Automorfizmy płaskich rozmaitości Kählera

Marek Hałenda
(wspólnie z R. Lutowskim i A. Szczepańskim)

Uniwersytet Gdański

XII PSG, Lublin, 18.06.2018

Rozmaitości płaskie

Rozmaitość płaska: zwarta rozmaitość riemannowska M o zerowej krzywiźnie.

Rozmaitości płaskie

Rozmaitość płaska: zwarta rozmaitość riemannowska M o zerowej krzywiźnie. M jest przestrzenią ilorazową $\mathbb{R}^n/\Gamma$ gdzie Γ jest grupą Bieberbacha.

Rozmaitości płaskie

Rozmaitość płaska: zwarta rozmaitość riemannowska M o zerowej krzywiźnie. M jest przestrzenią ilorazową $\mathbb{R}^n/\Gamma$ gdzie Γ jest grupą Bieberbacha.

Grupa Bieberbacha: beztorsyjna grupa krystalograficzna.

Rozmaitości płaskie

Rozmaitość płaska: zwarta rozmaitość riemannowska M o zerowej krzywiźnie. M jest przestrzenią ilorazową $\mathbb{R}^n/\Gamma$ gdzie Γ jest grupą Bieberbacha.

Grupa Bieberbacha: beztorsyjna grupa krystalograficzna.

Grupa krystalograficzna: kozwarta i dyskretna podgrupa grupy izometrii $E(n) = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$.

Twierdzenia Bieberbacha

Twierdzenie (Bieberbach, 1910-12)

Niech $\Gamma \subset E(n)$ *będzie grupą krystalograficzną.*

Twierdzenia Bieberbacha

Twierdzenie (Bieberbach, 1910-12)

Niech $\Gamma \subset E(n)$ *będzie grupą krystalograficzną.*

1. *Podgrupa translacji* $\Lambda \subset \Gamma$ *jest wolną grupą abelową rangi* n *skończonego indeksu.* Λ *jest normalną maksymalną podgrupą abelową.*

Twierdzenia Bieberbacha

Twierdzenie (Bieberbach, 1910-12)

Niech $\Gamma \subset E(n)$ będzie grupą krystalograficzną.

1. *Podgrupa translacji $\Lambda \subset \Gamma$ jest wolną grupą abelową rangi n skończonego indeksu. Λ jest normalną maksymalną podgrupą abelową.*
2. *Dwie grupy krystalograficzne są izomorficzne $\iff$ są sprzężone w $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$.*

Twierdzenia Bieberbacha

Twierdzenie (Bieberbach, 1910-12)

Niech $\Gamma \subset E(n)$ będzie grupą krystalograficzną.

1. *Podgrupa translacji $\Lambda \subset \Gamma$ jest wolną grupą abelową rangi n skończonego indeksu. Λ jest normalną maksymalną podgrupą abelową.*
2. *Dwie grupy krystalograficzne są izomorficzne $\iff$ są sprzężone w $GL_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$.*
3. *W każdym wymiarze n istnieje skończenie wiele klas izomorfizmu grup krystalograficznych.*

Twierdzenia Bieberbacha

Wniosek

Niech M będzie płaską rozmaitością.

Twierdzenia Bieberbacha

Wniosek

Niech M będzie płaską rozmaitością.

1. *M jest izometryczna z ilorazem płaskiego torusa T przez działającą bez punktów stałych skończoną grupę G.*

Twierdzenia Bieberbacha

Wniosek

Niech M będzie płaską rozmaitością.

1. *M jest izometryczna z ilorazem płaskiego torusa T przez działającą bez punktów stałych skończoną grupę G.*
2. *Dwie płaskie rozmaitości są afinicznie równoważne (w szczególności dyfeomorficzne) $\iff$ mają izomorficzne grupy podstawowe.*

Twierdzenia Bieberbacha

Wniosek

Niech M będzie płaską rozmaitością.

1. *M jest izometryczna z ilorazem płaskiego torusa T przez działającą bez punktów stałych skończoną grupę G.*
2. *Dwie płaskie rozmaitości są afinicznie równoważne (w szczególności dyfeomorficzne) $\iff$ mają izomorficzne grupy podstawowe.*
3. *W każdym wymiarze n istnieje skończenie wiele klas dyfeomorfizmu rozmaitości płaskich.*

Grupa holonomii

Grupa holonomii grupy krystalograficznej: skończona grupa ilorazowa $G = \Gamma/\Lambda$.

Grupa holonomii

Grupa holonomii grupy krystalograficznej: skończona grupa ilorazowa $G = \Gamma/\Lambda$.

Grupa holonomii rozmaitości riemannowskiej: przesunięcia równoległe po pętlach.

Grupa holonomii

Grupa holonomii grupy krystalograficznej: skończona grupa ilorazowa $G = \Gamma/\Lambda$.

Grupa holonomii rozmaitości riemannowskiej: przesunięcia równoległe po pętlach.

Dla rozmaitości płaskich powyższe pojęcia pokrywają się.

Grupa holonomii

Grupa holonomii grupy krystalograficznej: skończona grupa ilorazowa $G = \Gamma/\Lambda$.

Grupa holonomii rozmaitości riemannowskiej: przesunięcia równoległe po pętlach.

Dla rozmaitości płaskich powyższe pojęcia pokrywają się.

Reprezentacja holonomii: reprezentacja $\varrho : G \to GL_n(\mathbb{Z})$ stowarzyszona z ciągiem dokładnym

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

określona wzorem $\varrho_g(\lambda) = \bar{g}\lambda\bar{g}^{-1}$ (gdzie $\bar{g}$ jest przeciwobrazem elementu g).

Rozmaitości zespolone

Rozmaitość zespolona: rozmaitość gładka M z atlasem $(U_i, \varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n)$ dla którego funkcje przejścia są holomorficzne.

Rozmaitości zespolone

Rozmaitość zespolona: rozmaitość gładka M z atlasem $(U_i, \varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n)$ dla którego funkcje przejścia są holomorficzne.

Struktura prawie zespolona: endomorfizm wiązki stycznej $J : TM \to TM$ taki, ze $J^2 = -id$.

Rozmaitości zespolone

Rozmaitość zespolona: rozmaitość gładka M z atlasem $(U_i, \varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n)$ dla którego funkcje przejścia są holomorficzne.

Struktura prawie zespolona: endomorfizm wiązki stycznej $J : TM \to TM$ taki, ze $J^2 = -id$.

Twierdzenie (Newlander, Nirenberg, 1957)

Rozmaitość M jest zespolona $\iff$ M posiada całkowalną strukturę prawie zespoloną J.

Rozmaitości Kählera

Rozmaitość Kählera: rozmaitość (M, J, g) gdzie:

- (M, J) jest rozmaitością zespoloną,

Rozmaitości Kählera

Rozmaitość Kählera: rozmaitość (M, J, g) gdzie:

- (M, J) jest rozmaitością zespoloną,
- g jest metryką hermitowską, tj. $g(JX, JY) = g(X, Y)$,

Rozmaitości Kählera

Rozmaitość Kählera: rozmaitość (M, J, g) gdzie:

- (M, J) jest rozmaitością zespoloną,
- g jest metryką hermitowską, tj. $g(JX, JY) = g(X, Y)$,
- $\omega \in H^2(M, \mathbb{C})$ zdefiniowana wzorem $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ jest formą zamkniętą.

Rozmaitości Kählera

Rozmaitość Kählera: rozmaitość (M, J, g) gdzie:

- (M, J) jest rozmaitością zespoloną,
- g jest metryką hermitowską, tj. $g(JX, JY) = g(X, Y)$,
- $\omega \in H^2(M, \mathbb{C})$ zdefiniowana wzorem $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ jest formą zamkniętą.

M jest rozmaitością Kählera $\iff Hol(M) \subset U(n)$.

Płaskie rozmaitości Kählera

Twierdzenie (Johnson, Rees, 1991)

Następujące warunki są równoważne:

1. Γ *jest grupą podstawową płaskiej* $n-$*rozmaitości Kählera,*

Płaskie rozmaitości Kählera

Twierdzenie (Johnson, Rees, 1991)

Następujące warunki są równoważne:

1. Γ *jest grupą podstawową płaskiej* $n-$*rozmaitości Kählera,*
2. Γ *jest dyskretną, kozwartą i beztorsyjną podgrupą* $U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$*,*

Płaskie rozmaitości Kählera

Twierdzenie (Johnson, Rees, 1991)

Następujące warunki są równoważne:

1. Γ *jest grupą podstawową płaskiej* $n-$*rozmaitości Kählera,*
2. Γ *jest dyskretną, kozwartą i beztorsyjną podgrupą* $U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$*,*
3. *reprezentacja holonomii* $\rho : G \to GL(2n, \mathbb{Z})$ *jest właściwie zespolona.*

Płaskie rozmaitości Kählera

Twierdzenie (Johnson, Rees, 1991)

Następujące warunki są równoważne:

1. Γ *jest grupą podstawową płaskiej* $n-$*rozmaitości Kählera,*
2. Γ *jest dyskretną, kozwartą i beztorsyjną podgrupą* $U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$*,*
3. *reprezentacja holonomii* $\rho : G \to GL(2n, \mathbb{Z})$ *jest właściwie zespolona.*

Reprezentacja właściwie zespolona: reprezentacja ϱ stopnia $2n$ której obraz jest sprzężony z podgrupą $GL_n(\mathbb{C})$:

$$\exists_P \forall_{g \in G} P \varrho_g P^{-1} \subset GL_n(\mathbb{C}) \subset GL_{2n}(\mathbb{R})$$

Odwzorowania afiniczne

Odwzorowanie afiniczne: odwzorowanie rozmaitości riemannowskich zachowujące koneksję.

Odwzorowania afiniczne

Odwzorowanie afiniczne: odwzorowanie rozmaitości riemannowskich zachowujące koneksję.W przypadku rozmaitości płaskich: odwzorowanie którego podniesienie jest odwzorowaniem afinicznym.

Odwzorowania afiniczne

Odwzorowanie afiniczne: odwzorowanie rozmaitości riemannowskich zachowujące koneksję.W przypadku rozmaitości płaskich: odwzorowanie którego podniesienie jest odwzorowaniem afinicznym.

$$\mathrm{Aff}(M) = \{f : M \to M \mid f \ afiniczne\} \subsetneq Diff(M)$$

Odwzorowania afiniczne

Odwzorowanie afiniczne: odwzorowanie rozmaitości riemannowskich zachowujące koneksję.W przypadku rozmaitości płaskich: odwzorowanie którego podniesienie jest odwzorowaniem afinicznym.

$$\mathrm{Aff}(M) = \{f : M \to M \mid f \ \textit{afiniczne}\} \subsetneq \mathit{Diff}(M)$$

Twierdzenie (Charlap, Vasquez, 1973)

Jeżeli M jest rozmaitością płaską oraz $\Gamma = \pi_1(M)$ to $\mathrm{Aff}(M)/\mathrm{Aff}_0(M) \simeq \mathit{Out}(\Gamma)$.

Odwzorowania afiniczne

Odwzorowanie afiniczne: odwzorowanie rozmaitości riemannowskich zachowujące koneksję.W przypadku rozmaitości płaskich: odwzorowanie którego podniesienie jest odwzorowaniem afinicznym.

$$\mathrm{Aff}(M) = \{f : M \to M \mid f \ \textit{afiniczne}\} \subsetneq \mathit{Diff}(M)$$

Twierdzenie (Charlap, Vasquez, 1973)

Jeżeli M jest rozmaitością płaską oraz $\Gamma = \pi_1(M)$ to $\mathrm{Aff}(M)/\mathrm{Aff}_0(M) \simeq \mathit{Out}(\Gamma)$.

Twierdzenie (Hiss, Szczepański, 1995)

Jeżeli Γ jest grupą Bieberbacha, to $|\mathrm{Out}(\Gamma)| = \infty \iff$ reprezentacja holonomii zawiera nieprzywiedlne nad $\mathbb{Q}$ składniki wielokrotne lub zawiera składnik nieprzywiedlny nad $\mathbb{Q}$ ale przywiedlny nad $\mathbb{R}$.

Diagram podstawowy

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & L/L^G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Inn}(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}^0(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Aut}(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & N_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
0 \arrow[r] & H^1(G,L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Out}(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & N_\alpha/G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Grupy automorfizmów

Automorfizm rozmaitości zespolonej: biholomorficzne odwzorowanie $f : M \to M$.

Grupy automorfizmów

Automorfizm rozmaitości zespolonej: biholomorficzne odwzorowanie $f : M \to M$.Grupę automorfizmów oznaczamy $\mathrm{Aut}(M)$.

Grupy automorfizmów

Automorfizm rozmaitości zespolonej: biholomorficzne odwzorowanie $f : M \to M$.Grupę automorfizmów oznaczamy $\mathrm{Aut}(M)$.

Stwierdzenie

Załóżmy, że $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ jest zespolonym torusem oraz $f \in \mathrm{Aut}(T)$. Wtedy $f(x+\Lambda) = (Ax+b)+\Lambda$, gdzie $A \in GL_n(\mathbb{C})$ t. że $A(\Lambda) = \Lambda$.

Grupy automorfizmów

Automorfizm rozmaitości zespolonej: biholomorficzne odwzorowanie $f : M \to M$.Grupę automorfizmów oznaczamy $\mathrm{Aut}(M)$.

Stwierdzenie

Załóżmy, że $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ jest zespolonym torusem oraz $f \in \mathrm{Aut}(T)$. Wtedy $f(x+\Lambda) = (Ax+b)+\Lambda$, gdzie $A \in GL_n(\mathbb{C})$ t. że $A(\Lambda) = \Lambda$.

$\mathrm{Aut}_0(T)$: grupa biholomorficznych homomorfizmów torusa tj. automorfizmów zachowujących strukturę grupy.

Grupy automorfizmów

Automorfizm rozmaitości zespolonej: biholomorficzne odwzorowanie $f : M \to M$.Grupę automorfizmów oznaczamy $\mathrm{Aut}(M)$.

Stwierdzenie

Załóżmy, że $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ jest zespolonym torusem oraz $f \in \mathrm{Aut}(T)$. Wtedy $f(x+\Lambda) = (Ax+b)+\Lambda$, gdzie $A \in GL_n(\mathbb{C})$ t. że $A(\Lambda) = \Lambda$.

$\mathrm{Aut}_0(T)$: grupa biholomorficznych homomorfizmów torusa tj. automorfizmów zachowujących strukturę grupy.

Wniosek: jeżeli M jest rozmaitością płaską, to $\mathrm{Aut}(M) = \{f \in \mathrm{Aff}(M) \mid df \circ J = J \circ df\}$.

Krzywe eliptyczne

Krzywa eliptyczna: zespolony torus wymiaru 1.

Krzywe eliptyczne

Krzywa eliptyczna: zespolony torus wymiaru 1.

Każda krzywa eliptyczna ma postać $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$, gdzie $\tau \in \mathcal{H}$.

Krzywe eliptyczne

Krzywa eliptyczna: zespolony torus wymiaru 1.

Każda krzywa eliptyczna ma postać $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$, gdzie $\tau \in \mathcal{H}$.

Dwie krzywe E_τ, $E_{\tau'}$ są biholomorficzne $\iff$ τ, τ' leżą w tej samej orbicie działania grupy modularnej $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Krzywe eliptyczne

Krzywa eliptyczna: zespolony torus wymiaru 1.

Każda krzywa eliptyczna ma postać $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$, gdzie $\tau \in \mathcal{H}$.

Dwie krzywe E_τ, $E_{\tau'}$ są biholomorficzne $\iff$ τ, τ' leżą w tej samej orbicie działania grupy modularnej $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Grupa biholomorficznych homomorfizmów krzywych eliptycznych jest skończona:

τ	i	$e^{\frac{\pi i}{3}}$	pozostałe
$\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$

Zespolona wersja tw. Bieberbacha

Twierdzenie

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera.

- *M jest ilorazem zespolonego torusa przez działającą bez punktów stałych skończoną grupę $G \subset \mathrm{Aut}(T)$.*

Zespolona wersja tw. Bieberbacha

Twierdzenie

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera.

- *M jest ilorazem zespolonego torusa przez działającą bez punktów stałych skończoną grupę $G \subset \mathrm{Aut}(T)$.*
- *Dwie rozmaitości $M = T/G$ oraz $M' = T'/G'$ są bihilomorficzne $\iff$*
  - *istnieje odwzorowanie biholomorficzne $\varphi : T \to T'$,*
  - *grupy G i $\varphi^{-1}G'\varphi$ są sprzężone w $\mathrm{Aut}(T)$*

Zespolona wersja tw. Bieberbacha

Twierdzenie

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera.

- *M jest ilorazem zespolonego torusa przez działającą bez punktów stałych skończoną grupę $G \subset \mathrm{Aut}(T)$.*
- *Dwie rozmaitości $M = T/G$ oraz $M' = T'/G'$ są bihilomorficzne $\iff$*
  - *istnieje odwzorowanie biholomorficzne $\varphi : T \to T'$,*
  - *grupy G i $\varphi^{-1}G'\varphi$ są sprzężone w $\mathrm{Aut}(T)$*
- *Dla dowolnego zespolonego torusa istnieje skończona ilość płaskich rozmaitości Kählera postaci T/G.*

Działanie na grupie kohomologii

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera postaci $M = T/\tilde{G}$ gdzie $\tilde{G} \subset \mathrm{Aut}(T)$. Zakładamy, że $\tilde{G} \simeq Hol(M)$, tj. $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ gdzie Λ jest maksymalna.

Działanie na grupie kohomologii

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera postaci $M = T/\tilde{G}$ gdzie $\tilde{G} \subset \mathrm{Aut}(T)$. Zakładamy, że $\tilde{G} \simeq Hol(M)$, tj. $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ gdzie Λ jest maksymalna.

- Grupa $\tilde{G}$ jest izomorficzna z $G = \pi(\tilde{G})$, gdzie $\pi : Aut(T) \to \mathrm{Aut}_0(T)$.

Działanie na grupie kohomologii

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera postaci $M = T/\tilde{G}$ gdzie $\tilde{G} \subset \mathrm{Aut}(T)$. Zakładamy, że $\tilde{G} \simeq Hol(M)$, tj. $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ gdzie Λ jest maksymalna.

- Grupa $\tilde{G}$ jest izomorficzna z $G = \pi(\tilde{G})$, gdzie $\pi : Aut(T) \to \mathrm{Aut}_0(T)$.
- Grupa $\tilde{G}$ wyznacza klasę kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$

Działanie na grupie kohomologii

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera postaci $M = T/\tilde{G}$ gdzie $\tilde{G} \subset \mathrm{Aut}(T)$. Zakładamy, że $\tilde{G} \simeq Hol(M)$, tj. $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ gdzie Λ jest maksymalna.

- Grupa $\tilde{G}$ jest izomorficzna z $G = \pi(\tilde{G})$, gdzie $\pi : Aut(T) \to \mathrm{Aut}_0(T)$.
- Grupa $\tilde{G}$ wyznacza klasę kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$

Klasa specjalna: klasa $\alpha \in H^1(G, T)$ wyznaczająca grupę działającą bez punktów stałych.

Działanie na grupie kohomologii

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera postaci $M = T/\tilde{G}$ gdzie $\tilde{G} \subset \mathrm{Aut}(T)$. Zakładamy, że $\tilde{G} \simeq Hol(M)$, tj. $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ gdzie Λ jest maksymalna.

- Grupa $\tilde{G}$ jest izomorficzna z $G = \pi(\tilde{G})$, gdzie $\pi : Aut(T) \to \mathrm{Aut}_0(T)$.
- Grupa $\tilde{G}$ wyznacza klasę kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$

Klasa specjalna: klasa $\alpha \in H^1(G, T)$ wyznaczająca grupę działającą bez punktów stałych.

$N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$: normalizator grupy G w $\mathrm{Aut}_0(T)$.

Działanie na grupie kohomologii

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera postaci $M = T/\tilde{G}$ gdzie $\tilde{G} \subset \mathrm{Aut}(T)$. Zakładamy, że $\tilde{G} \simeq Hol(M)$, tj. $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ gdzie Λ jest maksymalna.

- Grupa $\tilde{G}$ jest izomorficzna z $G = \pi(\tilde{G})$, gdzie $\pi : Aut(T) \to \mathrm{Aut}_0(T)$.
- Grupa $\tilde{G}$ wyznacza klasę kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$

Klasa specjalna: klasa $\alpha \in H^1(G, T)$ wyznaczająca grupę działającą bez punktów stałych.

$N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$: normalizator grupy G w $\mathrm{Aut}_0(T)$.

$N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ działa na $H^1(G, T)$: $n * [z(g)] = [n^{-1}z(ngn^{-1})]$.

Działanie na grupie kohomologii

Niech M będzie płaską rozmaitością Kählera postaci $M = T/\tilde{G}$ gdzie $\tilde{G} \subset \mathrm{Aut}(T)$. Zakładamy, że $\tilde{G} \simeq Hol(M)$, tj. $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ gdzie Λ jest maksymalna.

- Grupa $\tilde{G}$ jest izomorficzna z $G = \pi(\tilde{G})$, gdzie $\pi : Aut(T) \to \mathrm{Aut}_0(T)$.
- Grupa $\tilde{G}$ wyznacza klasę kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$

Klasa specjalna: klasa $\alpha \in H^1(G, T)$ wyznaczająca grupę działającą bez punktów stałych.

$N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$: normalizator grupy G w $\mathrm{Aut}_0(T)$.

$N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ działa na $H^1(G, T)$: $n * [z(g)] = [n^{-1}z(ngn^{-1})]$.
Działanie to zachowuje zbiór klas specjalnych.

Wyznaczanie klas biholomorfizmu i grupy automorfizmów

Twierdzenie

Niech T będzie zespolonym torusem oraz $G \subset \mathrm{Aut}_0(T)$. Klasy biholomorfizmu rozmaitości postaci $M = T/\tilde{G}$ (t. że $\pi(\tilde{G}) = G$) odpowiada wzajemnie jednoznacznie orbitom działania grupy $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ na zbiorze klas specjalnych $\alpha \in H^1(G, T)$.

Wyznaczanie klas biholomorfizmu i grupy automorfizmów

Twierdzenie

Niech T będzie zespolonym torusem oraz $G \subset \mathrm{Aut}_0(T)$. Klasy biholomorfizmu rozmaitości postaci $M = T/\tilde{G}$ (t. że $\pi(\tilde{G}) = G$) odpowiada wzajemnie jednoznacznie orbitom działania grupy $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ na zbiorze klas specjalnych $\alpha \in H^1(G, T)$.

N_α: stabilizator klasy $\alpha \in H^1(G, T)$ (przy działaniu grupy $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$).

Wyznaczanie klas biholomorfizmu i grupy automorfizmów

Twierdzenie

Niech T będzie zespolonym torusem oraz $G \subset \mathrm{Aut}_0(T)$. Klasy biholomorfizmu rozmaitości postaci $M = T/\tilde{G}$ (t. że $\pi(\tilde{G}) = G$) odpowiada wzajemnie jednoznacznie orbitom działania grupy $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ na zbiorze klas specjalnych $\alpha \in H^1(G, T)$.

N_α: stabilizator klasy $\alpha \in H^1(G, T)$ (przy działaniu grupy $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$).

Twierdzenie

Jeżeli M jest płaską rozmaitością Kählera postaci $T/\tilde{G}$ gdzie $\tilde{G}$ jest grupą wyznaczoną przez klasę $\alpha \in H^1(G, T)$, to $\mathrm{Aut}(M)$ jest rozszerzeniem postaci:

$$0 \longrightarrow T^G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M) \longrightarrow N_\alpha/G \longrightarrow 1$$

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- $T = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$, gdzie $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_\xi$ oraz $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- $T = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$, gdzie $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_\xi$ oraz $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
- G jest generowana przez odwzorowania $g_1 = (1, \xi, \xi, \xi)$ oraz $g_2 = (\xi, 1, \xi, \xi^2)$.

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- $T = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$, gdzie $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_\xi$ oraz $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
- G jest generowana przez odwzorowania $g_1 = (1, \xi, \xi, \xi)$ oraz $g_2 = (\xi, 1, \xi, \xi^2)$.
- Każda specjalna klasa kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ ma reprezentanta $g_1 \mapsto (a, 0, 0, 0)$, $g_2 \mapsto (0, b, c, d)$, gdzie $a, b, c, d \in \{\pm\frac{1}{3}(1 - \xi)\}$.

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- $T = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$, gdzie $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_\xi$ oraz $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
- G jest generowana przez odwzorowania $g_1 = (1, \xi, \xi, \xi)$ oraz $g_2 = (\xi, 1, \xi, \xi^2)$.
- Każda specjalna klasa kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ ma reprezentanta $g_1 \mapsto (a, 0, 0, 0)$, $g_2 \mapsto (0, b, c, d)$, gdzie $a, b, c, d \in \{\pm\frac{1}{3}(1-\xi)\}$.
- $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ jest generowana przez
    - permutacje krzywych eliptycznych E_2, E_3 i E_4,

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- $T = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$, gdzie $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_\xi$ oraz $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
- G jest generowana przez odwzorowania $g_1 = (1, \xi, \xi, \xi)$ oraz $g_2 = (\xi, 1, \xi, \xi^2)$.
- Każda specjalna klasa kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ ma reprezentanta $g_1 \mapsto (a, 0, 0, 0)$, $g_2 \mapsto (0, b, c, d)$, gdzie $a, b, c, d \in \{\pm\frac{1}{3}(1-\xi)\}$.
- $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ jest generowana przez
    - permutacje krzywych eliptycznych E_2, E_3 i E_4,
    - biholomorficzne homomorfizmy każdej z krzywych eliptycznych.

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- $T = E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$, gdzie $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_\xi$ oraz $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
- G jest generowana przez odwzorowania $g_1 = (1, \xi, \xi, \xi)$ oraz $g_2 = (\xi, 1, \xi, \xi^2)$.
- Każda specjalna klasa kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ ma reprezentanta $g_1 \mapsto (a, 0, 0, 0)$, $g_2 \mapsto (0, b, c, d)$, gdzie $a, b, c, d \in \{\pm\frac{1}{3}(1 - \xi)\}$.
- $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ jest generowana przez
  - permutacje krzywych eliptycznych E_2, E_3 i E_4,
  - biholomorficzne homomorfizmy każdej z krzywych eliptycznych.

Wniosek: $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G) = S_3 \ltimes \mathbb{Z}_6^4$.

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- Działanie grupy $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ na specjalnych klasach kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ ma jedną orbitę. Każda płaska rozmaitość Kählera dyfeomorficzna z T/G jest biholomorficzna z T/G.

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- Działanie grupy $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ na specjalnych klasach kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ ma jedną orbitę. Każda płaska rozmaitość Kählera dyfeomorficzna z T/G jest biholomorficzna z T/G.
- Dla dowolnej specjalnej klasy kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ jej stabilizator N_α jest równy $S_3 \ltimes \mathbb{Z}_3^4$

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- Działanie grupy $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ na specjalnych klasach kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ ma jedną orbitę. Każda płaska rozmaitość Kählera dyfeomorficzna z T/G jest biholomorficzna z T/G.
- Dla dowolnej specjalnej klasy kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ jej stabilizator N_α jest równy $S_3 \ltimes \mathbb{Z}_3^4$
- $\mathrm{Aut}(T/G)$ jest rozszerzeniem postaci:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^4 \longrightarrow \mathrm{Aut}(M) \longrightarrow S_3 \ltimes \mathbb{Z}_3^2 \longrightarrow 1$$

Rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_3^2$

- Działanie grupy $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ na specjalnych klasach kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ ma jedną orbitę. Każda płaska rozmaitość Kählera dyfeomorficzna z T/G jest biholomorficzna z T/G.
- Dla dowolnej specjalnej klasy kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$ jej stabilizator N_α jest równy $S_3 \ltimes \mathbb{Z}_3^4$
- $\mathrm{Aut}(T/G)$ jest rozszerzeniem postaci:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_3^4 \longrightarrow \mathrm{Aut}(M) \longrightarrow S_3 \ltimes \mathbb{Z}_3^2 \longrightarrow 1$$

- $[\mathrm{Aff}(M) : \mathrm{Aut}(M)] = 8$

Rozmaitości CHW wymiaru 3

Zespolona rozmaitość Hantzsche-Wendta: płaska rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2^{n-1} \subset SU(n)$. Skrót: rozmaitość CHW.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

Zespolona rozmaitość Hantzsche-Wendta: płaska rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2^{n-1} \subset SU(n)$. Skrót: rozmaitość CHW.

- Rozmaitości CHW występują tylko w nieparzystych wymiarach zespolonych.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

Zespolona rozmaitość Hantzsche-Wendta: płaska rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2^{n-1} \subset SU(n)$. Skrót: rozmaitość CHW.

- Rozmaitości CHW występują tylko w nieparzystych wymiarach zespolonych.
- W wymiarze 3 są tylko cztery rozmaitości CHW, każda z inną reprezentacją holonomii.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

Zespolona rozmaitość Hantzsche-Wendta: płaska rozmaitość z grupą holonomii $\mathbb{Z}_2^{n-1} \subset SU(n)$. Skrót: rozmaitość CHW.

- Rozmaitości CHW występują tylko w nieparzystych wymiarach zespolonych.
- W wymiarze 3 są tylko cztery rozmaitości CHW, każda z inną reprezentacją holonomii.
- Będziemy rozpatrywać trójwymiarową rozmaitość CHW M z diagonalną reprezentacją holonomii.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Zespolona reprezentacja holonomii ma postać:

$$\varrho^{\mathbb{C}}_{g_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \varrho^{\mathbb{C}}_{g_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Zespolona reprezentacja holonomii ma postać:

$$\varrho^{\mathbb{C}}_{g_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \varrho^{\mathbb{C}}_{g_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Rozmaitość M jest ilorazem torusa $T = E_1 \times E_2 \times E_3$ (gdzie E_1, E_2, E_3 – dowolne krzywe eliptyczne) przez grupę $G \subset \mathrm{Aut}_0(T)$ wyznaczoną przez specjalną klasę kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Zespolona reprezentacja holonomii ma postać:

$$\varrho_{g_1}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \varrho_{g_2}^{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Rozmaitość M jest ilorazem torusa $T = E_1 \times E_2 \times E_3$ (gdzie E_1, E_2, E_3 – dowolne krzywe eliptyczne) przez grupę $G \subset \mathrm{Aut}_0(T)$ wyznaczoną przez specjalną klasę kohomologii $\alpha \in H^1(G, T)$.
- Każda taka specjalna klasa α ma reprezentanta $g_1 \mapsto (a_1, 0, 0)$, $g_2 \mapsto (0, a_2, a_3)$, gdzie $a_k \in E_k$ jest niezerowym punktem 2-torsyjnym.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Generatory normalizatora:

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Generatory normalizatora:
  - transpozycje tych krzywych eliptycznych, które są biholomorficzne,

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Generatory normalizatora:
  - transpozycje tych krzywych eliptycznych, które są biholomorficzne,
  - biholomorficzne homomorfizmy każdej z krzywych eliptycznych.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Generatory normalizatora:
  - transpozycje tych krzywych eliptycznych, które są biholomorficzne,
  - biholomorficzne homomorfizmy każdej z krzywych eliptycznych.
- Wniosek: $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G) = S \ltimes (\mathrm{Aut}\, E_1 \oplus \mathrm{Aut}\, E_2 \oplus \mathrm{Aut}\, E_3)$, gdzie $S \subset S_3$ – grupa permutacji maksymalnego zbioru biholomorficznych krzywych eliptycznych.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Generatory normalizatora:
  - transpozycje tych krzywych eliptycznych, które są biholomorficzne,
  - biholomorficzne homomorfizmy każdej z krzywych eliptycznych.
- Wniosek: $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G) = S \ltimes (\mathrm{Aut}\, E_1 \oplus \mathrm{Aut}\, E_2 \oplus \mathrm{Aut}\, E_3)$, gdzie $S \subset S_3$ – grupa permutacji maksymalnego zbioru biholomorficznych krzywych eliptycznych.
- Dla dowolnej struktury zespolonej na M grupa $\mathrm{Aut}(M)$ jest skończona, ale $\mathrm{Aff}(M)$ jest nieskończona.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:
  - Jeśli $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to jest jedna orbita.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:
  - Jeśli $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to jest jedna orbita.
  - Jeśli $\tau = i$, to są dwie orbity: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\}$ oraz $\{\frac{1}{2}(1+i)\}$.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:
  - Jeśli $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to jest jedna orbita.
  - Jeśli $\tau = i$, to są dwie orbity: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\}$ oraz $\{\frac{1}{2}(1+i)\}$.
  - Dla pozostałych krzywych eliptycznych są trzy orbity jednopunktowe.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:
  - Jeśli $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to jest jedna orbita.
  - Jeśli $\tau = i$, to są dwie orbity: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\}$ oraz $\{\frac{1}{2}(1+i)\}$.
  - Dla pozostałych krzywych eliptycznych są trzy orbity jednopunktowe.

Przykład: niech $T = E_\xi \times E_\xi \times E_i$.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:
  - Jeśli $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to jest jedna orbita.
  - Jeśli $\tau = i$, to są dwie orbity: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\}$ oraz $\{\frac{1}{2}(1+i)\}$.
  - Dla pozostałych krzywych eliptycznych są trzy orbity jednopunktowe.

Przykład: niech $T = E_\xi \times E_\xi \times E_i$.

- $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G) = (S_2 \ltimes \mathbb{Z}_6^2) \times \mathbb{Z}_4$,

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:
  - Jeśli $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to jest jedna orbita.
  - Jeśli $\tau = i$, to są dwie orbity: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\}$ oraz $\{\frac{1}{2}(1+i)\}$.
  - Dla pozostałych krzywych eliptycznych są trzy orbity jednopunktowe.

Przykład: niech $T = E_\xi \times E_\xi \times E_i$.

- $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G) = (S_2 \ltimes \mathbb{Z}_6^2) \times \mathbb{Z}_4$,
- istnieją dokładnie dwie klasy biholomorfizmu rozmaitości CHW z diagonalną rep. holonomii nakrywane przez torus T,

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:
  - Jeśli $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to jest jedna orbita.
  - Jeśli $\tau = i$, to są dwie orbity: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\}$ oraz $\{\frac{1}{2}(1+i)\}$.
  - Dla pozostałych krzywych eliptycznych są trzy orbity jednopunktowe.

Przykład: niech $T = E_\xi \times E_\xi \times E_i$.

- $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G) = (S_2 \ltimes \mathbb{Z}_6^2) \times \mathbb{Z}_4$,
- istnieją dokładnie dwie klasy biholomorfizmu rozmaitości CHW z diagonalną rep. holonomii nakrywane przez torus T,
- jeżeli $a_3 = \frac{1}{2}$, to $N_\alpha / G = \mathbb{Z}_2^2$, a więc $|\mathrm{Aut}(M)| = 256$,

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:
  - Jeśli $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to jest jedna orbita.
  - Jeśli $\tau = i$, to są dwie orbity: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\}$ oraz $\{\frac{1}{2}(1+i)\}$.
  - Dla pozostałych krzywych eliptycznych są trzy orbity jednopunktowe.

Przykład: niech $T = E_\xi \times E_\xi \times E_i$.

- $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G) = (S_2 \ltimes \mathbb{Z}_6^2) \times \mathbb{Z}_4$,
- istnieją dokładnie dwie klasy biholomorfizmu rozmaitości CHW z diagonalną rep. holonomii nakrywane przez torus T,
- jeżeli $a_3 = \frac{1}{2}$, to $N_\alpha / G = \mathbb{Z}_2^2$, a więc $|\mathrm{Aut}(M)| = 256$,
- jeżeli $a_3 = \frac{i+1}{2}$, to $N_\alpha / G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, a więc $|\mathrm{Aut}(M)| = 512$.

Rozmaitości CHW wymiaru 3

- Orbity działania $\mathrm{Aut}_0(E_\tau)$ na niezerowych punktach 2-torsyjnych krzywych eliptycznych:
  - Jeśli $\tau = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, to jest jedna orbita.
  - Jeśli $\tau = i$, to są dwie orbity: $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i\}$ oraz $\{\frac{1}{2}(1+i)\}$.
  - Dla pozostałych krzywych eliptycznych są trzy orbity jednopunktowe.

Przykład: niech $T = E_\xi \times E_\xi \times E_i$.

- $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G) = (S_2 \ltimes \mathbb{Z}_6^2) \times \mathbb{Z}_4$,
- istnieją dokładnie dwie klasy biholomorfizmu rozmaitości CHW z diagonalną rep. holonomii nakrywane przez torus T,
- jeżeli $a_3 = \frac{1}{2}$, to $N_\alpha/G = \mathbb{Z}_2^2$, a więc $|\mathrm{Aut}(M)| = 256$,
- jeżeli $a_3 = \frac{i+1}{2}$, to $N_\alpha/G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, a więc $|\mathrm{Aut}(M)| = 512$.

Uwaga: przestrzeń moduli struktur zespolonych jest spójna.

Skończoność $\mathrm{Aut}(M)$ nie zależy tylko od $\pi_1(M)$

- Niech $T = E_1 \times E_2 \times A$ gdzie E_1 oraz E_2 są krzywymi eliptycznymi a A jest dwuwymiarowym torusem zespolonym.

Skończoność Aut(M) nie zależy tylko od $\pi_1(M)$

- Niech $T = E_1 \times E_2 \times A$ gdzie E_1 oraz E_2 są krzywymi eliptycznymi a A jest dwuwymiarowym torusem zespolonym.
- Generatory grupy G: $g_1 = (1, -1, -1)$, $g_2 = (-1, 1, -1)$. Istnieje specjalna klasa $\alpha \in H^1(G, T)$.

Skończoność $\mathrm{Aut}(M)$ nie zależy tylko od $\pi_1(M)$

- Niech $T = E_1 \times E_2 \times A$ gdzie E_1 oraz E_2 są krzywymi eliptycznymi a A jest dwuwymiarowym torusem zespolonym.
- Generatory grupy G: $g_1 = (1, -1, -1)$, $g_2 = (-1, 1, -1)$. Istnieje specjalna klasa $\alpha \in H^1(G, T)$.
- Grupa $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ zawiera podgrupę $\mathrm{Aut}_0(A)$.

Skończoność $\mathrm{Aut}(M)$ nie zależy tylko od $\pi_1(M)$

- Niech $T = E_1 \times E_2 \times A$ gdzie E_1 oraz E_2 są krzywymi eliptycznymi a A jest dwuwymiarowym torusem zespolonym.
- Generatory grupy G: $g_1 = (1, -1, -1)$, $g_2 = (-1, 1, -1)$. Istnieje specjalna klasa $\alpha \in H^1(G, T)$.
- Grupa $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ zawiera podgrupę $\mathrm{Aut}_0(A)$.W zależności od struktury torusa A grupa ta może być skończona lub nieskończona.

Skończoność $\mathrm{Aut}(M)$ nie zależy tylko od $\pi_1(M)$

- Niech $T = E_1 \times E_2 \times A$ gdzie E_1 oraz E_2 są krzywymi eliptycznymi a A jest dwuwymiarowym torusem zespolonym.
- Generatory grupy G: $g_1 = (1, -1, -1)$, $g_2 = (-1, 1, -1)$. Istnieje specjalna klasa $\alpha \in H^1(G, T)$.
- Grupa $N_{\mathrm{Aut}_0(T)}(G)$ zawiera podgrupę $\mathrm{Aut}_0(A)$.W zależności od struktury torusa A grupa ta może być skończona lub nieskończona.
- Zatem istnieje płaska rozmaitość Kählera dla której skończoność grupy automorfizmów zależy od wyboru struktury zespolonej.

Dziękuję za uwagę.