf{G}_2(I_4)$ :  $\mathfrak{M}$  zawiera dokładnie trzy wolne  $K_5$ .

$\mathfrak{V} = \mathbf{G}_2^*(I_4)$ ,  $\mathcal{V}_4$ ,  $\mathcal{V}_6$ :  $\mathfrak{M}$  zawiera dwa wolne  $K_5$ .

$\mathfrak{V} = \mathbf{B}(2)$   $4 \in \{\varphi(4), \varphi(3)\}$ :  $\mathfrak{M}$  zawiera trzy wolne  $K_5$ ;

$4 \notin \{\varphi(4), \varphi(3)\}$ :  $\mathfrak{M}$  zawiera dwa wolne  $K_5$ ;

$\mathfrak{V} = \mathcal{V}_5$   $\varphi(4) = 4$ :  $\mathfrak{M}$  zawiera trzy wolne  $K_5$ ;

$\varphi(4) \neq 4$ :  $\mathfrak{M}$  zawiera dwa wolne  $K_5$ .

**Warn!:** z uwagi na 0.14 dla każdego  $\varphi$  trzeba wyznaczyć  $\zeta(\varphi(\mathfrak{V}))$ .  
Praktycznie, musimy wyznaczyć wszystkie etykietowania konfiguracji Veblena elementami zbioru  $\mathcal{P}_2(I_4)$ .

Przypuśćmy:  $\mathfrak{W}$  zawiera  $S(i_0)$  jako trójkąt, wtedy  $T(i_0)$  jest w nim prostą. Numerujemy boki  $S(i_0)$  i punkty w  $T(i_0)$ :

$$\overline{c_{i,4}, c_{j,4}} \sim k \text{ i } c_{i,j} \sim k \text{ wtw } \{i, j, k\} = I_4 \setminus \{i_0\}.$$

$\mathfrak{W}$  wyznaczone przez  $\mu \in \mathcal{S}_{I_4 \setminus \{i_0\}}$  w/g reguły:

$$k \sim \overline{c_{i,i_0}, c_{j,i_0}} \text{ daje } c_{i,i_0} \oplus c_{j,i_0} = c_{i',j'} \sim \mu(k). \quad (13)$$

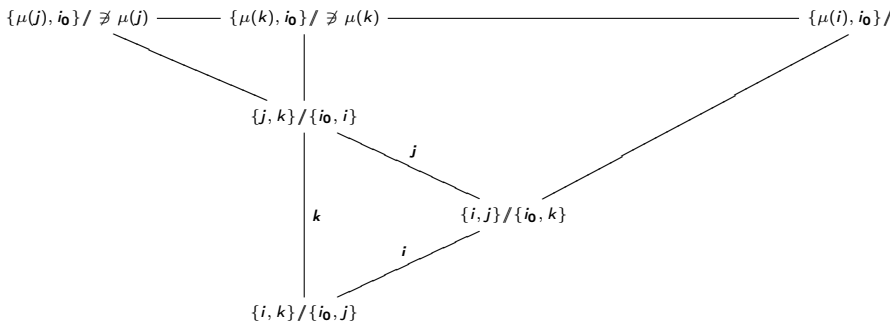
Przypuśćmy:  $\mathfrak{W}$  zawiera  $T(i_0)$  jako trójkąt, wtedy  $S(i_0)$  jest prostą. Analogicznie numerujemy boki  $T(i_0)$  i punkty na  $S(i_0)$ :

$$\overline{c_{i,k}, c_{j,k}} \sim k \text{ i } c_{k,i_0} \sim k \text{ wtw } \{i, j, k\} = I_4 \setminus \{i_0\}.$$

$\mathfrak{W}$  wyznaczone jest przez  $\mu \in \mathcal{S}_{I_4 \setminus \{i_0\}}$  zgodnie z regułą:

$$k \sim \overline{c_{i,k}, c_{j,k}} \text{ implikuje } c_{i,k} \oplus c_{j,k} = c_{i',j'} \sim \mu(k). \quad (14)$$

Niech  $\mu \in \mathcal{S}_{I_4 \setminus \{i_0\}}$ ; piszemy:  $\mathcal{V}_5(\mu)$  – to konfiguracja Veblena zdefiniowana przez (13); zawiera ona  $T(i_0)$  jako prostą, oraz  $\mathcal{V}_6(\mu)$  – to konfiguracja Veblena zdefiniowana przez (14); zawiera ona  $S(i_0)$  jako prostą.



$\mu(i_0) = i_0$ .  $I_4 = \{i, j, k, i_0\}$ . Wyjściowa struktura  $\mathcal{V}_6(\mu)$  ma prostą  $S(i_0)$  i trójkąt  $T(i_0)$ . Konwencja:

value-of- $u$ /value-property-of- $\mathcal{V}(u)$  gdzie  $u \in \mathcal{P}_2(I_4)$ , ○

Każda konfiguracja Veblena ma postać  $\mathcal{V}_5(\mu)$  albo  $\mathcal{V}_6(\mu)$  dla pewnej  $\mu \in \mathcal{S}_{I_4 \setminus \{i_0\}}$ ,  $i_0 \in I_4$ .

$\mathfrak{V} = \mathcal{V}_s(\mu)$  ( $\mu \in \mathcal{S}_{I_4 \setminus \{i_0\}}$ ) zawiera inny star-triangle  $S(i'_0)$  ( $s = 5$ ) albo inny top-triangle  $T(i'_0)$  ( $s = 6$ ) wtw  $\mu(i'_0) = i'_0$ . Inaczej: wtw,  $\mu = (i'_0)(j_1, j_2)$ . Wtedy też  $\mathfrak{V} = \mathcal{V}_s((i_0)(j_1, j_2))$ . Zatem, każda konfiguracja Veblena  $\mathfrak{V}$  jednoznacznie odpowiada permutacji  $\mu \in \mathcal{S}_4$  o co najmniej jednym punkcie stałym (not a derangement of  $I_4$ ) i "przełącznikowi"  $s \in \{5, 6\}$  takim, że  $\mathfrak{V} = \mathcal{V}_s(\mu)$ .

### Fakt 0.16

*Dla każdego  $s \in \{5, 6\}$  i  $\mu \in \mathcal{S}_4$  takiego, że  $\text{Fix}(\mu) \neq \emptyset$  mamy*

$$\kappa(\mathcal{V}_s(\mu)) = \mathcal{V}_{11-s}(\mu).$$

## Stwierdzenie 0.17

Niech  $\mathfrak{M} = \mathbf{\Pi}(4, \zeta, \mathfrak{V})$ , gdzie  $\mathfrak{V}$  to konfiguracja Veblena na  $\mathcal{P}_2(I_4)$ .  
Wtedy mamy jedno z następujących:

$S(4)$  nie jest trójkątem w  $\mathfrak{V}$ : Wówczas  $\mathfrak{M}$  to jedno z ....

(i)

(ii)

$\mathfrak{V}$  zawiera trójkąt  $S(4)$ : Wtedy  $\mathfrak{V} = \mathcal{V}_5(\mu)$ ,  $\mu$  jest jedną z poniższych, zaś  $\mathfrak{M}$  jest jedną z wyliczonych w [4]:

(iii;  $\mu = \text{id}$ )  $\mathfrak{M}$  ma typ (viii),  $= (\sigma_x, \rho, \text{id})$  w [4,  
Classification 2.8]





(iv;  $\mu = (1)(2, 3)$ )  $\mathfrak{M}$  ma typ (vi),  $= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$   
w [4, Classification 2.8]

(v;  $\mu = (2)(1, 3)$ )  $\mathfrak{M}$  ma typ (xi),  $= (\sigma_x, \sigma_x, \sigma_z)$  w  
[4, Classification 2.8]

(vi;  $\mu = (1, 2, 3)$ )  $\mathfrak{M}$  ma typ (xiii),  $=$   
 $(\sigma_x, \rho^{-1}, \rho) \cong (\rho, \rho, \sigma_x)$  w [4,  
Classification 2.8]

Warn: still there are (some) perspectives left ...

# Bibliography: where that 'older' configurations have appeared:

-  M. Prażmowska, K. Prażmowski, *Binomial partial Steiner triple systems containing complete graphs*, Graphs Combin. **32**(2016), no. 5, 2079–2092.
-  K. Petelczyc, M. Prażmowska,  *$10_3$ -configurations and projective realizability of multiplied configurations*, Des. Codes Cryptogr. **51**, no. 1 (2009), 45–54.
-  M. Prażmowska, *On some regular multi-Veblen configurations, the geometry of combinatorial quasi Grassmannians*, Demonstratio Math. **42**(2009), no.1 2, 387–402.
-  K. Petelczyc, M. Prażmowska, *A complete classification of the  $(15_4 20_3)$ -configurations with at least three  $K_5$ -graphs*, Discrete Math. **338** (2016), no 7, 1243–1251.

(tymczasem) to już dość  
Dziękuję za uwagę, przepraszam, za nudzenie...



Dowód of 0.3. Write  $\mathfrak{M}_l = \mathbf{\Pi}(n, \sigma_l, \mathfrak{N}_l)$  for  $l = 1, 2$ .

Assume (i). Since exactly two free  $K_{n+1}$  subgraphs of  $\mathfrak{M}_l$  ( $l = 1, 2$ ) pass through  $p$  (cf. [1, Prop.'s 2.6, 2.7]), one of the following holds

(a)  $f(A) = A$  and  $f(B) = B$ , or

(b)  $f(A) = B$  and  $f(B) = A$ .

Assume, first, (a). Consequently, there is a permutation  $\varphi \in \mathcal{S}_l$  such that  $f(a_i) = a_{\varphi(i)}$  for each  $i \in I$ . This yields

$f(b_i) = f(p) \oplus f(a_i) = b_{\varphi(i)}$ , and, finally

$f(c_{i,j}) = f(a_i \oplus a_j) = \dots = c_{\varphi(i), \varphi(j)}$ . This justifies (3). Since  $f$  preserves the lines of  $\mathfrak{N}$ , from (3) we infer (2). Finally, the equation

$c_{\overline{\varphi}(\sigma_1^{-1}(\{i,j\}))} = f(c_{\sigma_1^{-1}(\{i,j\})}) = f(b_i \oplus b_j) = f(b_i) \oplus f(b_j) =$

$b_{\varphi(i)} \oplus b_{\varphi(j)} = c_{\sigma_2^{-1}(\{\varphi(i), \varphi(j)\})}$  justifies (4).

In case (b) the reasoning goes analogously.

Conversely, if (ii) is assumed we directly verify that

$f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$  holds for all  $x, y \in (A \cup B)$ , which proves

(i). [back to 0.3](#)



Dowód of 0.4. Assume that  $G \neq K_{A^*}, K_{B^*}$  is a complete  $K_{n+1}$ -graph freely contained in  $\Pi(n, \sigma, \mathfrak{N}) =: \mathfrak{M}$ . Then  $p$ ,  $G \cap A$ , and  $G \cap B$  form a triple of collinear points (cf. [1, Prop. 2.7]). So, there is  $i_0 \in I$  such that  $a_{i_0}, b_{i_0} \in G$ . And  $G \setminus \{a_{i_0}, b_{i_0}\} \subset C$ . The set of points in  $C$  which are collinear with  $a_{i_0}$  is exactly  $S(i_0)$ ; it contains  $G$  and its cardinality is  $n - 1$ , and therefore  $G = G_{i_0}$ . Since  $G$  is a clique, we conclude with:  $S(i_0)$  is a clique in  $\mathfrak{N}$ . Clearly, it is freely contained in  $\mathfrak{N}$ .

On the other hand,  $b_{i_0}$  must be collinear with each point in  $S(i_0)$ . In other words, for each  $j \in I \setminus \{i_0\}$  there is  $j'$  such that  $a_{i_0} \oplus a_j = c_{i_0, j} = b_{\sigma(i_0)} \oplus b_{\sigma(j)} = b_{i_0} \oplus b_{j'}$ . From this we infer  $\{\sigma(i_0), \sigma(j)\} = \{i_0, j'\}$ , and thus  $\sigma(i_0) = i_0$ . So, from (i) we have arrived to (ii).

It is a trivial task to prove that under assumptions (ii) the set defined by (8) is a required  $K_{n+1}$ -graph, which proves (i). [Back to](#)

0.4



Dowód of 0.5. Suppose that  $G \neq K_{A^*}, K_{B^*}$  is a complete  $K_5$  graph freely contained in  $\Pi(4, \bar{\sigma}\mathcal{K}, \mathfrak{N})$ . Arguing as in the proof of 0.4 we find  $i_0 \in I_4$  such that  $a_{i_0} \in A, G, b_{i_0} \in B, G$ . Then

$G \setminus \{a_{i_0}, b_{i_0}\} \subset S(i_0) \subset C$ . So,  $c_{i_0, x}, b_{i_0}$  must colline for every  $x \in I_4 \setminus \{i_0\} =: I'$ ; this means: for every  $x \in I'$  there is  $x' \in I$  such that  $c_{i_0, x} = b_{i_0} \oplus b_{x'} = c_{x\sigma^{-1}(\{i_0, x'\})}$ . Write  $I_4 = \{i_0, j, k, l\}$ . Then we obtain

$$\{\sigma^{-1}(i_0), \sigma^{-1}(j')\} = \{k, l\}, \{\sigma^{-1}(i_0), \sigma^{-1}(l')\} = \{k, j\}, \text{ and} \\ \{\sigma^{-1}(i_0), \sigma^{-1}(k')\} = \{j, l\}.$$

Consequently, there is no room for  $\sigma^{-1}(i_0)$ . [Back to 0.5](#) □

## Lemat 0.18

Let  $\mathfrak{X}$  be a one of (9)&(10). The following  $\beta$ 's are representatives of the equivalence classes of  $\sim_{\text{Aut}(\mathfrak{X})}$  in the group  $S_{I_4}$ .

$\mathfrak{X} = \mathbf{G}_2(I_4)$  or  $\mathfrak{X} = \mathbf{G}_2^*(I_4)$ :  $\beta =$   
 $\text{id}, (1)(2, 3, 4), (1, 2)(3, 4), (1)(2)(3, 4), (1, 2, 3, 4).$

$\mathfrak{X} = \mathbf{B}(2)$  or  $\mathfrak{X} = \mathcal{V}_4$ :  $C(\beta) = (1, 1, 1, 1)$ , then  $\beta = \text{id}$ ;

$C(\beta) = (1, 1, 2)$ , then  $\beta =$   
 $(1)(2)(3, 4), (1, 2)(3)(4), (1)(2, 3)(4);$

$C(\beta) = (1, 3)$ , then  $\beta = (1)(2, 3, 4), (4)(1, 2, 3);$

$C(\beta) = (2, 2)$ , then  $\beta = (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3);$

$C(\beta) = (4)$ , then  $\beta = (1, 2, 3, 4), (1, 3, 2, 4).$

$\mathfrak{X} = \mathcal{V}_5$  or  $\mathfrak{X} = \mathcal{V}_6$ :  $C(\beta) = (1, 1, 1, 1)$ , then  $\beta = \text{id}$ ;

$C(\beta) = (1, 1, 2)$ , then  
 $\beta = (1)(3)(2, 4), (1)(2)(3, 4);$

$C(\beta) = (1, 3)$ , then  $\beta = (1)(2, 3, 4), (3)(1, 2, 4);$

$C(\beta) = (2, 2)$ , then  $\beta = (1, 2)(3, 4);$

$C(\beta) = (4)$ , then  $\beta = (1, 2, 3, 4).$  *Back to the*

*classification of configurations*

## Lemat 0.19

*The following are the star-triangles in corresponding Veblen configuration  $\mathfrak{V}$ .*

$\mathfrak{V} = \mathbf{G}_2(l_4)$ :  $S(i)$ ,  $i \in l_4$ ; 4 triangles.

$\mathfrak{V} = \mathbf{B}(2)$ :  $S(1)$ ,  $S(2)$ ; 2 triangles.

$\mathfrak{V} = \mathcal{V}_5$ :  $S(3)$ ; a unique star-triangle.

$\mathfrak{V} = \mathbf{G}_2^*(l_4), \mathcal{V}_4, \mathcal{V}_6$ : no  $i \in l_4$  such that  $S(i)$  is a triangle in  $\mathfrak{V}$ .

Back to the classification of configurations

Let us adopt the notation of [?]. Let  $|X| = 3$ ,  $X = \{a, b, c\}$ . Then the combinatorial Veronesian  $\mathbf{V}_k(X) =: \mathfrak{M}$  is a  $\left(\binom{k+2}{2}_k \binom{k+2}{3}_3\right)$ -configuration; its point set is the set  $\eta_k(X)$  of the  $k$ -element multisets with elements in  $X$  and the lines have form  $eX^s$ ,  $e \in \eta_{k-s}(X)$ .  $\mathbf{V}_1(X)$  is a single line,  $\mathbf{V}_2(X)$  is the Veblen configuration, and  $\mathbf{V}_3(X)$  is the known Kantor configuration (comp. [?, Prop's. 2.2, 2.3], [2, Repr. 2.7]). Consequently, we assume  $k > 3$ . The following was noted in [1, Fct. 4.1]:

The  $K_{k+1}$  graphs freely contained in  $\mathbf{V}_k(X)$  are the sets  $X_{a,b} := \eta_k(\{a, b\})$ ,  $X_{b,c} := \eta_k(\{b, c\})$ , and  $X_{c,a} := \eta_k(\{c, a\})$ .

In particular,  $\mathfrak{M}$  freely contains two complete subgraphs  $X_{a,b}$ ,  $X_{c,a}$ , which cross each other in  $p = a^k$ . [Back to definition](#) We shall present  $\mathfrak{M}$  as a perspective between these two graphs.

Let us adopt the notation of [?]. Let  $|X| = 3$ ,  $X = \{a, b, c\}$ . Then the combinatorial Veronesian  $\mathbf{V}_k(X) =: \mathfrak{M}$  is a  $\left(\binom{k+2}{2}_k \binom{k+2}{3}_3\right)$ -configuration; its point set is the set  $\eta_k(X)$  of the  $k$ -element multisets with elements in  $X$  and the lines have form  $eX^s$ ,  $e \in \eta_{k-s}(X)$ .  $\mathbf{V}_1(X)$  is a single line,  $\mathbf{V}_2(X)$  is the Veblen configuration, and  $\mathbf{V}_3(X)$  is the known Kantor configuration (comp. [?, Prop's. 2.2, 2.3], [2, Repr. 2.7]). Consequently, we assume  $k > 3$ . The following was noted in [1, Fct. 4.1]:

The  $K_{k+1}$  graphs freely contained in  $\mathbf{V}_k(X)$  are the sets  $X_{a,b} := \eta_k(\{a, b\})$ ,  $X_{b,c} := \eta_k(\{b, c\})$ , and  $X_{c,a} := \eta_k(\{c, a\})$ .

In particular,  $\mathfrak{M}$  freely contains two complete subgraphs  $X_{a,b}$ ,  $X_{c,a}$ , which cross each other in  $p = a^k$ . [Back to definition](#) We shall present  $\mathfrak{M}$  as a perspective between these two graphs.

Let us re-label the points of  $\mathbf{V}_k(X)$ :

$$c_i = \mathfrak{b}^i \mathfrak{a}^{k-i}, \quad b_i = \mathfrak{c}^i \mathfrak{a}^{k-i}, \quad i \in \{1, \dots, k\} =: I, \quad e_{i,j} = c_i \oplus c_j, \\ \{i, j\} \in \wp_2(I).$$

Assume that  $i < j$ , then  $\overline{c_i, c_j} = \mathfrak{a}^{k-j} \mathfrak{b}^i \mathfrak{X}^{j-i}$ , so  $e_{i,j} = \mathfrak{a}^{k-j} \mathfrak{b}^i \mathfrak{c}^{j-i}$ .

Clearly,  $p \oplus c_i = b_i$  so, the map  $(c_i \mapsto b_i, i \in I)$  is a point-perspective. Let us define the permutation  $\zeta$  of  $\wp_2(I)$  by the formula

$$\zeta(\{i, j\}) = \{j - i, j\} \text{ when } 1 \leq i < j \leq k.$$

It is seen that  $\zeta = \zeta^{-1}$ . After routine computation we obtain  $b_i \oplus b_j = e_{\zeta(\{i, j\})}$  whenever  $i < j$ ; moreover, in this representation the axial configuration consists of the points in  $\text{bct}_{k-2}(X)$  so, it is isomorphic to  $\mathbf{V}_{k-2}(X)$ . Consequently, ○

[Back to definition](#)