

Warszawa, 13 marca 2018

Prof. dr hab. Piotr Gwiazda
Institute of Mathematics
Polish Academy of Sciences
Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

RECENZJA DOKTORATU PANA MAGISTRA TYMOTEUSZA CHOJECKIEGO.

Rozprawa doktorska Pana Tymoteusza Chojeckiego dotyczy matematycznych aspektów cieczy (gazu) unoszonego przez nieściśliwe losowe pole prędkości. W klasycznej hydrodynamice, kiedy pole prędkości jest wystarczająco regularną funkcją (np. klasy C^1), wektor pola prędkości jest styczny do krzywych trajektorii cząstek. Na opis przepływu płynu możemy patrzeć z jednej strony jako na prawo zachowania masy (lub jak jest to inaczej nazywane równaniem ciągłości) w postaci:

$$\partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}_x(\rho(t, x)v(t, x)) = 0$$

gdzie $\rho(t, x)$ jest gęstością płynu (gazu), zaś $v(t, x)$ jest polem prędkości, obie wielkości odpowiednio w chwili czasu t i punkcie przestrzeni x . Jest to tak zwany opis eulowski.

Przyjmujemy dodatkowo, co jest założeniem rozprawy doktorskiej, że $\operatorname{div}_x v = 0$. Wtedy prawo zachowania masy daje się zapisać alternatywnie jako równanie:

$$\partial_t \rho(t, x) + v(t, x) \nabla_x \rho(t, x) = 0$$

Z drugiej zaś strony wykorzystując obserwację dotyczącą styczności wektora prędkości do trajektorii cząstek możemy napisać równanie

$$\frac{d}{dt} x(t) = v(t, x(t))$$

gdzie $x(t)$ jest pozycją cząstki której ewolucja rozpoczęła się w $x(0)$ w chwili czasu zero. Jest to tak zwany opis lagranżowski. Jak łatwo zauważyć, aby powyższe równanie definiowało jednoparametrową rodzinę dyfeomorfizmów (oznaczymy ją jako $X(0, t, \cdot)$) potrzebna jest pewna regularność pola wektorowego, w szczególności względem zmiennej x .

W takiej sytuacji rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego dla prawa zachowania masy zadane są wzorem $\rho(t, X(0, t, x)) = \rho(0, x)$, co jest powszechnie znane jako metoda charakterystyk. Niestety rozważane równanie w zastosowaniach pochodzących z fizyki jest tylko częścią układu, zaś wektor prędkości nie jest dany, tylko jest jedną z szukanych wielkości. Należy stwierdzić, że nawet w sytuacji, kiedy dane początkowe są regularne, w przypadku kiedy problem przestrzennie jest trójwymiarowy, nie jesteśmy w stanie zagwarantować globalnego w czasie istnienia rozwiązań równania o odpowiedniej regularności.

Z przykrością muszę stwierdzić, jako matematyk zajmujący się deterministycznym opisem makroskopowych równań, że ostatnie lata, a w szczególności negatywne rezultaty dotyczące dobrego postawienia problemu wykorzystujące metodę wypukłego całkowania dla równań Eulera, pokazują porażkę takiego podejścia.

Z tego powodu szczególnie istotne jest poszukiwanie innych strategii opisu zjawiska przepływu, w szczególności takich, dla których pole wektorowe zamiast jednoznacznie zdefiniowaną funkcją będzie polem losowym lub pewnym rozkładem gęstości względem prędkości. Mówiąc o rozkładzie względem prędkości mam na myśli mezoskopowy opis przepływu zadawany przez teorię kinetyczną (w szczególności równanie Boltzmann'a).

Wracając do rozprawy doktorskiej, poza ważkością dla ogólnego rozwoju nauki rozważanej tematyki chciałem podkreślić, że duże wrażenie zrobiła na mnie jej szerokość metodologiczna. Zazwyczaj rozprawy doktorskie, a niestety także rozprawy habilitacyjne oraz dorobek do tytułu profesorskiego dotyczy tylko jednej wąskiej dziedziny matematyki. W tym wypadku tak nie jest, doktorat zawiera w sobie różne metody i techniki z dość odległych dziedzin matematyki: teorii pólgrup, równań różniczkowych cząstkowych lub metod probabilistycznych, nie ukrywam, że przeczytałem go z dużym zainteresowaniem.

Przechodząc do opisu zawartości rozprawy doktorskiej chciałem napisać, że rozprawa jest poprzedzona przejrzystym napisanym wstępem, w szczególności opisującym dokładnie uzyskane w rozprawie wyniki na tle istniejącej literatury.

Następnie w rozprawie znajduje się rozdział *pojęcia wstępne* wprowadzający wszelkie narzędzia matematyczne potrzebne do zrozumienia rozprawy, w szczególności definicje i własności funkcji nieujemnie określonych i całkowicie monotonicznych, przestrzenie i własności rozwiązań równań eliptycznych i parabolicznych, elementy teorii pólgrup, oraz rachunku prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych. Jakkolwiek dla zaprawionego analitycznie czytelnika większość materiału tego rozdziału mogłaby wydawać się zbędna, to świadczy ona w wypadku doktoratu o szacunku dla czytelnika, za co po raz kolejny należy doktoranta pochwalić.

Kolejne rozdziały mają już charakter czysto badawczy. Pierwszy z nich, czyli rozdział trzeci rozprawy odpowiada na pytanie dotyczące tego, czy i pod jakimi warunkami czysty transport ze współczynnikiem transportu stochastycznym może prowadzić do procesu podobnego do dyfuzji tzw. turbulentnej dyfuzji. W szczególności sformułowany jest warunek dostateczny na występowanie turbulentnej dyfuzji jak i podany przykład, w którym jej brak.

W kolejnym czwartym rozdziale autor zajmuje się CTG dla stochastycznego pola wektorowego, które w odróżnieniu od wcześniejszych badań nie jest markowskie.

Ostatni, piąty rozdział, dotyczy uogólnienia rozważań dotyczących CTG na przypadek pól niestacjonarnych, tak zwanych lokalnie stacjonarnych. Rozdział ten jest w mojej ocenie najtrudniejszy i wymagał dużego zaangażowania doktoranta.

Jak w każdej pracy czytając doktorat znalazłem jakieś drobne literówki, jednak co wymaga podkreślenia jest ich moim zdaniem relatywnie mało, co świadczy o tym że doktorat przed wysłaniem do recenzji został bardzo dokładnie dopracowany.

Tu zresztą dochodzimy do jedynej przysłowiowej "łyżki dziegciu". Chwaląc doktoranta za uzyskane rezultaty oraz wiedzę, którą posiadał w bardzo współczesnej dziedzinie, trzeba też zauważyć, że w spisie literatury rozprawy doktorskiej znajduje się tylko jedna praca ([11] z 2014 roku), której współautorem jest doktorant. Rozumiem, że trudna tematyka wymaga czasu, ale jak pisałem powyżej rozprawa doktorska zawiera materiał na co najmniej jedną bardzo dobrą pracę. Zdecydowanie z korzyścią dla doktoranta byłaby większa aktywność w publikowaniu otrzymanych wyników.

Konkludując, wnioskuję o dopuszczenie mgr Tymoteusza Chojeckiego do dalszych etapów postępowania doktorskiego. Ponadto, z uwagi na szeroki aparat badawczy i głębokość uzyskanych wyników, wnioskuję o wyróżnienie rozprawy doktorskiej.

Z poważaniem



Piotr Gwiazda