

BOŻENA PIĄTEK

AUTOREFERAT
(wersja w języku polskim)

Gliwice 2018

Spis treści

1	Informacje o autorze	3
2	Tytuły i stopnie naukowe	3
3	Zatrudnienie	3
4	Osiągnięcie naukowe	3
4.1	Wstęp	4
4.2	Podstawowe oznaczenia i informacje	6
4.3	Wcześniejsze badania innych autorów	11
4.4	Nieograniczone przestrzenie $CAT(0)$ i odwzorowania nieodda- lające	17
4.5	Własność punktu stałego w zbiorach nieograniczonych	21
4.6	Odwzorowania nieoddalające, które nie mają punktów stałych	25
4.7	Punkty stałe i absolutne punkty stałe w niewypukłych pod- zbiorach przestrzeni $CAT(0)$	28
5	Omówienie pozostałych wyników naukowych	32
5.1	Aproksymacja punktów stałych w przestrzeniach z krzywizną ograniczoną z góry przez liczbę dodatnią	34
5.2	Własność punktów stałych dla odwzorowań ciągłych	39
5.3	Różnorodność i hiperwypukłość przestrzeni	40
5.4	Pozostałe prace	43
	Literatura	45

1 Informacje o autorze

Imię i nazwisko	Bożena Piątek
Data i miejsce urodzenia	25.07.1979, Knurów

2 Tytuły i stopnie naukowe

- **magister inżynier, listopad 2002**
Wydział Matematyczno-Fizyczny, Politechnika Śląska,
praca zatytułowana: Zastosowanie wielomianów cieplnych w zagadnieniach odwrotnych przewodzenia
promotor: prof. dr hab. inż. Radosław Grzymkowski
- **doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki, kwiecień 2007**
Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, Akademia Pedagogiczna w Krakowie,
praca zatytułowana: Zastosowanie całki Riemanna multifunkcji w równaniach i inkluzjach funkcyjnych oraz jej związek z całką Aumanna
promotor: dr hab. Wilhelmina Smajdor

3 Zatrudnienie

- październik 2007 – czerwiec 2008 asystent w Instytucie Matematyki Politechniki Śląskiej
- lipiec 2008 – adiunkt w Instytucie Matematyki Politechniki Śląskiej
- luty 2011 – kwiecień 2011 staż podoktorski, Instituto de Matemáticas Universidad de Sevilla

4 Osiągnięcie naukowe

(w rozumieniu art. 16 ust. 2 Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki)

Moje osiągnięcie naukowe stanowi cykl pięciu publikacji powiązanych tematycznie pod tytułem

“Własność punktu stałego w nieograniczonych bądź niewypukłych podzbiorach przestrzeni geodezyjnych”

w skład którego wchodzi następujące prace

- [P01] R. Espínola, B. Piątek, *The fixed point property and unbounded sets in $CAT(0)$ spaces*, J. Math. Anal. Appl. 408 (2013), 638–654.
- [P02] B. Piątek, R. Espínola, *Fixed points and non-convex sets in $CAT(0)$ spaces* Topol. Methods Nonlinear Anal. 41(1) (2013), 135–162.
- [P03] B. Piątek, *The fixed point property and unbounded sets in spaces of negative curvature*, Israel J. Math. 209 (2015), 323–334.
- [P04] B. Piątek, *On the fixed point property for nonexpansive mappings in hyperbolic geodesic spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 19(4) (2018), 571–582.
- [P05] B. Piątek, *The behavior of fixed point free nonexpansive mappings in geodesic spaces*, J. Math. Anal. Appl. 445 (2017), 1071–1083.

4.1 Wstęp

Choć przestrzenie $CAT(\kappa)$ zostały wprowadzone w latach osiemdziesiątych, początkowo, z racji ich związków z grupami hiperbolicznymi, główną uwagę poświęcono badaniu ich izometrii. Na przełomie wieków W. A. Kirk wygłosił cykl odczytów seminaryjnych, w czasie których przedstawił wiele bazowych wyników dotyczących różnych typów problemów powiązanych z punktami stałymi odwzorowań nieoddalających zdefiniowanych w tych przestrzeniach. Mnogość zarówno wyników jak i otwartych pytań postawionych przez autora (zobacz [31] oraz [32]) stały się *spiritus movens* badań nad odwzorowaniami w przestrzeniach $CAT(0)$, które niekoniecznie są izometriami. Problemy i otwarte pytania omawiane podczas wspomnianych odczytów możemy podzielić na trzy grupy.

Pierwsza z nich dotyczy istnienia i położenia punktów stałych odwzorowań zdefiniowanych na zbiorach ograniczonych. Za fundamentalny wynik możemy tu przyjąć:

Twierdzenie 4.1. ([31] Theorem 18)

Niech X będzie zupełną i ograniczoną przestrzenią $CAT(0)$. Wówczas każde odwzorowanie nieoddalające $T: X \rightarrow X$ ma punkt stały.

Następnie powyższy wynik został uogólniony przez samego autora na przypadek zbiorów, które nie są wypukłe (ale wciąż ograniczone – zobacz [30, Theorem 3.3]) oraz przez R. Espínolę i A. Fernández-León na przypadek przestrzeni $CAT(\kappa)$ z dodatnim parametrem κ (zobacz [17, Theorem 3.9]). W kolejnych latach ten sam problem był badany w szerszej klasie przestrzeni (zobacz na przykład [P13] i [44]).

Druga grupa problemów jest poświęcona związkom pomiędzy istnieniem punktów stałych a własnościami geometrycznymi przestrzeni. W tym przypadku możemy rozważać odwzorowania nieoddalające, których dziedziną są przestrzenie niewypukłe bądź nieograniczone oraz ciągle – wówczas interesuje nas zwartość dziedziny. Główna tematyka moich badań w ostatnich latach dotyczyła w znacznej mierze właśnie tych problemów.

Moim najistotniejszym wkładem jest pełna charakterystyka ograniczoności przestrzeni $CAT(0)$ poprzez własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających (zobacz Twierdzenia 4.28 i 4.32). Jednocześnie warto nadmienić, że otrzymałam też szeroką gamę własności odwzorowań nieoddalających o nieograniczonych dziedzinach, które nie mają punktów stałych. Zauważmy ponadto, że w pracy [P19] napisanej we współpracy z prof. Genaro López-Acedo podaliśmy podobną charakterystykę własności punktu stałego tym razem dla odwzorowań ciągłych. Przy czym metody badawcze stosowane w obu przypadkach były całkowicie różne. W całym autoreferacie poprzez własność punktu stałego przestrzeni X rozumiemy, że dla dowolnego niepustego domkniętego i wypukłego (ale niekoniecznie ograniczonego) podzbioru $C \subset X$ i $T: C \rightarrow C$ odwzorowanie T ma (co najmniej jeden) punkt stały.

Na zakończenie należałoby wspomnieć o trzeciej grupie problemów tym razem dotyczących aproksymacji punktów stałych w przestrzeniach $CAT(\kappa)$. O ile aproksymacja w przestrzeniach $CAT(0)$ nie wymaga wprowadzania nowych technik, o tyle sytuacja jest zupełnie inna w bardziej ogólnym przypadku przestrzeni $CAT(\kappa)$, a pierwsze wyniki dotyczące tego problemu są mojego autorstwa.

Dalsza część autoreferatu składa się z następujących części. Na początek omówimy podstawowe definicje i związki między pojęciami w przestrzeniach geodezyjnych, na których oprzemy się w dalszej części. W następnym kroku przypomnimy kilka znanych wyników dotyczących istnienia punktów stałych w nieograniczonych bądź niewypukłych przestrzeniach $CAT(0)$. Zauważmy przy tym, że jak dotąd zachowanie odwzorowań zdefiniowanych na niewypukłych podzbiórach przestrzeni $CAT(0)$ zostało zbadane znacznie dogłębniej niż w przypadku odwzorowań, których dziedziny są zbiorami nieograniczonymi. Wrócimy do tego tematu na początku podrozdziału 4.3, gdzie naszkicujemy pełny obraz sytuacji. Reszta tego rozdziału opisuje mój wkład w teorię punktów stałych odnośnie nieograniczonych i niewypukłych podzbiorów przestrzeni geodezyjnych.

W rozdziale 5 omówimy wyniki, które nie zostały włączone do głównego osiągnięcia naukowego, choć wiele z nich pozostaje związanych z tematyką teorii punktów stałych w przestrzeniach geodezyjnych. Na początek przedstawimy metody zastosowane w aproksymacji punktów stałych w przestrzeniach $CAT(\kappa)$ oraz ich wykorzystanie w dalszych badaniach. Następnie

przypomnimy wynik Klee dotyczący charakterystyki zbiorów mających własności punktu stałego dla odwzorowań ciągłych zdefiniowanych na domkniętych i wypukłych podzbiorach przestrzeni liniowych poprzez ich strukturę geometryczną. Ujmując rzecz bardziej szczegółowo, interesować nas będzie zwartość zbioru jak również istnienie domkniętych promieni topologicznych. W podrozdziale 5.2 pokażemy na ile możliwe jest otrzymanie odpowiednika twierdzenia Klee w przypadku przestrzeni geodezyjnych. Trzecia grupa prac opisanych bardziej szczegółowo jest poświęcona pojęciu różnorodności i przestrzeniom hiperwypukłym. Zdecydowałam nie omawiać tu wszystkich swoich prac i przedstawić jedynie najistotniejsze kierunki moich badań.

4.2 Podstawowe oznaczenia i informacje

Rozpocznijmy od przytoczenia najważniejszych faktów dotyczących przestrzeni geodezyjnych, które wykorzystamy w dalszych częściach autoreferatu; szersze opracowanie przedstawionych poniżej definicji można znaleźć przykładowo w [11], [13] i [50]. Załóżmy, że przestrzeń metryczna (X, ρ) jest przestrzenią geodezyjną, czyli dla dowolnej pary punktów istnieje geodezyjna, czyli zanurzenie izometryczne $\gamma: [0, d(x, y)] \rightarrow X$, takie że $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x, y)) = y$. Obraz tego zanurzenia nazwiemy odcinkiem geodezyjnym i jeśli jest on wyznaczony jednoznacznie, to go oznaczymy $[x, y]$. Jeżeli geodezyjną można przedłużyć na zbiór $[0, \infty)$, to jej obraz $\gamma([0, \infty))$ nazwiemy promieniem geodezyjnym. Powiemy, że podzbiór A przestrzeni geodezyjnej X jest wypukły, jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ każdy odcinek geodezyjny łączący te punkty zawiera się w zbiorze A . Ponadto, jeśli X jest przestrzenią metryczną, w której dla dowolnych dwóch punktów istnieje dokładnie jedna geodezyjna łącząca te punkty, to powiemy, że X jest przestrzenią jednoznacznie geodezyjną.

W dalszej części skupimy się na przestrzeniach $\text{CAT}(\kappa)$. Ta klasa przestrzeni została wprowadzona w latach osiemdziesiątych przez M. Gromova i była dogłębnie badana w ostatnich latach (zobacz m.in. [5], [8], [11], Rozdział 9 w [13] oraz Rozdział 9 w [33]). Z jednej strony przestrzenie $\text{CAT}(\kappa)$ posiadają wiele użytecznych własności rozmaitości Riemanna jak również przestrzeni Hilberta (przy dodatkowym założeniu $\kappa \leq 0$), ale jednocześnie stanowią uogólnienie bardzo wielu specyficznych klas przestrzeni badanych dotąd osobno. Przykładami takich przestrzeni są wspomniane już rozmaitości, drzewa metryczne, budynki Bruhata–Titsa, itp.

Rozważmy przestrzeń geodezyjną (X, ρ) i załóżmy, że M_κ^2 jest zupełną, spójną, dwuwymiarową rozmaitością Riemanna o stałej krzywiznie sekcyjnej κ (dla dowolnej liczby rzeczywistej κ). Ponadto, niech D_κ będzie średnicą M_κ^2 równą $\pi/\sqrt{\kappa}$ dla $\kappa > 0$ i ∞ w pozostałych przypadkach. Trójkąt

geodezyjny $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ jest sumą trzech punktów $\{x_i\}$ oraz trzech odcinków metrycznych łączących te punkty. Jeśli ponadto $\rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_1) \leq 2D_\kappa$, to istnieje dokładnie jeden z dokładnością do izomorfizmu trójkąt $\Delta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ w M_κ^2 , taki, że $\rho(x_i, x_j) = d_\kappa(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$. Trójkąt geodezyjny $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ spełnia nierówność CAT(κ) jeśli dla dowolnej pary punktów $p, q \in \Delta(x_1, x_2, x_3)$ i odpowiadających im punktów $\bar{p}, \bar{q} \in \Delta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ zachodzi nierówność

$$\rho(p, q) \leq d_\kappa(\bar{p}, \bar{q}).$$

Powiemy, że X jest przestrzenią CAT(κ) jeśli dowolna para punktów $x, y \in X$ z $\rho(x, y) \leq D_\kappa$ jest połączona geodezyjną a każdy trójkąt geodezyjny o obwodzie mniejszym niż $2D_\kappa$ spełnia nierówność CAT(κ).

Jeśli każdy trójkąt spełnia nierówność przeciwną, to powiemy, że przestrzeń ma krzywiznę ograniczoną z dołu (w sensie Alexandrova) przez κ . Oczywiście istnieją przestrzenie, które spełniają obie nierówności, czyli takie, których krzywizna jest jednocześnie ograniczona z góry i z dołu. Najprostszym przykładem jest przestrzeń Hilberta z krzywizną stale równą 0. Innym bardzo dobrze znanym i szeroko badanym przykładem jest zespolona kula Hilberta z metryką hiperboliczną (zobacz [22], jak również między innymi [25], [40] i [46]). Niech $\mathcal{B}$ będzie otwartą kulą jednostkową zespolonej przestrzeni Hilberta H z odległością zadaną wzorem

$$\rho(x, y) = \operatorname{arctanh}(1 - \sigma(x, y))^{1/2},$$

gdzie

$$\sigma(x, y) = \frac{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}{|1 - (x, y)|^2}$$

(zobacz [22, str. 99]). Wówczas $(\mathcal{B}, \rho)$ jest nazywana zespoloną kulą Hilberta (z metryką hiperboliczną). Jeśli w H rozważymy bazę ortonormalną $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ i podzbiór $\mathcal{D}$ zbioru $\mathcal{B}$, taki że

$$z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (z, e_\lambda) \in \mathbb{R} \quad \text{dla wszystkich } \lambda \in \Lambda,$$

to $\mathcal{D}$ z tą samą odległością jest nazywana rzeczywistą kulą Hilberta (z metryką hiperboliczną) (zobacz [22, Section II.32]). W szczególnym przypadku $H = \ell^2$, przestrzeń $\mathcal{D}$ oznaczmy przez $\mathbb{H}^\infty$ dla podkreślenia, że jest ona izometryczna z nieskończone wymiarowym modelem Kleina przestrzeni hiperbolicznej (zobacz [P01, str. 644]).

Innym równie znanym przykładem przestrzeni CAT(κ) (dla dowolnej liczby rzeczywistej κ) są drzewa metryczne, czyli przestrzenie jednoznacznie geodezyjne, w których każdy trójkąt jest tripoidem. Temat drzew metrycznych był szeroko rozważany między innymi w pracach [11], [29], [P02] i [P10], natomiast pojęcie tripoidu można znaleźć w [14, str. 2]).

Oba omawiane powyżej przykłady, czyli drzewa metryczne oraz kule Hilberta, są także hiperboliczne w sensie Gromowa. Wróćmy do tego pojęcia za moment, a w tej chwili skupmy się na podstawowych (i najbardziej użytecznych) własnościach geometrycznych przestrzeni $CAT(\kappa)$. Rozpocznijmy od wprowadzenia pojęcia kąta Alexandrova w przestrzeni geodezyjnej. Niech c, c' będą dwiema geodezyjnymi o wspólnym początku x i niech $y = c(s)$, $z = c'(t)$. Wówczas kąt $\angle_x(y, z)$ jest zdefiniowany wzorem

$$\angle_x(y, z) = \limsup_{\substack{s', t' \rightarrow 0^+ \\ s' < s, t' < t}} \angle_{\bar{x}}(\bar{c}(s'), \bar{c}'(t')), \quad (4.1)$$

gdzie $\angle_{\bar{x}}(\bar{c}(s'), \bar{c}'(t'))$ jest kątem w odpowiadającym mu trójkącie $\Delta(\bar{x}, \bar{c}(s'), \bar{c}'(t'))$ z przestrzeni modelowej (zobacz na przykład [11, Definition I.1.12]).

Stwierdzenie 4.2. *Niech X będzie zupełną przestrzenią $CAT(\kappa)$. Wtedy:*

- (i) *kąty w trójkącie geodezyjnym $\Delta(x, y, z)$ mają miary nie większe niż odpowiadające im kąty trójkąta $\Delta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ w M_κ^2 ;*
- (ii) *X jest też przestrzenią $CAT(\kappa')$ dla wszystkich $\kappa' > \kappa$;*
- (iii) *przy dodatkowym założeniu $\kappa \leq 0$ dla każdego niepustego domkniętego i wypukłego podzbioru C istnieje dobrze zdefiniowane, jednowartościowe rzutowanie $P_C: X \rightarrow C$ będące odwzorowaniem nieoddalającym i definiowane wzorem*

$$P_C(x) = \{y \in C : d(x, y) = d(x, C)\}.$$

Powyższe wyniki można znaleźć w [11, II.1].

Powiemy, że przestrzeń $CAT(\kappa)$ ma własność przedłużania jeśli dowolną geodezyjną $c: [0, l] \rightarrow X$ można przedłużyć do geodezyjnej $c': [0, \infty) \rightarrow X$ w taki sposób, że $c'|_{[0, l]} = c$ (zobacz [P02, str. 137]). Warto podkreślić, że powyższą własność można wprowadzić w dowolnej przestrzeni geodezyjnej (zobacz [11, Definition II.5.7]) i w przypadku zupełnych przestrzeni $CAT(0)$ (jak również $CAT(\kappa)$ z ujemnym parametrem κ) obie definicje pokrywają się (zobacz [11, Lemma II.5.8]).

Wszystkie drzewa metryczne, kule Hilberta oraz przestrzenie $CAT(\kappa)$ z ujemnym parametrem κ są także hiperboliczne w sensie Gromowa. Oznacza to, że w przypadku przestrzeni jednoznacznie geodezyjnych istnieje nieujemna liczba δ taka, że w dowolnym trójkącie geodezyjnym $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ zachodzi warunek

$$d(x, [x_i, x_j] \cup [x_j, x_k]) \leq \delta \quad \text{dla wszystkich } x \in [x_i, x_k],$$

gdzie $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ (zobacz [11, Section III.H.1] oraz [14, Section 1.2]). Przestrzenie takie nazywamy δ -hiperbolicznymi lub hiperbolicznymi w sensie Gromowa. Pojęcie hiperboliczności można wprowadzić również w dowolnej przestrzeni metrycznej niezależnie od istnienia geodezyjnych i dla jednoznacznie geodezyjnej przestrzeni X pojęcia te są równoważne (zobacz [13, Section 8.4.1] i [24]).

Przestrzenie $\text{CAT}(\kappa)$ (ze średnicą mniejszą od $D_\kappa/2$) są również jednostajnie wypukłe (formalną definicję jednostajnie wypukłych przestrzeni geodezyjnych można znaleźć na przykład w [P13, 36]), więc dowolny ciąg ograniczony (x_n) w X ma dokładnie jedno centrum asymptotyczne, zazwyczaj oznaczane przez $A((x_n))$. Przypomnijmy, że $A((x_n))$ jest takim punktem, że

$$\limsup_n \rho(A((x_n)), x_n) = \inf_{x \in X} \limsup_n \rho(x, x_n).$$

W dowolnej przestrzeni geodezyjnej dowolny ciąg ograniczony nie musi mieć dokładnie jednego centrum asymptotycznego, dlatego też o przestrzeniach, które mają taką własność powiemy, że mają własność jedyne centrum asymptotyczne (zobacz [P04]).

Wprowadźmy teraz klasę przestrzeni ogólniejszą niż $\text{CAT}(\kappa)$. Powiemy, że przestrzeń geodezyjna jest wypukła w sensie Busemanna jeśli dla dowolnej pary geodezyjnych c, c' o wspólnym wierzchołku zachodzi warunek

$$\rho(c(st), c'(s\tau)) \leq s\rho(c(t), c'(\tau)) \quad (4.2)$$

dla każdego $s \in (0, 1)$ (zobacz [50, Chapter 8]). Wiadomym jest, że dowolna ściśle wypukła przestrzeń Banacha jest wypukła w sensie Busemanna. Ponadto, każda przestrzeń wypukła w sensie Busemanna jest jednoznacznie geodezyjna, ale nie odwrotnie. Jako kontrprzykład możemy rozważyć wypukły podzbiór C dwuwymiarowej sfery jednostkowej S^2 o średnicy mniejszej niż $\pi/2$. Wówczas C jest nie tylko przestrzenią jednoznacznie geodezyjną, ale spełnia również nierówność $\text{CAT}(1)$. Jednocześnie nie jest ona wypukła w sensie Busemanna. W tym miejscu warto podkreślić, że przestrzenie $\text{CAT}(\kappa)$ są wypukłe w sensie Busemanna gdy tylko $\kappa \leq 0$.

Zauważmy, że czasami zamiast wypukłości w sensie Busemanna używa się pojęcia przestrzeni W-hiperwypukłych (zobacz [35]). W tym przypadku nie musimy zakładać, że przestrzeń jest koniecznie jednoznacznie geodezyjna, a jedynie że istnieje rodzina $\mathcal{W}$ geodezyjnych, taka że dowolnej parze punktów odpowiada dokładnie jeden element z $\mathcal{W}$ i dla dowolnych elementów z rodziny $\mathcal{W}$ zachodzi warunek (4.2).

Jedną z najbardziej owocnych metod budowania nowych przestrzeni geodezyjnych jest operacja sklejania. Jeśli $(X_\lambda, d_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ jest rodziną przestrzeni

metrycznych z wyróżnionymi podzbiórami domkniętymi $A_\lambda \subset X_\lambda$, a jednocześnie A jest przestrzenią metryczną, taką że dla każdego $\lambda \in \Lambda$ istnieje izometria $i_\lambda: A \rightarrow A_\lambda$, to możemy rozważać przestrzeń ilorazową X sumy przestrzeni $\coprod_\Lambda X_\lambda$ przez relację równoważności $[i_\lambda(a) \sim i_{\lambda'}(a) \forall a \in A, \lambda, \lambda' \in \Lambda]$. Jeśli utożsamimy każdy X_λ z jego obrazem w X i zapiszemy

$$X = \bigsqcup_A X_\lambda,$$

to X jest sklejeniem X_λ wzdłuż A (zobacz [11, Definition I.5.23]). Niech odległość dwóch elementów $x \in X_\lambda$ i $y \in X_{\lambda'}$ będzie dana wzorem:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d_\lambda(x, y) && \text{gdy } \lambda = \lambda' \\ d(x, y) &= \inf_{a \in A} \{d_\lambda(x, i_\lambda(a)) + d_{\lambda'}(i_{\lambda'}(a), y)\} && \text{gdy } \lambda \neq \lambda'. \end{aligned}$$

Wówczas d jest metryką na X (zobacz [11, Lemma I.5.24]).

W przypadku, gdy sklepane przestrzenie są przestrzeniami $\text{CAT}(\kappa)$ kluczowe znaczenie ma Twierdzenie o sklepaniu Retchnayka.

Twierdzenie 4.3. ([11] Theorem II.11.3)

Niech $(X_\lambda, d_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ będzie rodziną przestrzeni $\text{CAT}(\kappa)$ z wyróżnionymi domkniętymi podzbiórami $A_\lambda \subset X_\lambda$. Natomiast A – przestrzenią metryczną, taką że dla każdego $\lambda \in \Lambda$ istnieje izometria $i_\lambda: A \rightarrow A_\lambda$. Niech $X = \bigsqcup_A X_\lambda$ będzie przestrzenią ilorazową powstałą przez sklejenie X_λ wzdłuż A . Jeśli A jest zupełną przestrzenią $\text{CAT}(\kappa)$, a każdy zbiór A_λ jest D_κ – wypukły i zupełny, to X jest przestrzenią $\text{CAT}(\kappa)$.

Zauważmy teraz, że w wyniku sklepania przestrzeni wypukłych w sensie Busemanna możemy niekoniecznie otrzymać przestrzeń tego samego typu. Przykład takiej przestrzeni ilorazowej jak również dodatkowe założenia, przy których sklepanie jest przestrzenią wypukłą w sensie Busemanna można znaleźć w [P26].

Na zakończenie tego podrozdziału skupimy się na definicji brzegu przestrzeni. Istnieje wiele różnych metod definiowania brzegu w nieskończoności dla przestrzeni geodezyjnych. W przypadku przestrzeni wypukłych w sensie Busemanna najbardziej użyteczna jest definicja poprzez promienie geodezyjne. Ponadto definicja ta związana jest bezpośrednio z pojęciem ograniczoności geodezyjnej przestrzeni, która gra kluczową rolę w głównych rozważaniach autoreferatu.

Niech X będzie przestrzenią geodezyjną. Powiemy, że dwa promienie geodezyjne $c, c': [0, \infty) \rightarrow X$ są asymptotyczne, jeśli istnieje liczba dodatnia M , taka że $d(c(t), c'(t)) \leq M$ dla wszystkich $t > 0$ (zobacz [11, Definition II.8.1]).

Wówczas brzeg geodezyjny $\partial^g X$ definiujemy jako zbiór klas abstrakcji zbioru promieni geodezyjnych, przy czym dwa promienie są w relacji wtedy i tylko wtedy, gdy są asymptotyczne. Jeżeli X jest wypukła w sensie Busemanna, to w domknięciu $X \cup \partial^g X$ możemy wprowadzić topologię stożkową, która na X pokrywa się z topologią wyjściową. Dla punktu w nieskończoności $\xi \in \partial^g X$ będzie to topologia zwarto-otwarta na odcinkach metrycznych i promieniach geodezyjnych wychodzących z punktu bazowego $o \in X$ (formalną definicję można znaleźć na przykład w [P03, Section 2]). W [15, Lemma 5.3] wykazano, że powyższa definicja brzegu nie zależy od wyboru punktu bazowego, więc brzeg jest dobrze zdefiniowany. Dla pewnych wyróżnionych klas przestrzeni wypukłych w sensie Busemanna definicja ta pokrywa się z brzegiem w nieskończoności w sensie Gromowa bądź z uzwarceniem Kuratowskiego poprzez funkcje Busemanna (zobacz na przykład [1], [8] oraz [27]). W szczególności dla zupełnych przestrzeni CAT(0) mamy:

Stwierdzenie 4.4. ([8] Proposition II.2.5)

Niech (x_n) będzie ciągiem w X spełniającym warunek $\rho(x_0, x_n) \rightarrow \infty$. Wówczas ciąg funkcji $b(x_n, x_0, \cdot) = \rho(x_n, \cdot) - \rho(x_n, x_0)$ jest zbieżny do funkcji Busemanna f wtedy i tylko wtedy, gdy $[x_0, x_n]$ jest zbieżny do promienia geodezyjnego $\sigma = \sigma_{x_0, \xi}$. Ponadto zachodzi $f = b_\sigma$, gdzie

$$b_\sigma(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho(\sigma(t), x) - t).$$

Jeśli X jest zupełną przestrzenią CAT(κ) z ujemnym κ , to wszystkie wspomniane definicje brzegu pokrywają się (zobacz [10] oraz [21]).

4.3 Wcześniejsze badania innych autorów

Z racji, że moje główne osiągnięcie związane jest z własnością punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających zdefiniowanych na nieograniczonych bądź niewypukłych podzbiorach przestrzeni CAT(0) chciałabym teraz skupić się na wynikach otrzymanych przez grono matematyków na przełomie dwudziestego i dwudziestego pierwszego wieku w tym konkretnym kierunku. Warto przy tym zauważyć, że wszystkie wyniki dotyczące przypadku nieograniczonych przestrzeni CAT(0) dotyczyły jak dotąd tylko kilku konkretnych i bardzo specyficznych podklas tych przestrzeni, tak więc po pierwsze nie odzwierciedlały pełnego obrazu sytuacji, a po drugie zastosowane w nich metody badawcze nie mogły zostać wykorzystane w ogólniejszych przypadkach. Od nich rozpoczniemy nasze rozważania.

Wspomnieliśmy już, że każda przestrzeń Hilberta jest przestrzenią CAT(0), przytoczmy zatem bardzo dobrze znany wynik W.O. Raya z roku 1980:

Twierdzenie 4.5. ([51] Theorem 1)

Niech K będzie domkniętym i wypukłym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni Hilberta H . Wówczas K ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających wtedy i tylko wtedy, gdy K jest ograniczony.

Siedem lat później Sine przedstawił znacznie prostszy dowód powyższego faktu (zobacz [57]). Chociaż nowy dowód opierał się na twierdzeniu Banacha-Steinhaus'a, nie mógł zostać zaadoptowany do żadnej szerszej klasy przestrzeni Banacha. Niedawno kolejną, silniejszą (tylko dla przypadku przestrzeni Hilberta) wersję tego wyniku uzyskał F. Kohsaka w pracy [38]. Ten rezultat pozostaje prawdziwy także w każdej gładkiej, ściśle wypukłej, refleksywnej przestrzeni Banacha, jednakże tylko dla odwzorowań silnie nieoddalających (tzw. firmly-nonexpansive mappings), czyli odwzorowań spełniających warunek

$$(Tx - Ty, JTx, JTy) \leq (Tx - Ty, Jx - Jy), \quad (4.3)$$

gdzie J jest znormalizowanym odwzorowaniem dualnym. Pytanie czy rezultat analogiczny do wyniku Raya zachodzi w jakiegokolwiek bardziej ogólnej klasie przestrzeni poza przestrzeniami Hilberta pozostaje otwarte.

W tym momencie warto podkreślić jedną rzecz. O ile problem istnienia punktów stałych dla odwzorowań nieoddalających w wielu przypadkach pozostaje nierozstrzygnięty, o tyle pełna charakterystyka geometryczna zbiorów, które mają aproksymacyjną własność punktu stałego jest dobrze znana, dlatego też w dalszej części autoreferatu nie poświęcimy jej uwagi. Przypomnijmy, że X ma aproksymacyjną własność punktu stałego (dla odwzorowań nieoddalających) jeśli dla każdego odwzorowania nieoddalającego $T: C \rightarrow C$ określonego na niepustym, domkniętym i wypukłym $C \subset X$ zachodzi warunek

$$\inf_{x \in C} \rho(x, Tx) = 0.$$

W pracy [56] I. Shafrir udowodnił następujący fakt:

Twierdzenie 4.6. (porównaj z [56, Theorem 2.4])

Niech X będzie geodezyjną przestrzenią wypukłą w sensie Busemanna, która ma własność przedłużania. Wówczas wypukły zbiór $C \subset X$ ma aproksymacyjną własność punktu stałego wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera krzywych kierunkowych (directional curves).

Przy czym powiemy, że krzywa $\gamma: [0, \infty) \rightarrow X$ jest kierunkowa jeśli istnieje $b \geq 0$, takie że

$$t - s - b \leq \rho(\gamma(s), \gamma(t)) \leq t - s$$

dla dowolnych $t \geq s \geq 0$. Jak wynika ze znanych wyników Raya (dla przestrzeni Hilberta) oraz Goebela i Reicha (dla kul Hilberta – patrz poniżej) istnienia punktu stałego nie można w żaden bezpośredni sposób wnioskować z aproksymacyjnej własności punktu stałego i z tego też powodu przytoczony powyżej wynik Shafrira nie przyczynia się do rozwiązania kluczowego problemu. Na koniec, aby nie powodować bałaganu w cytowaniach, chciałabym zaznaczyć, że w przypadku literatury angielskojęzycznej można spotkać się z podwójnym nazewnictwem tej własności (zobacz na przykład [52]).

Całkowicie inna sytuacja niż opisana powyżej i dotycząca przestrzeni Hilberta ma miejsce w przypadku zespolonej kuli Hilberta z metryką hiperboliczną. Mianowicie, K. Goebel i S. Reich wykazali, że dla każdego odwzorowania nieoddalającego zdefiniowanego na $\mathcal{B}$ zachodzi dokładnie jedna z poniższych możliwości:

Twierdzenie 4.7. (porównaj [22] Theorem 24.1 oraz 25.2)

Niech $T: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym. Wówczas prawdziwy pozostaje dokładnie jeden z przypadków

- (i) T ma niepusty, domknięty i wypukły zbiór punktów stałych i każda krzywa aproksymująca pierwszego rodzaju $z_t(a)$ jest zbieżna (zobacz (4.5));
- (ii) istnieje dokładnie jeden punkt na brzegu $\mathcal{B}$, który jest granicą względem normy dla każdej krzywej aproksymującej pierwszego rodzaju.

Jeśli rozważymy teraz bardziej ogólny przypadek odwzorowań określonych na niepustym, domkniętym i wypukłym podzbiorze $K \subset \mathcal{B}$, to z podpunktu (iii) Stwierdzenia 4.2 wynika, że dla każdego odwzorowania $T: K \rightarrow K$, które nie ma punktów stałych, istnieje punkt na brzegu, który należy do $\bar{K}$ (domknięcia K względem normy). Stąd ostatecznie otrzymujemy pełną charakterystykę podzbiorów $\mathcal{B}$:

Wniosek 4.8. ([P03] Corollary 4.4)

Niech $K \subset \mathcal{B}$ będzie zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym. Wówczas K ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających wtedy i tylko wtedy, gdy K jest zbiorem geodezyjnie ograniczonym.

Przypomnijmy, że przestrzeń geodezyjną nazywamy geodezyjnie ograniczoną, gdy nie zawiera promienia geodezyjnego.

Z podobną sytuacją stykamy się w przypadku drzew metrycznych, czyli przestrzeni, na które możemy spojrzeć jako na przestrzenie $\text{CAT}(-\infty)$. Na początku tego wieku W. A. Kirk wykazał, że:

Twierdzenie 4.9. ([30] Theorem 3.4.)

Załóżmy, że X jest geodezyjnie ograniczonym i zupełnym drzewem metrycznym. Wówczas każde odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow X$ ma punkt stały.

Oczywiście powyższe twierdzenie daje nam tak naprawdę pełną charakterystykę zbiorów, które mają własność punktu stałego dla odwzorowań ciągłych. Rzeczywiście, znów korzystając z podpunktu (iii) Stwierdzenia 4.2 wiemy, że rzutowanie na promień geodezyjny jest odwzorowaniem nieoddalającym, jeśli więc rozważymy przesunięcie wzdłuż promienia, to otrzymamy odwzorowanie nieoddalające a zatem i ciągłe, które jednakże nie ma punktu stałego. Ostatecznie rozważania te prowadzą do tej samej charakterystyki zbiorów jak miało to miejsce w przypadku zespolonej kuli Hilberta.

Wniosek 4.10. *Niech X będzie zupełnym drzewem metrycznym, a K jego niepustym, domkniętym i wypukłym podzbiorem. Wówczas K ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem geodezyjnie ograniczonym.*

Częściowo wynik ten został przedstawiony już w pracy tego samego autora napisanej wspólnie z R. Espínolą dla komutującej rodziny odwzorowań nieoddalających (zobacz [20, Theorem 4.3]).

Zauważmy, że na wszystkie opisane powyżej przykłady możemy spojrzeć jako na bardzo szczególne podklasy przestrzeni $CAT(0)$, jednakże w każdym z tych przypadków zastosowano narzędzia, które nie dają wyników dla jakichkolwiek bardziej ogólnych typów przestrzeni. Stąd też główną ideą moich badań, zainicjowanych owocnymi dyskusjami z prof. Rafaellem Espínolą z Uniwersytetu w Sewilli, było uporządkowanie, pogłębienie i uzupełnienie stanu wiedzy na temat własności punktu stałego w nieograniczonych przestrzeniach $CAT(0)$.

W dalszej części rozważmy odwzorowania nieoddalające zdefiniowane na niewypukłych podzbiorach przestrzeni. Podobnie jak zostało to zrobione w poprzednim przypadku, rozpoczniemy naszą analizę od najbardziej naturalnego przykładu przestrzeni Hilberta. Założmy zatem, że D jest niepustym podzbiorem przestrzeni Hilbert H . Następujący wynik autorstwa K. Goebła i R. Schöneberga był pierwszym dotyczącym istnienia punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających $T: D \rightarrow D$:

Twierdzenie 4.11. *(zobacz [23, Theorem] oraz [55, Corollary 3.2]) Niech T będzie odwzorowaniem nieoddalającym z niepustego podzbioru D przestrzeni H w siebie. Wówczas T ma punkt stały w zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(T^n x)$ jest ograniczony dla pewnego (a zatem dla wszystkich) $x \in D$ i dla każdego $y \in \bar{co}\{T^n x : n > 0\}$ istnieje dokładnie jeden $p \in D$, taki że $\|y - p\| = \inf_{z \in D} \|y - z\|$.*

Przypomnijmy, że w przypadku przestrzeni geodezyjnych otoczkę wypukłą definiujemy indukcyjnie. Mianowicie, niech $Y \subset X$. Oznaczmy przez

$G^1(Y)$ sumę wszystkich odcinków geodezyjnych z X o końcach w zbiorze Y . Dla $n > 1$ przyjmijmy, że

$$G^n(Y) := G^1(G^{n-1}(Y)).$$

Wówczas otoczka wypukła zbioru Y jest równa

$$co Y = \bigcup_{n>0} G^n(Y).$$

Natomiast $\bar{co} Y$ oznacza jej domknięcie w przestrzeni X (zobacz [P02, str. 137–138]).

W 2002 roku B. D. Rouhani otrzymał ten sam wynik dla bardziej ogólnej klasy odwzorowań, mianowicie dla odwzorowań asymptotycznie nieoddalających w średnim sensie (asymptotically nonexpansive in the intermediate sense) (zobacz [55, Theorem 3.1]). Rozpocznijmy od przypomnienia definicji kilku typów odwzorowań asymptotycznie nieoddalających, jednakże ograniczymy się tylko do tych, które pojawiają w dalszej części pracy.

Definicja 4.12. ([55] str.1099)

Niech D będzie niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, ρ) . Odwzorowanie $T: D \rightarrow D$ jest typu asymptotycznie nieoddalającego, jeżeli zachodzi warunek

$$\limsup_n M(x, n) \leq 0,$$

gdzie $M(x, n) = \sup_{y \in X} (\rho(T^n x, T^n y) - \rho(x, y))$. Jeśli ponadto $M(x, n)$ mogą być wspólnie ograniczone przez ciąg zbieżny do zera, to odwzorowanie nazywamy asymptotycznie nieoddalającym w średnim sensie.

W dowodzie tego wyniku Rouhani zastosował metodę, która odegrała kluczową rolę w jego wcześniejszej pracy dotyczącej problemu przedłużenia odwzorowań nieoddalających. Bardziej szczegółowo w pracy [54] B.D. Rouhani podał konstrukcyjny dowód poniższego twierdzenia Kirszbraun–Valentine’a:

Twierdzenie 4.13. ([54] Theorem 3.2)

Niech D będzie niepustym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni Hilberta H , natomiast $T: D \rightarrow D$ – odwzorowaniem nieoddalającym. Wówczas T ma absolutny punkt stały w H wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(T^n x)$ jest ograniczony dla pewnego (a zatem dla wszystkich) $x \in D$. Jeśli tak, to dla każdego $z \in D$ centrum asymptotyczne ciągu $(T^n z)$ jest absolutnym punktem stałym odwzorowania T . Ponadto odwzorowanie U z D w zbiór AF absolutnych punktów stałych T , które każdemu $z \in D$ przyporządkowuje centrum asymptotyczne $(T^n z)$ jest nieoddalające.

Przypomnijmy definicję absolutnego punktu stałego, które to pojęcie pojawia się w powyższym twierdzeniu.

Definicja 4.14. ([P02] Definition 2.12, [54] Definition 2.2)

Niech X będzie przestrzenią metryczną, $D \subset X$ – niepustym zbiorem, natomiast $T: D \rightarrow D$ – odwzorowaniem nieoddalającym. Powiemy, że $x \in X$ jest absolutnym punktem stałym T , jeśli przedłużenie $\tilde{T}: D \cup \{x\} \rightarrow D \cup \{x\}$, takie że $\tilde{T}x = x$ jest nieoddalające i ponadto x jest punktem stałym dowolnego przedłużenia nieoddalającego odwzorowania T na sumę zbioru D i pewnego podzbioru przestrzeni X zawierającego punkt x .

Spójrzmy teraz na przestrzeń Hilberta jako na przykład przestrzeni o stałej krzywiznie (czyli mającej to samo ograniczenie krzywizny w sensie Alexandrova z góry i z dołu). Prowadzi to do naturalnego pytania jak w ogólnym przypadku zachowują się odwzorowania nieoddalające (bądź asymptotycznie nieoddalające) zdefiniowane na pewnym podzbiorze przestrzeni o stałej krzywiznie. Pierwszy wynik dotyczący tego problemu został przedstawiony przez T. Kuczumowa i A. Stachurę dla przypadku jednowymiarowej kuli zespolonej Hilberta (z metryką hiperboliczną) oraz dowolnej kuli rzeczywistej Hilberta $\mathcal{D}$ (zobacz [41] i [42]). Następnie rezultat ten został uogólniony przez U. Langa i V. Schroedera w następujący sposób:

Twierdzenie 4.15. ([43] Theorem A.)

Niech $\kappa \in \mathbb{R}$, i niech X, Y będą dwiema przestrzeniami geodezyjnymi, takimi że wszystkie trójkąty geodezyjne o średnicy $< 2D_\kappa$ w X bądź w Y są odpowiednio κ -grube bądź κ -cienkie. Załóżmy też, że Y jest przestrzenią zupełną. Jeśli S teraz będzie dowolnym podzbiorem X a $f: S \rightarrow Y$ odwzorowaniem ze stałą Lipschitza 1, i takim że $\text{diam}(S) \leq D_\kappa/2$, to istnieje przedłużenie $\bar{f}: X \rightarrow Y$ odwzorowania f z tą samą stałą Lipschitza.

Pojęcia κ -grube i κ -cienkie użyte w Twierdzeniu 4.15 oznaczają odpowiednio krzywiznę lokalnie ograniczoną z dołu bądź z góry przez κ .

We wspomnianej już pracy Kuczumowa i Stachury jest podany również przykład pokazujący, że w przypadku zespolonej kuli Hilberta można znaleźć takie odwzorowanie nieoddalające zdefiniowane na zbiorze $D \subset \mathcal{B}$ (będące nawet izometrią), które nie może zostać przedłużone na całą przestrzeń $\mathcal{B}$ (w [22, Remark, str. 119] znaleźć można przykład skończenie wymiarowy, natomiast w [42, Example 1] przykład w przestrzeni nieskończenie wymiarowej). Z racji, że dwuwymiarowa przestrzeń $\mathcal{B}$ ma krzywiznę ograniczoną z góry i z dołu przez dwie różne liczby, możemy przypuszczać, że dalsze badania dotyczące istnienia punktów stałych czy też absolutnych punktów

stałych powinny pójść w kierunku odwzorowań zdefiniowanych na przestrzeniach o stałej krzywiznie, jak zostało to zrobione w mojej pracy [P02] napisanej wspólnie z Rafaelem Espínolą.

4.4 Nieograniczone przestrzenie CAT(0) i odwzorowania nieoddalające

Jak już wspomniałam we wstępie wyniki dotyczące zachowania odwzorowań nieoddalających w konkretnych przykładach przestrzeni CAT(0) jak również twierdzenie Raya stanowiły dla mnie główną inspirację do poświęcenia uwagi problemowi istnienia punktów stałych odwzorowań nieoddalających, których dziedzinami były nieograniczone podzbiory przestrzeni geodezyjnych.

Na początku moich badań, które rozpocząłam we współpracy z Rafaelem Espínolą, skupiliśmy się na bardziej ogólnych przykładach przestrzeni CAT(0), w których własność punktu stałego była spełniona bądź też nie. Rozpoczęliśmy od zaproponowania konstrukcji (opartej na sklejaniu przestrzeni CAT(0) – zobacz Twierdzenie 4.3) szerokiej klasy przestrzeni, w których odwzorowania nieoddalające mają punkty stałe.

Stwierdzenie 4.16. ([P01] Proposition 3.1)

Niech C będzie zupełną przestrzenią CAT(0), którą można zapisać w postaci

$$C = C_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

gdzie:

- (i) C_0 jest ograniczony, domknięty i wypukły,
- (ii) C_n jest domknięty i ograniczony, przy czym $C_0 \cup C_n$ jest zbiorem wypukłym dla każdego n ,
- (iii) $\{C_n\}$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych i takich że $\text{diam}(C_n)$ dąży do nieskończoności gdy $n \rightarrow \infty$,
- (iv) $W_n = C_0 \cap C_n$ jest niepusty, $\text{diam}(W_n) \leq \alpha$ dla każdego n oraz $\text{dist}(W_n, W_m) = \inf\{d(x, y) : x \in W_n, y \in W_m\} \geq \alpha$ dla pewnej liczby $\alpha \geq 0$ i dowolnego $n \neq m$.

Wówczas zbiór C jest nieograniczony, ale jest geodezyjnie ograniczony i ma własność punktu stałego.

Dowód powyższego stwierdzenia oparliśmy na charakterystyce aproksymacyjnej własności punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających w pierwotnej wersji autorstwa I. Shafrira (zobacz Rozdział 4.3) a w przypadku przestrzeni CAT(0) podanej przez W. A. Kirka:

Twierdzenie 4.17. ([31] Theorem 25)

Domknięty i wypukły podzbiór C zupełnej przestrzeni CAT(0) z własnością przedłużania ma aproksymacyjną własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających wtedy i tylko wtedy, gdy C nie zawiera promienia geodezyjnego.

Wówczas jako bezpośredni wniosek ze Stwierdzenia 4.16 otrzymujemy rezultat analogiczny do wyniku Kirka (zobacz Twierdzenie 4.9) dla odwzorowań nieoddalających.

Wniosek 4.18. ([P01] Corollary 3.4)

Niech X będzie an nieograniczonym, ale ograniczonym geodezyjnie zupełnym drzewem metrycznym, wówczas X ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających.

W poniższym przykładzie znaleźć można inny przykład przestrzeni spełniającej założenia Stwierdzenia 4.16.

Przykład 4.19. ([P01] Example 3.3)

Niech C będzie domkniętą kulą jednostkową w ℓ_2 i niech $\{e_n\}$ będą elementami jej bazy kanonicznej. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujemy zbiór

$$C_n = \bar{co} \left(B \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right) e_n, \frac{1}{n} \right) \cup \{ne_n\} \right),$$

gdzie $\bar{co}$ oznacza standardowo domknięcie otoczki wypukłej. Wybierzmy teraz $N \in \mathbb{N}$ tak, aby $\text{dist}(C_n, C_m) = \inf\{d(x, y) : x \in C_n, y \in C_m\} > 1$ dla dowolnych $n, m \geq N$. Sklejając teraz C z każdym ze zbiorów C_n dla $n \geq N$ na mocy Twierdzenia o sklejanii Retchnayka (zobacz Twierdzenie 4.3) otrzymujemy przestrzeń CAT(0). Sklejając je tym razem wzdłuż C otrzymujemy

$$X = C \cup \bigcup_{n \geq N} C_n,$$

która to przestrzeń jest zupełną przestrzenią CAT(0).

W dalszych badaniach wprowadziliśmy pojęcie własności U . Własność ta pozwalała rozróżnić dwie klasy przestrzeni CAT(0). Pierwsza zawierała te przestrzenie, w których odwzorowania miały punkty stałe tylko jeśli miały ograniczoną dziedzinę, natomiast druga przestrzenie, w których, tak samo

jak na przykład w zespolonej kuli Hilberta z metryką hiperboliczną, punkty stałe miały także odwzorowania zdefiniowane na podzbiorach geodezyjnie ograniczonych. Oczywiście cały czas rozważamy tylko podzbiory domknięte i wypukłe.

Definicja 4.20. ([P01] Definition 4.1) Niech X będzie nieograniczoną przestrzenią geodezyjną. Powiemy, że X ma własność U jeśli dowolny wypukły domknięty i nieograniczony zbiór $Y \subset X$ jest albo geodezyjnie nieograniczony albo dla każdego domkniętego wypukłego i nieograniczonego zbioru $K \subset Y$ oraz punktu $x \in K$ istnieje zbiór $K_1 \subset K$ (także domknięty, wypukły, nieograniczony), taki że $d(x, K_1) \geq 1$.

Prostymi przykładami przestrzeni, które mają własność U są między innymi:

Stwierdzenie 4.21. ([P01] Proposition 4.2)

Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha. Wówczas X ma własność U .

Stwierdzenie 4.22. ([P01] Proposition 4.5)

Każda zupełna i lokalnie zwarta przestrzeń $CAT(0)$ ma własność U .

Zauważmy w tym miejscu, że w przypadku lokalnie zwartych przestrzeni $CAT(0)$ możemy powiedzieć znacznie więcej jak pokazuje Twierdzenie 3.6 z pracy [P01] (porównaj także z wynikami z podrozdziału 5.2).

Jednocześnie warto zauważyć, że:

Stwierdzenie 4.23. ([P01] Proposition 4.3)

Jeśli nieograniczone drzewo metryczne jest geodezyjnie ograniczone, to nie ma własności U .

Własność U została wykorzystana w następującym wyniku:

Twierdzenie 4.24. ([P01] Theorem 5.1)

Niech X będzie zupełną przestrzenią $CAT(0)$, która ma własność U . Wówczas niepusty domknięty i wypukły podzbiór $Y \subset X$ ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest zbiorem ograniczonym.

Stąd i Stwierdzenia 4.21 otrzymujemy jako natychmiastowy wniosek wynik Raya (wraz z alternatywną wersją jego dowodu). Jednocześnie warto zauważyć, że w twierdzeniu zakładamy, że X jest przestrzenią $CAT(0)$, tak więc nie możemy z niego wnioskować czegokolwiek na temat własności punktu stałego dla przestrzeni Banacha, które nie są unitarne.

Wiemy już z wcześniejszych części tego autoreferatu, że przestrzenie $CAT(\kappa)$ z ujemnym parametrem κ są hiperboliczne w sensie Gromova. Prowadzi to bezpośrednio do poniższej konkluzji:

Stwierdzenie 4.25. ([P01] Corollary 5.5.)

Niech X będzie przestrzenią $CAT(\kappa)$ z $\kappa < 0$. Wówczas dla dowolnych dodatnich parametrów r i ε można znaleźć liczbę $R > 0$, taką że dla punktów x_0, x oraz $y \in X$, dla których odległość rzutowań punktów x i y na kulę domkniętą $B(x_0, r)$ spełnia warunek $\rho(u, v) \geq \varepsilon$, poniższe przecięcie nie jest zbiorem pustym

$$B(x_0, R) \cap [x, y] \neq \emptyset.$$

A stąd możemy wywnioskować:

Twierdzenie 4.26. ([P01] Theorem 5.6)

Niech X będzie nieograniczoną zupełną przestrzenią $CAT(\kappa)$ z parametrem $\kappa < 0$. Ponadto, niech X zawiera nieograniczony ale geodezyjnie ograniczony podzbiór. Wówczas X nie ma własności U .

Wyniki z pracy [P01] pozwoliły nam na postawienie następujących pytań dotyczących struktury przestrzeni nieograniczonych z własnością punktu stałego i stanowiły inspirację do moich dalszych samodzielnych badań w tym kierunku.

Uwaga 4.27. ([P01] Remark 5.7)

- (i) Z Przykładu 4.19 możemy wywnioskować, że przestrzeń $CAT(0)$ nie musi być też przestrzenią $CAT(\kappa)$ z ujemnym parametrem $\kappa < 0$, by odpowiednik twierdzenia Raya pozostawał nieprawdziwy. Jednocześnie przestrzeń z tego przykładu jest δ -hiperboliczna. Zatem w kolejnym kroku w badaniach należałoby skupić się na odpowiedzi na pytanie, czy twierdzenie to pozostaje nieprawdziwe dla zupełnych przestrzeni $CAT(0)$, które są hiperboliczne w sensie Gromova, ale nie są lokalnie zwarte. A także czy nierówność $CAT(0)$ wystarczyłoby zastąpić wypukłością w sensie Busemanna.
- (ii) Niech X będzie przestrzenią zupełną, która ponadto jest drzewem metrycznym, kulą Hilberta bądź przestrzenią o stałej krzywiznie. Wiadomo, że każde odwzorowanie nieoddalające działające z nieograniczonego, domkniętego i wypukłego podzbioru X w siebie ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy podzbiór jest geodezyjnie ograniczony. Czy powyższe stwierdzenie pozostaje prawdziwe, gdy rozważymy podzbiór dowolnej zupełnej przestrzeni $CAT(\kappa)$ z ujemnym parametrem κ ?
- (iii) Czy własność U jest warunkiem koniecznym na to, aby w przestrzeni $CAT(0)$ zachodziło twierdzenie Raya?

4.5 Własność punktu stałego w zbiorach nieograniczonych

W ramach próby odpowiedzi na pytanie (ii) z Uwagi 4.27 w kolejnym kroku moich badań skupiłam się na przestrzeniach, których krzywizna (w sensie Alexandrova) jest ograniczona z góry przez pewną liczbę ujemną, czyli przestrzeniami $CAT(\kappa)$ z $\kappa < 0$. W samodzielnej pracy [P03] dałam pozytywną odpowiedź na pytanie z pracy [P01]. Wykazałam mianowicie:

Twierdzenie 4.28. ([P03] Theorem 4.1)

Niech X będzie zupełną przestrzenią $CAT(-1)$ i niech niepusty zbiór $K \subset X$ będzie domknięty i wypukły. Wówczas K ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających $T: K \rightarrow K$ wtedy i tylko wtedy, gdy K jest geodezyjnie ograniczony.

Założenie, że krzywizna jest ograniczona z góry akurat przez liczbę -1 odgrywało rolę czysto techniczną w dowodzie i mogło zostać zastąpione przez dowolną liczbę ujemną κ jak pokazuje poniższy wniosek:

Wniosek 4.29. ([P03] Corollary 4.2)

Niech X będzie zupełną przestrzenią $CAT(\kappa)$ z parametrem $\kappa < 0$ i niech niepusty zbiór $K \subset X$ będzie domknięty i wypukły. Wówczas K ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających $T: K \rightarrow K$ wtedy i tylko wtedy, gdy K jest geodezyjnie ograniczony.

Powyższy wynik jest naturalnym uogólnieniem wyniku K. Goebbla i S. Reicha na temat zachowania się odwzorowań zdefiniowanych na bardzo szczególnym przypadku rzeczywistej kuli Hilberta:

Twierdzenie 4.30. ([22] Theorem 32.3)

Domknięty i wypukły podzbiór C przestrzeni $\mathcal{D}$ (czyli rzeczywistej kuli Hilberta z metryką hiperboliczną) ma własność punktu stałego (i aproksymacyjną własność punktu stałego) dla odwzorowań nieoddalających wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem geodezyjnie ograniczonym.

Zauważmy, że w przeciwieństwie do przypadku własności punktu stałego dla odwzorowań ciągłych (zobacz Rozdział 5.3) w powyższym twierdzeniu nie musieliśmy zakładać, że przestrzeń ma krzywiznę ograniczoną także z dołu. Przykładami tego typu przestrzeni są między innymi zespolone (oraz rzeczywiste) kule Hilberta z metryką hiperboliczną, gdzie krzywizna (w sensie Alexandrova) jest ograniczona odpowiednio z góry i z dołu przez -1 oraz -4 (zostało to pokazane w [P03, str. 332–333]).

Po tych dygresjach wróćmy do omówienia głównego wyniku z pracy [P03]. Dowód tego twierdzenia opiera się w znacznej mierze na geometrii przestrzeni

$\text{CAT}(\kappa)$. Przy czym jedna z własności geometrycznych wykazanych w [P03] – a mianowicie, oszacowanie długości trzeciego boku w trójkącie geodezyjnym, zachodzi tylko i wyłącznie w przestrzeniach o krzywiznie ujemnej jak pokazuje poniższy lemat:

Lemat 4.31. ([P03] Lemma 3.2)

Niech X będzie przestrzenią $\text{CAT}(-1)$. Rozważmy ciąg trójkątów geodezyjnych $(\Delta(x_n, y_n, z_n))_{n=1}^\infty$, taki że

$$\angle_{y_n}(x_n, z_n) \geq \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

oraz

$$d(x_n, y_n) \rightarrow \infty, \quad d(x_n, z_n) - d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Wówczas możemy wnioskować, że $d(y_n, z_n) \rightarrow 0$.

Ponieważ powyższy lemat jest prawdziwy tylko dla przestrzeni $\text{CAT}(\kappa)$, których ograniczenie krzywizny κ jest liczbą ujemną, metoda dowodowa zastosowana w pracy [P03] nie pozwala na bezpośrednie uogólnienie głównego wyniku na przypadek przestrzeni $\text{CAT}(0)$, które są hiperboliczne w sensie Gromova. Przypomnijmy, że przykłady przestrzeni $\text{CAT}(0)$ hiperbolicznych w sensie Gromova pojawiają się dość naturalnie, a jeden z nich przedstawiłam już w Przykładzie 4.19.

Wynik dotyczący istnienia punktów stałych odwzorowań określonych na geodezyjnie ograniczonych zupełnych przestrzeniach $\text{CAT}(0)$, które są hiperboliczne w sensie Gromova, zawarłam w pracy [P04]. Jak wspomnieliśmy już wcześniej Lemat 4.31 jest prawdziwy tylko w przestrzeniach $\text{CAT}(\kappa)$ z $\kappa < 0$. Zatem dowód przedstawiony w pracy [P04] opiera się na zupełnie innym rozumowaniu niż przedstawione w [P03]. Podczas dalszej pracy nad tą tematyką zauważyłam także, że nie musimy rozważać warunku $\text{CAT}(0)$, a w jego miejsce możemy założyć, że X ma dwie słabsze własności. Mianowicie, wystarczy założyć, że przestrzeń jest wypukła w sensie Busemanna – co pozwala nam szacować odległość punktów leżących na geodezyjnych o jednym wspólnym końcu, a także że ma własność jedyne centrum asymptotycznego. Przestrzenie Banacha, które mają własność jedyne centrum asymptotycznego, są dobrze znane, zatem nasze rozważania pozwalają nam na uogólnienie Przykładu 4.19 na wszystkie podzbiory tego typu w dowolnej przestrzeni ℓ_p , przy założeniu $p \in (1, \infty)$. Stąd główne twierdzenie z pracy [P04] brzmi następująco:

Twierdzenie 4.32. ([P04] Theorem 3.1)

Niech X będzie zupełną przestrzenią wypukłą w sensie Busemanna, która ma

własność jedyne centrum asymptotycznego. Ponadto, założymy, że X jest δ -hiperboliczna dla nieujemnej liczby δ . Jeżeli C jest domkniętym i wypukłym podzbiorem X , to równoważne są następujące stwierdzenia:

- a) C jest zbiorem geodezyjnie ograniczonym.
- b) Każde odwzorowanie nieoddalające $T: C \rightarrow C$ ma punkt stały.
- c) Każde odwzorowanie silnie-nieoddalające $T: C \rightarrow C$ ma punkt stały.

Zauważmy, że w powyższej charakterystyce rozważamy pojęcie odwzorowania silnie-nieoddalającego, czyli w przypadku przestrzeni geodezyjnych odwzorowania spełniającego nierówność:

$$\rho(Tx, Ty) \leq \rho((1 - \lambda)x + \lambda Tx, (1 - \lambda)y + \lambda Ty), \quad \lambda \in (0, 1),$$

(porównaj z warunkiem (4.3)). W monografii [22, str. 124] autorzy wyprowadzili związek pomiędzy odwzorowaniami nieoddalającymi i silnie-nieoddalającymi, których dziedziną była zespolona kula Hilberta $\mathcal{B}$. Precyzując, wykazali, że jeżeli $T: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ jest odwzorowaniem nieoddalającym, to możemy zdefiniować odwzorowanie $U_t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, gdzie $U_t(x)$ jest jedynym punktem stałym kontrakcji

$$G_t(y) := (1 - t)Ty + tx, \quad (4.4)$$

czyli spełnia warunek $U_t(x) = (1 - t)TU_t(x) + tx$. Wówczas odwzorowanie U_t jest silnie-nieoddalające i zbiór jego punktów stałych pokrywa się ze zbiorem punktów stałych wyjściowego odwzorowania T . W opublikowanej ostatnio pracy [3, Proposition 3.2] pokazano, że ta sama konstrukcja sprawdza się także w klasie przestrzeni wypukłych w sensie Busemanna, co bezpośrednio prowadzi do równoważności warunków b) i c).

Główną rolę w dowodzie Twierdzenia 4.32 odgrywa zachowanie krzywych aproksymujących zdefiniowanych w następujący sposób:

Definicja 4.33. Niech X będzie zupełną przestrzenią geodezyjną wypukłą w sensie Busemanna, $T: X \rightarrow X$ – odwzorowaniem nieoddalającym i wybierzmy dowolne $x \in X$. Wówczas dla każdego $t \in (0, 1]$ odwzorowanie G_t zdefiniowane wzorem (4.4) jest kontrakcją, zatem ma dokładnie jeden punkt stały. Oznaczmy go przez z_t . Zbiór

$$\{z_t : t \in (0, 1]\} \quad (4.5)$$

nazwiemy krzywą aproksymującą (pierwszego rodzaju) o początku w punkcie x .

Inspirując się wynikami autorstwa K. Goebela i S. Reicha dotyczącymi odwzorowań nieoddalających określonych na rzeczywistych i zespolonych kulach Hilberta z metryką hiperboliczną (zobacz Section 25 w monografii [22]), postanowiłam dokładniej zbadać zachowanie krzywych aproksymujących postaci (4.5) w ogólniejszym przypadku przestrzeni wypukłych w sensie Busemanna. Oczywiście (zakładając w naszym przypadku, że przestrzeń ma własność jedyne centrum asymptotycznego) jeżeli istnieje ciąg ograniczony (z_{t_n}) przy warunku $t_n \rightarrow 0^+$, to odwzorowanie T musi mieć punkt stały będący centrum asymptotycznym naszego ciągu (z_{t_n}) . Warto zatem skupić uwagę na przypadku, gdy odwzorowanie nieoddalające T nie ma punktów stałych. Możemy wówczas wykazać następujące stwierdzenie:

Twierdzenie 4.34. ([P04] Theorem 4.1)

Niech X będzie zupełną przestrzenią geodezyjną wypukłą w sensie Busemanna i mającą własność jedyne centrum asymptotycznego. Ponadto, załóżmy, że X jest przestrzenią δ -hiperboliczną dla pewnej dodatniej liczby δ , natomiast C – jej dowolnym niepustym, domkniętym i wypukłym podzbiorem.

Jeżeli $T: C \rightarrow C$ jest odwzorowaniem nieoddalającym, które nie ma punktów stałych, to istnieje $\xi \in \partial^g X$, taki że dla dowolnego $x \in C$ krzywa aproksymująca o początku w punkcie x zdefiniowana wzorem (4.5) dąży do punktu w nieskończoności ξ w sensie topologii stożkowej.

Wynik ten jest naturalnym uogólnieniem bardzo szczególnego przypadku zespolonej kuli Hilberta (porównaj z punktem (ii) z Twierdzenia 4.7). Zauważmy, że w tym wypadku brzeg w nieskończoności (czyli zbiór $\partial^g X$) jest niepusty, możemy zatem w miejsce wcześniej rozważanych odwzorowań, rozważać odwzorowania określone na całym zbiorze $X \cup \partial^g X$. Zbiór ten jest wyposażony w topologię stożkową, która jednakże nie jest metryzowalna. Możemy zatem przyjąć, że odwzorowanie $T: X \cup \partial^g X \rightarrow X \cup \partial^g X$ jest ciągle w swojej dziedzinie i nieoddalające na pewnym podzbiore przestrzeni X . Wówczas można wykazać:

Wniosek 4.35. *Niech X będzie zupełną przestrzenią geodezyjną wypukłą w sensie Busemanna, która ma własność jedyne centrum asymptotycznego. Ponadto, załóżmy, że przestrzeń X jest δ -hiperboliczna dla pewnej dodatniej liczby δ .*

Jeżeli $T: X \cup \partial^g X \rightarrow X \cup \partial^g X$ jest ciągle w sensie topologii stożkowej i istnieje niepusty, domknięty i wypukły podzbiór $C \subset X$, taki że obcięcie $T|_C$ przekształca zbiór C w siebie i jest nieoddalające, to T ma punkt stały w zbiorze $X \cup \partial^g X$.

4.6 Odwzorowania nieoddalające, które nie mają punktów stałych

Jeśli odwzorowanie $T: X \rightarrow X$ jest nieoddalające i nie ma punktów stałych, to wiemy już, że każda krzywa aproksymująca o początku w punkcie $x \in X$ dąży (względem topologii stożkowej) do punktu na brzegu $\partial^g X$. Z Twierdzenia 4.34 wynika, że dla dwóch różnych punktów x_1 i x_2 krzywe aproksymujące muszą dążyć do tego samego punktu w nieskończoności. Zatem kolejne naturalnie pojawiające się pytanie: jak zachowuje się wówczas orbita odwzorowania T ? W dalszej części autoreferatu orbitę T , czyli zbiór $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ będziemy nazywać też ciągiem iteracyjnym Picarda. Moje wyniki poświęcone odpowiedzi na powyższe pytanie ukazały się w pracy [P05]. Wykazałam w niej między innymi poniższy rezultat:

Twierdzenie 4.36. ([P05] Theorem 4.2)

Niech X będzie zupełną przestrzenią geodezyjną wypukłą w sensie Busemanna, która ma własność jedyne centrum asymptotycznego. Załóżmy ponadto, że X jest przestrzenią δ -hiperboliczną dla pewnej dodatniej liczby δ , natomiast odwzorowanie nieoddalające $T: X \rightarrow X$ nie ma punktów stałych. Wówczas istnieje punkt w nieskończoności ξ , taki że dla każdego $x \in X$ można znaleźć podciąg ciągu iteracyjnego Picarda $(T^n x)$, który dąży do ξ w sensie topologii stożkowej.

Ponadto, punkt ξ jest granicą krzywych aproksymujących.

Oczywiście, skoro zespolona kula Hilberta $\mathcal{B}$ jest bardzo szczególnym przypadkiem przestrzeni spełniającej między innymi założenia powyższego twierdzenia, to istnieją odwzorowania nieoddalające, które nie mają punktów stałych, ale mają ograniczone podciągi orbity. Przykład takiego odwzorowania określonego na $\mathcal{B}$ można znaleźć w pracy [59]. Jednakże jak już wspomniałam w pracy [P05], w tej sytuacji każdy nieograniczony podciąg $(T^{k_n} x)$ ciągu $(T^n x)$, który spełnia warunek

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \rho(x, T^{k_n} x) \geq M \quad (4.6)$$

musi dążyć w sensie topologii stożkowej do tego samego punktu w nieskończoności.

Wiemy również, że istnieją takie odwzorowania, których cała orbita jest nieograniczona w takim sensie jak we wzorze (4.6). Własność ta okazuje się być w bliskiej relacji z własnością asymptotycznego punktu stałego:

Twierdzenie 4.37. ([P05] Theorem 4.3)

Niech X będzie zupełną przestrzenią geodezyjną wypukłą w sensie Busemanna, która ma własność jedyne centrum asymptotycznego. Załóżmy również, że X jest δ -hiperboliczna dla pewnej liczby dodatniej δ , a $T: X \rightarrow X$

jest odwzorowaniem nieoddalającym, które nie ma punktów stałych. Jeśli dodatkowo liczba $D = \inf_{x \in X} \rho(x, Tx)$ jest dodatnia, to dla dowolnego $x \in X$ cała orbita $(T^n x)$ dąży do tego samego punktu w nieskończoności.

W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy pojęcie odwzorowania silnie-nieoddalającego. Skupmy się teraz na odwzorowaniach spełniających bardziej ogólną definicję, wprowadzoną przez R. Smarzewskiego w pracy [58].

Definicja 4.38. ([P05] Definition 5.1)

Niech X będzie przestrzenią jednoznacznie geodezyjną, natomiast λ dowolną liczbą z przedziału $(0, 1)$. Odwzorowanie $T: X \rightarrow X$ jest λ -silnie-nieoddalające, jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi warunek:

$$\rho(Tx, Ty) \leq \rho(\lambda Tx + (1 - \lambda)x, \lambda Ty + (1 - \lambda)y).$$

W przestrzeni liniowej punkt $\lambda a + (1 - \lambda)b$ jest zdefiniowany w sposób jednoznaczny, ale jeśli założymy tylko, że przestrzeń jest geodezyjna, to powinniśmy rozważyć wszystkie geodezyjne łączące punkty a i b , zatem aby punkt $\lambda a + (1 - \lambda)b$ był dobrze zdefiniowany, zakładamy, że X jest przestrzenią jednoznacznie geodezyjną. Ponadto, w klasie przestrzeni Banacha, każde odwzorowanie λ -silnie-nieoddalające jest nieoddalające. Implikacja ta nie zachodzi w dowolnej przestrzeni geodezyjnej (a nawet jednoznacznie geodezyjnej), ale jest prawdziwa w przypadku przestrzeni wypukłych w sensie Busemanna. Odwzorowania λ -silnie-nieoddalające określone na przestrzeniach geodezyjnych wypukłych w sensie Busemanna wzbudziły w ostatnim czasie spore zainteresowanie (zobacz na przykład prace [3], a także [48]). Z tego też powodu postanowiłam rozważyć problem zbieżności ciągu iteracyjnego Picarda również w tej klasie odwzorowań:

Wniosek 4.39. ([P05] Theorem 5.2)

Niech X będzie zupełną przestrzenią geodezyjną wypukłą w sensie Busemanna, która ma własność jedynego centrum asymptotycznego. Załóżmy ponadto, że X jest δ -hiperboliczna dla pewnej dodatniej liczby δ . Jeśli odwzorowanie λ -silnie-nieoddalające $T: X \rightarrow X$ (dla pewnego $\lambda \in (0, 1)$) nie ma punktów stałych, to dla każdego $x \in X$ cała orbita $(T^n x)$ dąży do tego samego punktu w nieskończoności.

Powyższy rezultat można wywnioskować z faktu, że każde odwzorowanie λ -silnie-nieoddalające jest asymptotycznie regularne w dowolnym punkcie x , czyli orbita spełnia warunek:

$$\lim_n \rho(T^n x, T^{n+1} x) = 0.$$

Stąd wynika, że dla dowolnego ograniczonego podciągu orbity istnieje dokładnie jedno centrum asymptotyczne, które musi być punktem stałym, a to przeczy naszemu założeniu. W ten sam sposób możemy uzyskać wynik dla przypadku odwzorowań uśrednionych (averaged mappings). Rozpocznijmy od przypomnienia definicji

Definicja 4.40. ([P05] Definition 5.2)

Odwzorowanie $U: X \rightarrow X$ określone na jednoznacznie geodezyjnej przestrzeni nazwiemy uśrednionym, jeżeli istnieje odwzorowanie nieoddalające $T: X \rightarrow X$ oraz liczba $c \in (0, 1)$, takie że

$$Ux = cTx + (1 - c)x, \quad x \in X,$$

Klasa takich odwzorowań została po raz pierwszy zdefiniowana w pracy [7] dla przypadku przestrzeni Banacha. W latach osiemdziesiątych ukazały się pierwsze prace dotyczące odwzorowań uśrednionych, których dziedziną była zespolona kula Hilberta (zobacz na przykład [53]). A ostatnio zaczęto badać własności tych odwzorowań w przypadku przestrzeni jednoznacznie geodezyjnych (zobacz na przykład [48]).

W tej klasie przestrzeni możemy udowodnić:

Wniosek 4.41. ([P05] Theorem 5.3)

Niech X będzie zupełną przestrzenią geodezyjną wypukłą w sensie Busemanna, która ma własność jedyne centrum asymptotyczne. Ponadto założymy, że X jest δ -hiperboliczna dla pewnej dodatniej liczby δ . Jeżeli $U: X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem uśrednionym, które nie ma punktów stałych, to dla każdego $x \in X$ orbita $(U^n x)$ dąży do tego samego punktu w nieskończoności.

Bardzo użytecznym narzędziem w rozważaniach nad zachowaniem funkcji w nieskończoności są funkcje Busemanna. W przypadku, gdy przestrzeń spełnia nierówność CAT(0), pojęcie funkcji Busemanna jest bezpośrednio związane ze zbieżnością w sensie topologii stożkowej jak zostało to pokazane w Stwierdzeniu 4.4. Przy słabszych założeniach dotyczących geometrii przestrzeni nie oczekujemy oczywiście, aby granica

$$\lim_n (\rho(x_n, \cdot) - \rho(x_n, x_0)),$$

gdzie (x_n) dąży do punktu w nieskończoności, istniała. Z tego powodu w pracy [P05] rozważałam funkcje postaci

$$b(x) = \limsup_n (\rho(z_{t_n}, x) - \rho(z_{t_n}, x_0)), \quad (4.7)$$

gdzie (z_{t_n}) był ciągiem punktów krzywej aproksymującej o początku w ustalonym punkcie. Dla funkcji tego typu pokazałam, że horokule B_M , $M \in \mathbb{R}$ są T -odwracalne. Przyjmijmy przy tym, że

$$B_M = \{x \in X : b(x) < -M\},$$

gdzie b jest funkcją zdefiniowaną wzorem (4.7), z ustalonym punktem $x_0 \in X$ oraz ciągiem punktów (z_{t_n}) na krzywej aproksymującej o początku w x_0 .

Twierdzenie 4.42. ([P05] Theorem 3.1)

Niech X będzie zupełną przestrzenią geodezyjną wypukłą w sensie Busemanna, która ma własność jedynego centrum asymptotycznego. Ponadto załóżmy, że X jest δ -hiperboliczna dla pewnej dodatniej liczby δ . Jeśli $T: X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem nieoddalającym, które nie ma punktów stałych, to dla każdej funkcji określonej wzorem (4.7) wszystkie jej horokule B_M są T -odwracalne.

Na koniec przypomnijmy raz jeszcze, że wszystkie wyniki przedstawione w tym podrozdziale pozostają prawdziwe dla przypadku (zupełnych) przestrzeni $\text{CAT}(\kappa)$, gdzie $\kappa < 0$, jak również (zupełnych) przestrzeni $\text{CAT}(0)$, które są hiperboliczne w sensie Gromova.

4.7 Punkty stałe i absolutne punkty stałe w niewypukłych podzbiorach przestrzeni $\text{CAT}(0)$

Rozpocznijmy nasze rozważania dotyczące odwzorowań nieoddalających, których dziedziną jest niewypukły podzbiór przestrzeni geodezyjnej od naturalnego uogólnienia Twierdzenia 4.13 na przypadek przestrzeni o stałej krzywiznie, czyli takich przestrzeni, w których każdy trójkąt geodezyjny jest izometryczny z trójkątem w dwuwymiarowej przestrzeni modelowej M_κ^2 (zakładamy, że κ jest liczbą niedodatnią). W pracy [P02] pokazaliśmy, że zachodzi następująca własność:

Twierdzenie 4.43. ([P02] Theorem 3.6.)

Niech X będzie przestrzenią geodezyjną zupełną o stałej krzywiznie $\kappa \in (-\infty, 0]$, $D \subset X$ – zbiorem niepustym, natomiast $T: D \rightarrow D$ – odwzorowaniem nieoddalającym. Załóżmy ponadto, że dla pewnego $x \in D$ jego orbita $(T^n x)$ jest ograniczona. Wówczas $A((T^n x))$ jest absolutnym punktem stałym odwzorowania T . Jednocześnie ciąg $(\rho(T^n y, A((T^m x))))_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący, a odwzorowanie U z D w zbiór absolutnych punktów stałych odwzorowania T dane wzorem $U(x) = A((T^n x))$ jest nieoddalające.

Dowód powyższego twierdzenia oparliśmy między innymi na następującej obserwacji, będącej bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 4.15:

Twierdzenie 4.44. ([P02] Theorem 3.4.)

Niech X będzie przestrzenią geodezyjną zupełną o stałej krzywiznie $\kappa \in (-\infty, 0]$. Ponadto, niech $D \subset X$ będzie zbiorem niepustym, a odwzorowanie $T: D \rightarrow X$ – nieoddalające. Wówczas dla dowolnego $p \notin D$ istnieje przedłużenie nieoddalające T na zbiór $D \cup \{p\}$.

Pozostało tylko do pokazania, że odwzorowanie U jest nieoddalające. Tę część dowodu oparliśmy o pewne własności geometryczne przestrzeni modelowej. Z powyższego twierdzenia można również wysnuć wnioski na temat istnienia punktów stałych odwzorowania T . Mianowicie:

Wniosek 4.45. ([P02] Corollary 3.7.)

Niech X będzie przestrzenią geodezyjną zupełną o stałej krzywiznie $\kappa \in (-\infty, 0]$, $D \subset X$ – jej niepustym podzbiorem, natomiast $T: D \rightarrow D$ – odwzorowaniem nieoddalającym. Wówczas T ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy znajdziemy takie $x \in D$, dla którego ciąg iteracyjny Picarda $(T^n x)$ jest ograniczony i ponadto, istnieje dokładnie jedno $y \in D$, takie że

$$\rho(A((T^n x)), y) = \rho(A((T^n x)), D).$$

Wniosek 4.46. ([P02] Corollary 3.8.)

Niech X będzie przestrzenią geodezyjną zupełną o stałej krzywiznie $\kappa \in (-\infty, 0]$, $D \subset X$ – jej niepustym podzbiorem, natomiast $T: D \rightarrow D$ – odwzorowaniem nieoddalającym. Wówczas T ma punkt stały w D wtedy i tylko wtedy, gdy możemy znaleźć $x \in D$, dla którego ciąg iteracyjny Picarda jest ograniczony i ponadto, dla każdego $y \in \bar{co}\{T^n x : n > 0\}$ istnieje dokładnie jedno $p \in D$, takie że $\rho(y, D) = \rho(y, p)$.

Jeśli rozważane odwzorowanie jest tylko asymptotycznie nieoddalające, nie możemy oczekiwać, że prawdziwe będą te same stwierdzenia jak dla przypadku odwzorowań nieoddalających. Dlatego też chcieliśmy raczej przyjrzeć się takim odwzorowaniom i zbadać jak zachowują się w tym przypadku ciągi iteracyjne Picarda. Głównym rezultatem jaki dało nam się uzyskać w tym kierunku było następujące stwierdzenie:

Twierdzenie 4.47. ([P02] Theorem 4.6)

Niech D będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{H}^\infty$, a $T: D \rightarrow D$ – odwzorowaniem asymptotycznie nieoddalającym w średnim sensie. Ponadto załóżmy, że możemy znaleźć liczbę naturalną N , taką że T^N jest odwzorowaniem nieoddalającym. Wówczas T ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $x \in D$, dla którego ciąg iteracyjny Picarda $(T^n x)$ jest ograniczony i taki $y \in D$, że zachodzi warunek:

$$\rho(A(s(x_1, \dots, x_n)), y) = \rho(A(s(x_1, \dots, x_n)), D).$$

W tym miejscu musimy wyjaśnić kilka pojęć pojawiających się w powyższym twierdzeniu. Dla dowolnej zupełnej przestrzeni CAT(0) i dowolnego skończonego zbioru punktów $x_1, x_2, \dots, x_n$ istnieje dokładnie jeden punkt, w którym funkcja

$$\phi(y) = \sum_{k=1}^n \rho^2(y, x_k)$$

osiąga swoje minimum (zobacz [28]). W miejsce miary o skończonym nośniku możemy rozważyć dowolną miarę probabilistyczną μ , taką że:

$$\phi(y) := \int_X d^2(x, y) \mu(x) < \infty$$

dla pewnego (a zatem i dla wszystkich) $y \in X$. Wówczas również istnieje dokładnie jeden punkt $b(\mu)$, w którym funkcja osiąga minimum, który nazywamy środkiem ciężkości miary μ (zobacz [5, Theorem 2.3.1]). Jednakże w pracy [P02] posłużyliśmy się funkcją

$$\bar{\phi}(y) = \sum_{k=1}^n \cosh \rho(y, x_k)$$

dla skończonego zbioru punktów $x_1, x_2, \dots, x_n$, która w przypadku naszych rozważań była bardziej użyteczna. Pokazaliśmy, że funkcja ta również osiąga minimum dokładnie w jednym punkcie, który nazwaliśmy środkiem ciężkości skończonego zbioru $x_1, x_2, \dots, x_n$ i oznaczyliśmy $s(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ponadto, jeśli ciąg (x_n) jest ograniczony, to ciąg środków ciężkości $(s(x_1, \dots, x_n))$ też jest ograniczony, zatem w przestrzeni CAT(0) centrum asymptotyczne $A(s(x_1, \dots, x_n))$ jest dobrze zdefiniowane (jest singletonem).

Warto zauważyć dwie rzeczy. Po pierwsze założenie dotyczące przestrzeni – mianowicie, że jest rzeczywistą kulą Hilberta wyposażoną w metrykę hiperboliczną, gdzie $H = \ell^2$ – można osłabić, przyjmując, że przestrzeń ma stałą krzywiznę równą -1 i własność przedłużania. Ponadto w tezie twierdzenia pojawia centrum asymptotyczne ciągu środków ciężkości zamiast centrum asymptotycznego ciągu jak we wszystkich wcześniejszych wynikach. W ogólnym przypadku ciągu ograniczonego można znaleźć wiele prostych przykładów obrazujących że rozważane centra asymptotyczne są różne i nie zachodzi między nimi żadna relacja nawet w przypadku ciągów w $\mathbb{R}$. Tymczasem pozostaje otwarte pytanie, czy taka sama sytuacja ma miejsce w przypadku, gdy rozważanym ciągiem jest ciąg iteracyjny Picarda odwzorowania nieoddalającego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej (i o stałej krzywiznie). Zatem nie możemy stwierdzić, czy Twierdzenie 4.47 w wersji dla odwzorowań nieoddalających pokrywa się z Wnioskiem 4.45.

Na zakończenie chciałabym podkreślić, że wszystkie otrzymane przez nas wyniki pozostają prawdziwe dla drzew metrycznych, na które możemy spojrzeć jak na przestrzenie o stałej krzywiznie równej $-\infty$. Ponadto zachodzą także dla silnie ciągłych półgrup kontrakcji zdefiniowanych na przestrzeniach o stałej krzywiznie jak zostało to pokazane w Rozdziale 6 z pracy [P02]. Stąd też pominę powtarzanie rozważań dotyczące obu wymienionych przypadków.

5 Omówienie pozostałych wyników naukowych

Lista pozostałych prac (nie uwzględnionych w monotematycznym cyklu publikacji)

- [P06] B. Piątek, *On the Sincov functional equation*, Demonstr. Math. 38 (2005), 875–881.
- [P07] B. Piątek, *On convex and $\star$ -concave multifunctions*, Ann. Polon. Math. 86 (2005), 165–170.
- [P08] B. Piątek, *Some properties of convex and $\star$ -concave multifunctions*, Ann. Acad. Paedagog. Crac. Stud. Math. 5 (2006), 77–86.
- [P09] B. Piątek, *Riemann integrability of a nowhere continuous multifunction*, Ann. Acad. Paedagog. Crac. Stud. Math. 7 (2008), 5–13.
- [P10] B. Piątek, *Best approximation of coincidence points in metric trees*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 62 (2008), 113–121.
- [P11] B. Piątek, *On the continuity of the integrable multifunctions*, Opuscula Math. 29 (2009), 81–88.
- [P12] B. Piątek, *On asymptotic cyclic contractions*, Ann. Acad. Paedagog. Crac. Stud. Math. 9 (2010), 79–86.
- [P13] R. Espínola, A. Fernández-León, B. Piątek, *Fixed points of single- and set-valued mappings in uniformly convex metric spaces with no metric convexity*, Fixed Point Theory Appl. 2010, art. no. 169837, 16 pp.
- [P14] B. Piątek, *On cyclic Meir-Keeler contractions in metric spaces*, Nonlinear Anal. 74 (2011), 35–40.
- [P15] B. Piątek, *Halpern iteration in $CAT(\kappa)$ spaces*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 27 (2011), 635–646.
- [P16] B. Piątek, *Viscosity iteration in $CAT(\kappa)$ spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. 34 (2013), 1245–1264.
- [P17] R. Espínola, B. Piątek, *Diversities, hyperconvexity and fixed points*, Nonlinear Anal. 95 (2014), 229–245.
- [P18] B. Piątek, *On the gluing of hyperconvex metrics and diversities*, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. 13 (2014), 65–76.

- [P19] G. López-Acedo, B. Piątek, *Characterization of compact geodesic spaces*, J. Math. Anal. Appl. 425 (2015), 748–757.
- [P20] B. Piątek, *A survey of the fixed point property in CAT (κ) spaces*, w Monograph on the occasion of 100th birthday anniversary of Zygmunt Zahorski, Ed. by Roman Wituła, Damian Słota, Waldemar Hołubowski. Gliwice: Wydaw. Politechniki Śląskiej, 2015, 355–364.
- [P21] G. López-Acedo, B. Piątek, *Some remarks on a characterization of compactness by means of the fixed point property in geodesic spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 17 (2016), 1259–1263.
- [P22] M. Adam, B. Piątek, M. Pleszczyński, B. Smoleń, R. Wituła, *Certain inequalities connected with the golden ratio and the Fibonacci numbers*, J. Appl. Math. Comput. Mech. 15 (2016), 5–15.
- [P23] M. Adam, B. Piątek, M. Pleszczyński, B. Smoleń, R. Wituła, *On values of the psi function*, J. Appl. Math. Comput. Mech. 16 (2017), 7–18.
- [P24] E. Hetmaniok, B. Piątek, R. Wituła, *Binomials transformation formulae for scaled Fibonacci numbers*, Open Math. 15 (2017), 477–485.
- [P25] G. López-Acedo, A. Nicolae, B. Piątek, *“Lion-man” and the fixed point property*, w recenzji.
- [P26] B. Piątek, A. Samulewicz, *Gluing Busemann spaces*, w Selected problems on experimental mathematics, Ed. by Roman Wituła, Beata Bajorska-Harapińska, Edyta Hetmaniok, Damian Słota, Tomasz Trawiński. Gliwice: Wydaw. Politechniki Śląskiej, 2017, 129–148.
- [P27] E. Hetmaniok, B. Piątek, M. Pleszczyński, R. Wituła, *Identities for the inverses of central binomial coefficients*, w Selected problems on experimental mathematics, Ed. by Roman Wituła, Beata Bajorska-Harapińska, Edyta Hetmaniok, Damian Słota, Tomasz Trawiński. Gliwice: Wydaw. Politechniki Śląskiej, 2017, 219–231.
- [P28] B. Piątek, *On the geometry and fixed point free mappings in hyperbolic spaces*, J. Fixed Point Theory Appl., przyjęta do druku.

Przejdę teraz do omówienia pozostałych prac, które nie znalazły się w głównym osiągnięciu naukowym. Przy czym bardziej szczegółowo skupię się tylko na najistotniejszych i tematycznie poświęconych przestrzeniom geodezyjnym.

5.1 Aproksymacja punktów stałych w przestrzeniach z krzywizną ograniczoną z góry przez liczbę dodatnią

Prace [P15] oraz [P16] poświęciłam problemowi aproksymacji punktów stałych odwzorowań nieoddalających T , które zostały określone w zupełnej przestrzeni $\text{CAT}(\kappa)$ (niekoniecznie ograniczonej) X z dodatnim parametrem κ .

Warto przy tym podkreślić, że praca [P15] była pierwszą pracą, w której autor pokusił się o analizę problemu znajdowania punktów stałych odwzorowań nieoddalających w przypadku, gdy dziedziną jest przestrzeń o krzywiznie ograniczonej liczbą dodatnią, w którym to przypadku nie możemy wykorzystać standardowych narzędzi stosowanych na przykład w przestrzeniach Banacha lub przestrzeniach W -hiperbolicznych. W ostatnich latach zainteresowanie tą tematyką wyraźnie wzrosło, co można odnotować analizując m.in. zastosowanie wyników z pracy [P15] do badań nad efektywną regularnością aproksymacji autorstwa U. Kohlenbacha, L. Leuşteana i A. Nicolae (zobacz na przykład [45, Theorem 3.1] oraz [37]).

We wspomnianej pracy [P15] zaproponowałam rozwiązanie problemu przy wykorzystaniu procedury iteracyjnej Halperna (wprowadzonej przez B. Halperna w pracy [26]) w postaci:

$$x_{n+1} = t_n x_n + (1 - t_n) T x_n, \quad (5.1)$$

gdzie ciąg liczb rzeczywistych (t_n) spełnia następujące warunki:

- (i) $t_n \in (0, 1)$ and $t_n \rightarrow 0$;
- (ii) $\sum t_n = \infty$;
- (iii) $\sum |t_{n+1} - t_n| < \infty$.

Główny wynik mojej pracy przedstawia poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 5.1. ([P15] Theorem 4.2)

Niech κ będzie dowolną liczbą dodatnią, X – zupełną przestrzenią $\text{CAT}(\kappa)$, natomiast $T: X \rightarrow X$ – odwzorowaniem nieoddalającym, takim że $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$. Jeśli (t_n) jest ciągiem spełniającym warunki (i)–(iii), to dla dowolnego $x_0 \in X$, dla którego $\rho(x_0, \text{Fix}(T)) \leq \frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}}$, ciąg (x_n) , zdefiniowany wzorem (5.1), jest zbieżny do punktu stałego położonego najbliżej x_0 .

Dowód powyższego wyniku opierał się na następującym rozumowaniu. Niech q będzie obrazem rzutowania punktu $x_0 \in X$ na zbiór punktów stałych odwzorowania T . Zauważmy w tym miejscu, że skoro rozważana przestrzeń nie jest przestrzenią $\text{CAT}(0)$, nie możemy korzystać z punktu (iii)

Stwierdzenia 4.2. Zatem istnienie i jedyność punktu q wynika z faktu, że domknięte i wypukłe podzbiory przestrzeni CAT(1) o wystarczająco małej średnicy są jednostajnie wypukłymi przestrzeniami geodezyjnymi. Stąd dla każdego $t \in (0, 1)$ odwzorowanie $T_t: \bar{B}\left(q, \frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}}\right) \rightarrow \bar{B}\left(q, \frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}}\right)$ zdefiniowane wzorem $T_t(x) = tx_0 + (1-t)T(x)$ jest kontrakcją, a ciąg (z_t) punktów stałych $z_t = T_t z_t$ jest zbieżny do q dla $t \rightarrow 0^+$ (zobacz [P15, Theorem 3.5]). Jednocześnie przy tych samych założeniach co w Twierdzeniu 5.1 można wykazać, że ciąg (x_n) spełnia warunek $\rho(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$. Korzystając z tych dwóch wyników, wykazałam prawdziwość tezy Twierdzenia 5.1.

Warto podkreślić, że w dowodzie głównego wyniku pokazałam kilka własności geometrii sferycznej, które następnie były wykorzystane przez innych autorów do rozwiązywania podobnych problemów dla różnych typów iteracji (zobacz lematy 3.2 oraz 3.3 in [P15]).

Pracę [P16] poświęciłam także aproksymacji punktów stałych odwzorowań nieoddalających w tej samej klasie przestrzeni, jednakże z zastosowaniem dwu-krokowej modyfikacji algorytmu iteracyjnego viscosity zaproponowanego pierwotnie przez A. Moudafiego w pracy [47]:

$$x_{n+1} = t_n f(x_n) + (1 - t_n)Tx_n, \quad (5.2)$$

gdzie f jest kontrakcją zdefiniowaną na podzbiorze X . W przypadku przestrzeni CAT(1) musiałam narzucić silniejsze założenia na funkcję f – powrócimy do tego zagadnienia w dalszej części naszych rozważań.

Żałujemy, że dwa ciągi rzeczywiste (b_n) i (t_n) spełniają następujące warunki:

- (i) $b_n, t_n \in (0, 1)$ dla $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n < 1$;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$;
- (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty$ lub równoważnie $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - t_n) = 0$.

Korzystając z nich w pracy [P16] wykazałam:

Twierdzenie 5.2. ([P16] Theorem 4.2)

Niech C będzie zupełną przestrzenią (κ) , gdzie $\kappa > 0$, która ma własność N i średnicę mniejszą niż $D_\kappa/2$. Ponadto niech $T: C \rightarrow C$ będzie odwzorowaniem nieoddalającym z $\text{Fix}T \neq \emptyset$, a $f: C \rightarrow C$ będzie k -kontrakcją, gdzie

$$k < \frac{2 \sin^2 \frac{M}{2} \cos M}{M^2}. \quad (5.3)$$

Założmy także, że $\rho(p, f(p)) \leq M/4\sqrt{\kappa}$ dla wszystkich $p \in \text{Fix}T$, gdzie $M \in (0, \pi/2)$. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt $q \in \text{Fix}T$, dla którego prawdziwy jest warunek

$$P_{\text{Fix}T}(f(q)) = q. \quad (5.4)$$

Ponadto dla dowolnego $u \in X$, takiego że

$$\rho(u, q) \leq M/4\sqrt{\kappa}$$

i dowolnej pary ciągów rzeczywistych (b_n) i (t_n) spełniających (i)–(iv), ciąg iteracyjny zdefiniowany wzorem

$$\begin{aligned} x_1 &= u, \\ y_n &= t_n f(x_n) + (1 - t_n)T(x_n), \\ x_{n+1} &= b_n x_n + (1 - b_n)y_n \end{aligned} \quad (5.5)$$

jest zbieżny do punktu q , który spełniał warunek (5.4).

Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu założyłam, że rozważana przestrzeń X ma tak zwaną własność N (the property of nice projection). O ile jest mi wiadomo, do tej pory nie ukazała się żadna praca (pomijając kilka zawierających poważne błędy) dotycząca aproksymacji ciągami iteracyjnymi opartymi na procedurze Moudafiego w przestrzeniach $\text{CAT}(\kappa)$ z dodatnim parametrem κ , w której autorzy nie zakładaliby, że przestrzeń ma własność N.

Definicja 5.3.

Mówimy, że przestrzeń $\text{CAT}(\kappa)$: X ma własność N, jeśli spełniony jest warunek:

Niech $C \subset X$ będzie dowolnym domkniętym i D_κ -wypukłym zbiorem. Dla dowolnych punktów $x_1, x_2 \in X$, takich że $\rho(x_i, C) < \frac{D_\kappa}{2}$, i dla dowolnego $\alpha \in (0, 1)$ z równości $P_C(x_1) = P_C(x_2) = P$ wynika, że $P_C(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = P$.

Jako wniosek otrzymujemy, że jeśli własności N zachodzi, to $P_{[a,b]}(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \in [P_{[a,b]}(x_1), P_{[a,b]}(x_2)]$ dla dowolnego odcinka geodezyjnego $[a, b]$. Własność N została wprowadzona niedawno w pracy [17], gdzie autorzy wskazali związki z innymi własnościami przestrzeni $\text{CAT}(\kappa)$, nie podali jednak żadnego przykładu ilustrującego, czy warunek ten zachodzi w dowolnej przestrzeni $\text{CAT}(\kappa)$ (patrz Question w [17]). Pierwszy taki przykład został zaproponowany przeze mnie w pracy [P16]:

Przykład 5.4. ([P16] Example 5.1)

Rozważmy dwa trójkąty płaskie w przestrzeni $\mathbb{E}^3$

$$A = (-1, 0, 4); B = (1, 0, 4); C = (0, 0, 0)$$

oraz

$$C = (0, 0, 0); D = (0, 0, 4); E = \left(0, \frac{3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

Odległość w przestrzeni $X = \Delta(A, B, C) \cup \Delta(C, D, E)$ zdefiniujemy jako długość najkrótszej drogi łączącej dwa punkty w X . Otrzymana przestrzeń jest przestrzenią CAT(0), ponieważ jest sklejeniem dwóch domkniętych i wypukłych podzbiorów $\mathbb{E}^2$, a zatem można zastosować do nich Twierdzenie 4.3 (o sklejanii przestrzeni CAT(0)).

Wykażemy, że

$$P_{[C,E]}(D) = P_{[C,E]}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \notin [P_{[C,E]}(A), P_{[C,E]}(B)]. \quad (5.6)$$

Rzutowaniem punktu D jest punkt $F = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}E = \left(0, \frac{3\sqrt{7}}{16}, \frac{1}{16}\right)$, ponieważ $\angle_F(D, E) = \frac{\pi}{2}$. Obliczmy teraz

$$d(A, C) = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{136}{8}}$$

oraz

$$d(A, F) = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{7}}{16} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{16} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{134 + 3\sqrt{7}}{8}} > \sqrt{\frac{136}{8}}.$$

Z symetrii otrzymujemy $P_{[C,E]}(A) = P_{[C,E]}(B) \neq F$, co kończy dowód (5.6).

Narzędziem, które odegrało zasadniczą rolę w dowodzie Twierdzenia 5.2, była funkcja h , którą oparłam w pewnym stopniu na cosinusie quadrilateralnym (quadrilateral cosine) wprowadzonym przez I. Berga i I. Nikolaeva w pracy [9].

Założmy, że X jest przestrzenią CAT(1). Zdefiniujemy funkcję h wzorem

$$h(A, B; C, D) = \frac{\cos \rho(A, C) + \cos \rho(B, D) - \cos \rho(A, D) - \cos \rho(B, C)}{\rho(A, B)\rho(C, D)}$$

dla dowolnych punktów $A, B, C, D \in X$ spełniających warunki

$$\max_{x, y \in \{A, B, C, D\}} \rho(x, y) < \pi/2 \quad \text{oraz} \quad A \neq B, C \neq D.$$

Analiza własności funkcji h pozwoliła mi otrzymać oszacowanie podobne do wyniku otrzymanego przez Berga oraz Nikolaeva (zobacz pracę [9]) odnośnie cosinusa quadrilateralnego.

Lemat 5.5. ([P16] Lemma 3.10)

Niech X będzie przestrzenią $CAT(1)$. Wówczas dla dowolnych punktów A, B, C, D przestrzeni X , takich że $A \neq B, C \neq D$ oraz $\max_{x,y \in \{A,B,C,D\}} \rho(x,y) < \frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność:

$$|h(A, B; C, D)| \leq 1$$

Zauważmy, że możemy dostać analogiczny do Twierdzenia 5.2 wynik dla przestrzeni $CAT(0)$. Mianowicie:

Twierdzenie 5.6. (Theorem 4.3 [P16]).

Niech C będzie zupełną przestrzenią $CAT(0)$, która ma własność N , natomiast $T: C \rightarrow C$ – odwzorowaniem nieoddalającym z $Fix(T) \neq \emptyset$. Załóżmy, że $f: C \rightarrow C$ jest k -kontrakcją, gdzie $k < \frac{1}{2}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt stały q , ale którego zachodzi warunek (5.4).

Ponadto dla dowolnego $u \in C$ oraz pary ciągów (b_n) i (t_n) spełniających warunki (i)–(iv), ciąg iteracyjny zdefiniowany wzorem (5.5) dąży do q .

W przypadku, gdy rozważamy przestrzeń $CAT(0)$, żadne oszacowania odległości nie są konieczne i zakładamy tylko, że

$$k < \frac{1}{2}. \quad (5.7)$$

Może wydawać się nieco sztuczne, że ostatni rezultat nie zachodzi dla dowolnej kontrakcji. Powodem, dla którego narzucamy ograniczenie (5.7), jest fakt, że w miejsce standardowych metod dla przypadku przestrzeni liniowych stosujemy funkcję h wywodzącą się bezpośrednio z geometrii sferycznej.

Na zakończenie naszych rozważań chciałabym powrócić do założeń nałożonych na stałą k w przypadku przestrzeni $CAT(\kappa)$. Założenie to wynika bezpośrednio z faktu, że rozważane w dowodzie złożenie odwzorowań musiało spełniać warunek kontrakcji, przy czym jedno z tych odwzorowań było rzutowaniem na zbiór punktów stałych. Zatem w przeciwieństwie do przypadku przestrzeni $CAT(0)$ rzutowanie na domknięty, wypukły i ograniczony podzbiór C przestrzeni $CAT(1)$ nie zawsze jest odwzorowaniem nieoddalającym. Możemy nawet precyzyjnie określić, że rzutowanie to spełnia warunek Lipschitza ze stałą L zależną od średnicy zbioru C i wyrażającą się wzorem

$$L = \frac{M}{2 \arcsin(\sin(M/2) \cos(M))},$$

gdzie $M < \pi/2$ jest wspomnianą średnicą. Dokładne oszacowanie wartości L mojego autorstwa zostało na prośbę G. Lópeza-Acedo zawarte w jego pracy (zobacz [2, Proposition 3.4.]).

5.2 Własność punktów stałych dla odwzorowań ciągłych

Równolegle do problemu istnienia punktów stałych dla odwzorowań nie-oddalających pracowałam nad podobnym problemem dotyczącym odwzorowań ciągłych określonych na przestrzeniach geodezyjnych. Rozważania rozpoczniemy od dobrze znanego wyniku Klee z roku 1955:

Twierdzenie 5.7. ([34] Theorem 2.3)

Dla zbioru wypukłego K lokalnie wypukłej metryzowalnej przestrzeni liniowej E poniższe warunki są równoważne:

- (α) K jest zbiorem zwartym;
- (β) K ma własność punktu stałego;
- (γ) żaden relatywnie domknięty podzbiór K nie jest promieniem topologicznym.

Przypomnijmy, że promieniem topologicznym nazywamy obraz zanurzenia izomorficznego $c: [0, \infty) \rightarrow X$ i może on zostać zdefiniowany w dowolnej przestrzeni topologicznej.

Zatem naturalne pytanie jakie nasuwa się w tym momencie to jak daleko powyższy wynik związany jest z geometrią przestrzeni. Innymi słowy, pytamy, czy można udowodnić jakikolwiek odpowiednik powyższego twierdzenia w przypadku przestrzeni nieliniowych. Nasze wyniki otrzymane we współpracy z Genaro López-Acedo były zainspirowane dwiema pracami: pierwszą, której autorami byli D. Ariza-Ruiz, C. Li, G. López-Acedo [4] oraz drugą, której autorami byli C. P. Niculescu oraz I. Roventa [49]. Wyniki zawarte we wspomnianych pracach możemy ująć w następującym stwierdzeniu:

Twierdzenie 5.8. (zobacz [4, Theorem 16] oraz [49, Theorem 1.3])

Niech (X, d) będzie jednoznacznie geodezyjną przestrzenią, która ma własność (P) oraz której wszystkie kule są zbiorami wypukłymi. Ponadto, niech K będzie niepustym domkniętym i wypukłym podzbiorem (X, d) . Wówczas każde odwzorowanie ciągle, którego obraz $T(K)$ jest zbiorem zwartym ma punkt stały w K .

Własność (P), którą zakładamy w twierdzeniu ma znaczenie czysto geometryczne i oznacza, że:

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} d((1-t)x + ty, (1-t)x + tz : t \in [0, 1], x, y, z \in X, d(y, z) \leq \varepsilon) = 0.$$

Wszystkie rozważane do tej pory przestrzenie miały tę własność. Ponadto, zamiast zwartości obrazu odwzorowania T możemy rozważać zwartość zbioru

K , co prowadzi do pytania czy w tym wypadku dla przestrzeni o tych samych własnościach jak w Twierdzeniu 5.8 lub nawet przestrzeni $CAT(\kappa)$ (z dowolnym parametrem $\kappa \in \mathbb{R}$) własność punktu stałego dla odwzorowań ciągłych jest równoważna zwartości dziedziny K . Niezbyt skomplikowany przykład drzew metrycznych dowodzi, że generalnie nie jest to prawda. Z racji, że drzewa metryczne możemy traktować jako przestrzenie o stałej krzywiznie równej $-\infty$ pozostaje otwarte pytanie czy ograniczenie krzywizny z dołu może zmienić wynik. Pozytywna odpowiedź na to pytanie została przedstawiona w pracy [P19]. Wykazaliśmy mianowicie:

Twierdzenie 5.9. ([P19] Theorem 10)

Niech X będzie zupełną przestrzenią jednoznacznie geodezyjną, której krzywizna jest ograniczona z dołu, która ma własność (P) i której wszystkie kule są zbiorami wypukłymi. Wówczas poniższe warunki są równoważne:

- a) X jest zbiorem zwartym;*
- b) X nie zawiera domkniętego promienia topologicznego;*
- c) X ma własność punktu stałego dla odwzorowań ciągłych.*

W tej samej pracy podaliśmy przykład niezwartej przestrzeni $CAT(0)$ o krzywiznie nieograniczonej z dołu, ale która miała własność punktu stałego dla odwzorowań ciągłych. Ponadto żaden podzbiór tej przestrzeni nie był izometryczny z tripoidem.

W pracy [P21] zainspirowanej owocną dyskusją podczas konferencji the 11th International Conference of Fixed Point Theory and Applications zauważyliśmy, że jeśli rozważana przestrzeń jest lokalnie zwarta i jednoznacznie geodezyjna, to własność (P) zachodzi automatycznie i wszystkie podzbiory zwarte i lokalnie wypukłe mają własność punktu stałego (zobacz [P21, Corollary 2.10]). Dalsze badania pozwoliły nam otrzymać pełną geometryczną charakterystykę zbiorów mających własność punktu stałego dla odwzorowań ciągłych w przypadku przestrzeni lokalnie zwartych w następującej postaci:

Twierdzenie 5.10. ([P25] Theorem 4)

Niech (X, d) będzie zupełną jednoznacznie geodezyjną, lokalnie zwartą przestrzenią i $A \subset X$ będzie zbiorem niepustym, domkniętym i wypukłym. Wówczas A ma własność punktu stałego dla odwzorowań ciągłych wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem zwartym.

5.3 Różnorodność i hiperwypukłość przestrzeni

W pracach [P17] i [P18] skupiliśmy się na wprowadzonej ostatnio koncepcji różnorodności oraz uogólnieniu przestrzeni hiperwypukłych na przypadek

przestrzeni, w której zdefiniowano właśnie różnorodność w miejsce odległości punktów. Musimy zatem rozpocząć od wprowadzenia pojęć i oznaczeń, które będą użyte w dalszej części.

Definicja 5.11. ([19] Definition 2.5)

Przestrzeń metryczna (X, d) jest hiperwypukła, jeśli dla dowolnej rodziny punktów $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ z X i rodziny liczb rzeczywistych dodatnich $\{r_\alpha\}_{\alpha \in I}$, takich że $d(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$, zachodzi warunek

$$\bigcap_{\alpha \in I} \bar{B}(x_\alpha, r_\alpha) \neq \emptyset. \quad (5.8)$$

Każda przestrzeń hiperwypukła jest geodezyjna, choć niekoniecznie jednoznacznie geodezyjna. Wiadomo nawet więcej. Mianowicie każda przestrzeń hiperwypukła, która jest jednoznacznie geodezyjna musi być drzewem metrycznym (zobacz [29]). Ponadto dla dowolnej przestrzeni metrycznej (X, d) możemy rozważać otoczkę hiperwypukłą, która jest najmniejszą przestrzenią hiperwypukłą zawierającą izometryczną kopię X . Koncepcja ta została wprowadzona przez N. Aronszajna i P. Panitchpakdiego w latach pięćdziesiątych (zobacz [19]).

Zainspirowani biologicznymi aspektami różnorodności genetycznej i ekologicznej D. Bryanta i P. F. Tuppera w swojej pracy [12] wprowadzili matematyczne pojęcie różnorodności, czyli klasy przestrzeni, w których w miejsce odległości dwóch punktów rozważa się różnorodność zbiorów skończonych. Następnie w tej klasie przestrzeni badali istnienie otoczki hiperwypukłej.

Definicja 5.12. ([12] Definition 2.8)

Niech X będzie zbiorem niepustym i oznaczmy przez $\langle X \rangle$ wszystkie skończone podzbiory X , wówczas różnorodnością nazywamy parę (X, δ) , gdzie $\delta: \langle X \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia następujące warunki:

1. $\delta(A) \geq 0$ oraz $\delta(A) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| = 1$, gdzie $|A|$ oznacza moc zbioru A .
2. Jeśli $B \neq \emptyset$, to $\delta(A \cup C) \leq \delta(A \cup B) + \delta(B \cup C)$.

Nietrudno zobaczyć, że dowolna przestrzeń metryczna (X, ρ) może być traktowana jako różnorodność, gdzie

$$\delta(A) = \text{diam}(A), \quad A \in \langle X \rangle \quad (5.9)$$

i jednocześnie każda różnorodność jest przestrzenią metryczną, w której odległość jest zdefiniowana wzorem

$$d(x, y) = \delta(\{x, y\}). \quad (5.10)$$

Także pojęcie przestrzeni hiperwypukłej można uogólnić na przypadek różnorodności w następujący sposób:

Definicja 5.13. ([12] Definition 2.12)

Różnorodność (A, δ) jest hiperwypukłą, jeśli dla dowolnej funkcji $r: \langle X \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, takiej że $r(\emptyset) = 0$ oraz

$$\delta\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right) \leq \sum_{A \in \mathcal{A}} r(A),$$

dla wszystkich skończonych $\mathcal{A} \subset \langle X \rangle$, istnieje punkt $z \in X$, taki że $\delta(\{z\} \cup Y) \leq r(Y)$ dla wszystkich skończonych podzbiorów $Y \subset X$.

W pracy [P17] napisanej wspólnie z Rafaelem Espínolą skupiliśmy się na dwóch problemach. Pierwszym był związek między hiperwypukłością różnorodności a hiperwypukłością przestrzeni metrycznej. W przedstawionym przez nas przykładzie (Example 3.1 w pracy [P17]) różnorodność (X, δ) była hiperwypukłą (w sensie Definicji 5.13), a jednocześnie przestrzeń metryczna (X, d) , w której odległość zdefiniowano wzorem (5.10), nie była hiperwypukłą (w sensie Definicji 5.11). Wykazaliśmy jednak następującą zależność:

Stwierdzenie 5.14. ([P17] Proposition 3.3)

Niech (X, δ) będzie różnorodnością hiperwypukłą, a d – metryką indukowaną w X . Jeśli dla dowolnego $A = \{x_1, \dots, x_n\} \in \langle X \rangle$ zachodzi warunek

$$(|A| - 1) \cdot \delta(A) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(x_i, x_j),$$

to przestrzeń metryczna (X, d) jest hiperwypukłą.

Kolejnym problemem, na którym skupiliśmy się w pracy [P17] była własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających określonych na różnorodnościach. Warto podkreślić, że początkowo rozważaliśmy odwzorowania, których dziedzina była ograniczona względem metryki indukowanej. Wynik Twierdzenia 3.11 z [P17] pokazuje jednak, że możemy znaleźć różnorodność hiperwypukłą z ograniczoną metryką indukowaną i określone na niej odwzorowanie nieoddalające, które nie ma punktów stałych. Zatem w miejsce różnorodności z ograniczoną metryką indukowaną rozważaliśmy różnorodności, na które nałożono bardziej adekwatne założenie. Powiemy mianowicie, że różnorodność (X, δ) jest ograniczona jeśli istnieje dodatnia liczba M , taka że dla każdego skończonego zbioru $A \subset X$ zachodzi warunek $\delta(A) \leq M$. Wówczas prawdziwe jest następujące stwierdzenie:

Twierdzenie 5.15. ([P17] Theorem 4.2)

Niech (X, δ) będzie różnorodnością hiperwypukłą i ograniczoną z metryką indukowaną d . Wówczas każde odwzorowanie nieoddalające $T: (X, d) \rightarrow (X, d)$ ma punkt stały w X .

Na ostatnie twierdzenie możemy spojrzeć jako na rozszerzenie wyniku J. B. Baillona dotyczącego istnienia punktów stałych odwzorowań nieoddalających zdefiniowanych na ograniczonych przestrzeniach hiperwypukłych (zobacz [6, Theorem 5]). Wynika to z faktu, że każda metryczna przestrzeń hiperwypukła jest też hiperwypukła jako różnorodność z funkcją δ zdefiniowaną wzorem (5.9) (dowód tego faktu wykazaliśmy w Lemacie 4.2 w pracy [12]).

Podczas badań nad hiperwypukłością różnorodności natrafiliśmy na problem budowania nowych różnorodności poprzez sklejanie innych. Bliżej tą tematyką zajęłam się w pracy [P18], w której udowodniłam między innymi, kiedy sklepanie dwóch różnorodności zachowa tę samą strukturę – będzie też różnorodnością z funkcją δ zdefiniowaną następująco:

Stwierdzenie 5.16. ([P18] Proposition 2.1)

Niech X i Y będą dwoma zbiorami, takimi że $X \cap Y = \{\theta\}$, a (X, δ_X) i (Y, δ_Y) są różnorodnościami. Wówczas $(X \cup Y, \delta)$ jest różnorodnością, gdzie

$$\begin{aligned} \delta(A) &= \delta_X((A \cap X) \cup \{\theta\}) + \delta_Y((A \cap Y) \cup \{\theta\}), \\ A \cap (X \setminus \{\theta\}) &\neq \emptyset, \quad A \cap (Y \setminus \{\theta\}) \neq \emptyset \end{aligned}$$

oraz $\delta(A) = \delta_X(A)$ (bądź $\delta(A) = \delta_Y(A)$) odpowiednio dla $A \subset X$ (bądź $A \subset Y$).

Wówczas otrzymujemy następujący wynik:

Twierdzenie 5.17. ([P18] Theorem 2.2)

Niech (X, δ) i (Y, δ) będą dwiema różnorodnościami hiperwypukłymi, dla których $X \cap Y = \{\theta\}$. Wówczas $(X \cup Y, \delta)$, gdzie δ zdefiniowano wzorem ze Stwierdzenia 5.16, jest różnorodnością hiperwypukłą.

Ostatnio badania dotyczące sklejania hiperwypukłych przestrzeni metrycznych oraz hiperwypukłych różnorodności kontynuują między innymi B. Miesch oraz M. Borkowski.

5.4 Pozostałe prace

Prace [P06] – [P09] oraz [P11] dotyczyły tematyki mojej pracy doktorskiej i były poświęcone funkcjom wielowartościowym. W szczególności w pracach

tych analizowałam warunki przy jakich multifunkcje, których wartościami są domknięte wypukłe i ograniczone podzbiory przestrzeni Banacha, są całkowalne w sensie Riemanna. Ponadto badałam związki całkowalności w tym sensie z istnieniem pochodnej Hukuhary oraz całkowalnością w sensie Aumanna. Prace [P06] – [P08] zostały opublikowane przed obroną mojego doktoratu.

Praca [P10] była moją pierwszą pracą poświęconą tematyce przestrzeni geodezyjnych. Badałam w niej istnienie punktów stałych złoża multifunkcji określonych na drzewach metrycznych i uogólniłam wspomniany już wynik W. A. Kirka (zobacz Twierdzenie 4.9).

Kolejna praca – [P13] – napisana we współpracy z Rafaellem Espínolą i Aurorą Fernández-León dotyczyła istnienia punktów stałych dla różnych typów odwzorowań asymptotycznie nieoddalających określonych na jednostajnie wypukłych przestrzeniach geodezyjnych.

Prace [P12] i [P14] dotyczyły kontrakcji cyklicznych. Załóżmy, że A, B są dwoma podzbiórami przestrzeni metrycznej, a odwzorowanie $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$ spełnia warunki $T(A) \subset B$ i $T(B) \subset A$. Rozważamy, czy istnieje para $(x_0, y_0) \in A \times B$, taka że $d(x_0, y_0) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$. W pracy [P12] skupiłam się na asymptotycznych kontrakcjach cyklicznych, natomiast w pracy [P14] – na kontrakcjach cyklicznych typu Meir–Keelera. W pracy [P14] podałam między innymi przykład pary zbiorów, która miała tak zwaną własność WUC ale nie spełniała silniejszej własności UC, co dawało odpowiedź na pytanie z pracy [18]. Ponadto pokazałam, że w przeciwieństwie do kontrakcji cyklicznych (zobacz [18]) para zbiorów może mieć własność WUC, ale niekoniecznie dla każdej kontrakcji cyklicznej typu Meir–Keelera istnieje para punktów najlepiej aproksymująca (porównaj z [61]).

Praca [P26] dotyczyła sklejanie przestrzeni wypukłych w sensie Busemanna, bardziej szczegółowo rzecz ujmując, we współpracy z Alicją Samulewicz badałyśmy przy jakich dodatkowych założeniach sklejenie przestrzeni wypukłych w sensie Busemanna daje przestrzeń należącą do tej samej klasy. O wynikach z tej pracy wspominaliśmy już na stronie 10, gdzie omawialiśmy sklejanie przestrzeni geodezyjnych.

Praca [P28] poświęcona była problemowi metryzowalności brzegu geodezyjnego przestrzeni wypukłej w sensie Busemanna wyposażonego w topologię stożkową.

Praca [P20] była pracą przeglądową, w której skupiłam się na najnowszych wynikach dotyczących własności punktu stałego w przestrzeniach $CAT(0)$.

Jednocześnie byłam członkiem grupy badawczej pod kierunkiem Romana Wituły, w ramach której badaliśmy własności ciągów i szeregów rzeczywistych, ze szczególnym uwzględnieniem ciągów liczb Fibonacciego i Lucasa,

a także centralnych współczynników dwumianowych. Wyniki naszych badań ukazały się między innymi w pracach [P22] – [P24] oraz [P27].

Literatura

- [1] P. D. Andreev, *Geometry of ideal boundaries of geodesic spaces with nonpositive curvature in the sense of Busemann*, Siberian Adv. Math. 18 (2008), 95–102.
- [2] D. Ariza-Ruiz, A. Fernández-León, G. López-Acedo, A. Nicolae, *Chebyshev sets in geodesic spaces* J. Approx. Theory 207 (2016), 265–282.
- [3] D. Ariza-Ruiz, L. Leuştean, G. López-Acedo, *Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 366 (2014), 4299–4322.
- [4] D. Ariza-Ruiz, C. Li, G. López-Acedo, *The Schauder fixed point theorem in geodesic spaces*, J. Math. Anal. Appl. 417 (2014), 345–360.
- [5] M. Bačak, *Convex analysis and optimization in Hadamard spaces*, Series in Nonlinear Analysis and Applications 22, De Gruyter, 2014.
- [6] J. B. Baillon, *Nonexpansive mappings and hyperconvex spaces*, Contemp. Math. 72 (1988) 11–19.
- [7] J. B. Baillon, R. E. Bruck, S. Reich, *On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in Banach spaces*, Houston J. Math. 4 (1978), 1–9.
- [8] W. Ballmann, *Lecture on spaces of nonpositive curvature*, Oberwolfach Seminars, vol. 25, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [9] I. Berg, I. Nikolaev, *On a distance between directions in an Alexandrov space of curvature $\leq K$* , Michigan Math. J. 45 (1998), 257–289.
- [10] M. Bourdon, *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un $CAT(-1)$ -espace*, Enseign. Math. 41 (1995), 63–102.
- [11] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [12] D. Bryant, P.F. Tupper, *Hyperconvexity and tight-span theory for diversities*, Adv. Math. 231 (2012), 3172–3198.

- [13] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*, AMS Graduate Studies in Math. vol. 33, American Mathematical Society, 2001.
- [14] S. Buyalo, V. Schroeder, *Elements of Asymptotic Geometry*, EMS Monographs in Mathematics Zurich: European Mathematical Society, 2007.
- [15] D. Descombes, U. Lang, *Convex geodesic bicomings and hyperbolicity*, Geom. Dedicata 177 (2015), 367–384.
- [16] M. Edelstein, *The construction of an asymptotic center with a fixed point property*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 206–208.
- [17] R. Espínola, A. Fernández-León, *CAT(κ)-spaces, weak convergence and fixed points*, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009), 410–427.
- [18] R. Espínola, A. Fernández-León, *On best proximity points in metric and Banach spaces*, Canad. J. Math. 63 (2011), 533–550.
- [19] R. Espínola, M. A. Khamsi, *Introduction to hyperconvex spaces*. In: W. A. Kirk, B. Sims (eds.) Handbook of Metric Fixed Point Theory, 391–435. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [20] R. Espínola, W. A. Kirk *Fixed point theorems in $\mathbb{R}$ -trees with applications to graph theory*, Topology Appl. 153 (2006), 1046–1055.
- [21] T. Foertsch, V. Schroeder, *Hyperbolicity, CAT(-1)-spaces and the ptolemy inequality*, Math. Ann. 350 (2011), 339–356.
- [22] K. Goebel, S. Reich, *Hyperbolic Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings*, Pure Appl. Math., Marcel Dekker, Inc., New York–Basel, 1984.
- [23] K. Goebel, R. Schöneberg, *Moons, bridges, birds... and nonexpansive mappings in Hilbert space*, Bull. Austral. Math. Soc. 17 (1977), 463–466.
- [24] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in: Essays in group theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 8, Springer-Verlag, New York 1987, 75–263.
- [25] K. T. Hahn, *Trygonometry on the unit ball of a complex Hilbert space*, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 183–186.

- [26] B. Halpern, *Fixed points of nonexpansive maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 957–961.
- [27] P. K. Hotchkiss, *The boundary of a Busemann space*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 1903–1912.
- [28] J. Jost, *Equilibrium maps between metric spaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994), 173–204.
- [29] Kirk W. A., *Hyperconvexity of $\mathbb{R}$ -trees*, Fund. Math. 156 (1998), 67–72.
- [30] W. A. Kirk, *Fixed point theorem in $CAT(0)$ and $\mathbb{R}$ -trees*, Fixed Point Theory Appl. 2004:4 (2004), 309–316.
- [31] W. A. Kirk, *Geodesic geometry and fixed point theory*, in: Seminar of Mathematical Analysis, Proceedings, Universities of Malaga and Seville (Spain) September 2002 – February 2003. Girela-Álvarez D., López-Acedo G., Villa-Caro R. (eds.), Univ. Sevilla Secr. Publ., Seville 2003, 195–225.
- [32] W.A. Kirk, *Geodesic geometry and fixed point theory II*, in: Proceedings of the International Conference in Fixed Point Theory and Applications, Valencia, Spain, 2003, pp. 113–142.
- [33] W. A. Kirk, N. Shahzad, *Fixed point theory in distance spaces*, Springer International Publishing Switzerland 2014.
- [34] V. Klee, *Some topological properties of convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 30–45.
- [35] U. Kohlenbach, *Some logical metatheorems with applications in functional analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 89–128.
- [36] U. Kohlenbach, L. Leustean, *Asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex hyperbolic spaces*, J. Eur. Math. Soc. 12 (2010), 71–92.
- [37] U. Kohlenbach, A. Nicolae, *A proof-theoretic bound extraction theorem for CAT -spaces*, Studia Logica 105 (2017), 611–624.
- [38] F. Kohsaka, *Ray’s theorem revisited: a fixed point free firmly nonexpansive mapping in Hilbert spaces*, J. Inequal. Appl. 2015, 2015:86, 3 pp.
- [39] F. Kohsaka, W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. 19 (2008), 824–835.

- [40] E. Kopecká, S. Reich, *Approximating fixed points in the Hilbert ball*, J. Nonlinear Convex Anal. 15 (2014), 819–829.
- [41] T. Kuczumow, A. Stachura, *Extensions of nonexpansive mappings in the Hilbert ball with the hyperbolic metric I*, Comment. Math. Univ. Carolin. 29 (1988), 399–402.
- [42] T. Kuczumow, A. Stachura, *Extensions of nonexpansive mappings in the Hilbert ball with the hyperbolic metric II*, Comment. Math. Univ. Carolin. 29 (1988), 403–410.
- [43] U. Lang, V. Schroeder, *Kirszbraun's theorem and metric spaces of bounded curvature*, Geom. Funct. Anal. 7 (1997), 535–560.
- [44] L. Leuştean, *Nonexpansive iterations in uniformly convex W -hyperbolic spaces*, Nonlinear analysis and optimization I. Nonlinear analysis, 193–210, Contemp. Math., 513, Israel Math. Conf. Proc., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [45] L. Leuştean, A. Nicolae, *Effective results on nonlinear ergodic averages in $CAT(\kappa)$ spaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems 36 (2016), 2580–2601.
- [46] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 9–24.
- [47] A. Moudafi, *Viscosity approximation methods for fixed-points problems*, J. Math. Anal. Appl. 241 (2000), 46–55.
- [48] A. Nicolae, *Asymptotic behavior of averaged and firmly nonexpansive mappings in geodesic spaces*, Nonlinear Anal. 87 (2013), 102–115.
- [49] C.P. Niculescu, I. Roventa, *Schauder fixed point theorem in spaces with global nonpositive curvature*, Fixed Point Theory Appl. (2009), Art. ID 906727, 8 pp.
- [50] A. Papadopoulos, *Metric spaces, convexity and nonpositive curvature*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., vol.6, European Mathematical Society, 2005.
- [51] W.O. Ray, *The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. 258 (1980), 531–537.
- [52] S. Reich, *The almost fixed point property for nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), 44–46.

- [53] S. Reich, *Averaged mappings in the Hilbert ball*, J. Math. Anal. Appl. 109 (1985), 199–206.
- [54] B. D. Rouhani, *On the fixed point property for nonexpansive mappings and semigroups*, Nonlinear Anal. 30 (1997), 389–396.
- [55] B. D. Rouhani, *Remarks on asymptotically non-expansive mappings in Hilbert space*, Nonlinear Anal. 49 (2002), 1099–1104.
- [56] I. Shafrir, *The approximate fixed point property in Banach and hyperbolic spaces*, Israel J. Math. 71 (1990), 211–223.
- [57] R. Sine, *On the converse of the nonexpansive map fixed point theorem for Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 489–490.
- [58] R. Smarzewski, *On firmly nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 113 (1991), 723–725.
- [59] A. Stachura, *Iterates of holomorphic self-maps of the unit ball in Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), 88–90.
- [60] K.T. Sturm, *Probability measures on metric spaces of nonpositive curvature*, in: Heat Kernels and Analysis on Manifolds, Graphs, and Metric Spaces, Lecture Notes from a quarter program on heat kernels, random walks, and analysis on manifolds and graphs, April 16–July 13, 2002 Paris, France. (P. Auscher et al., eds.), RI: Amer. Math. Soc. (AMS) Contemp. Math. 338, Providence, 2003.
- [61] T. Suzuki, M. Kikkawa, C. Vetro, *The existence of the best proximity points in metric spaces with the property UC*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 2918–2926.
- [62] W. Takahashi, J-C. Yao, F. Kohsaka, *The fixed point property and unbounded sets in Banach spaces*, Taiwan. J. Math. 14 (2010), 733–742.

Pigtek