

dr hab. Anna Talarczyk-Noble, prof. UW
 Instytut Matematyki
 Uniwersytet Warszawski
 ul. Banacha 2
 02-097 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Tymoteusza Chojeckiego "Twierdzenia graniczne dla ruchów w polach losowych".

Rozprawa doktorska poświęcona jest modelowi pasywnego trasera oraz twierdzeń granicznych z nim związanych.

Jest to jeden z podstawowych modeli rozważanych w hydrodynamice, w zagadnieniu turbulentnego transportu. Rozważa się położenie cząstki o zerowej masie, poruszającej się w pewnym losowym polu prędkości. Tj. proces położenia cząstki zadany jest równaniem

$$\frac{dX(t)}{dt} = V(t, X(t)), \quad X(0) = 0, \quad (1)$$

gdzie $(V(t, x))_{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d}$ jest pewnym polem losowym o wartościach rzeczywistych. Ze względu na interpretację w hydrodynamice zwykle zakłada się, że pole V jest nieściśliwe, tj. $\nabla_x \cdot V(t, x) = 0$, często także stacjonarność i izotropowość. Przy dość ogólnych warunkach na V wiadomo, że zachodzi prawo wielkich liczb, tzn. istnieje taki wektor v_* , że $\frac{X(t)}{t} \rightarrow v_*$, gdy $t \rightarrow \infty$. Jeżeli $v_* = 0$ w sposób naturalny nasuwa się pytanie o asymptotykę drugiego rzędu, tj. czy zachodzi odpowiednik centralnego twierdzenia granicznego, a więc czy $\frac{X(t)}{\sqrt{t}}$ zbiega do rozkładu normalnego przy $t \rightarrow \infty$. Jeszcze ogólniej, można pytać o zbieżność funkcjonalną, tj. badać zbieżność rozkładów procesów

$$\frac{1}{\varepsilon} X\left(\frac{t}{\varepsilon^2}\right), \quad t \geq 0,$$

gdzie $\varepsilon \rightarrow 0$ i X spełnia (1).

Praca składa się z pięciu rozdziałów oraz Dodatku. Część pierwsza stanowi opis modelu wraz z odesłaniem do literatury i omówieniem dotychczas znanych wyników. Ponadto pokrótce omówione są wyniki uzyskane przez Doktoranta i przedstawione w kolejnych rozdziałach pracy. W rozdziale 2 wprowadzone są oznaczenia oraz przywołane pewne znane twierdzenia używane w dalszych częściach pracy. Rozdziały 3-5 stanowią główną część rozprawy doktorskiej i zawierają wyniki uzyskane przez Doktoranta wraz z ich dowodami. Omówię je w dalszej części recenzji. Pewne lematy bardziej technicznej natury zawarte są w Dodatku.

Wyniki przedstawione w rozdziale 2 zostały opublikowane we wspólnym artykule Doktoranta z Promotorem [11], opublikowanej w Statistics and Probability Letters. Pewnym zgrzytem jest fakt, że przy sformułowaniu odpowiednich twierdzeń w rozprawie Doktorant nie wymienia współautora (artykuł znajduje się w bibliografii). Wyniki dotyczą problemu niezdegenerowania granicznej dyfuzji. W pracy [36] (Komorowski, Papanicolaou) wykazano, że jeśli pole losowe V jest gaussowskie, stacjonarne, o średniej zero, nieściśliwe, dostatecznie dobrze całkowalne i o zależności o skończonym zasięgu czasowym (T -zależne, tzn. $V(t, x)$ i $V(s, y)$ są niezależne, gdy $|t - s|$ jest większe od pewnego ustalonego zasięgu T), to $\frac{X(t)}{\sqrt{t}}$ zbiega wg. rozkładu do rozkładu Gaussa $N(0, \kappa)$, nie wykazano jednak, kiedy $\kappa \neq 0$.

Głównym wynikiem tej części rozprawy doktorskiej jest podanie warunku dostatecznego, przy którym κ będzie niezdegenerowane (Tw. 3.2.1). Jest on wyrażony przy pomocy warunku związanego z całkowalnością spektrum energetycznego pola. Podstawowym narzędziem w dowodzie jest twierdzenie Leonowa dla ciągów stacjonarnych. Do sprawdzenia jego założeń używa się zasady wariacyjnej i technik związanych z teorią półgrup. Ponadto, podany jest przykład pola prędkości, dla którego $\kappa = 0$.

Kolejny rozdział dotyczy sytuacji, gdy pole nie jest T -zależne, ale korelacja w czasie ma leje wykładniczo wraz z odległością. Znow rozważa się gaussowskie pole prędkości. Przypadek markowski został zbadany wcześniej w pracach [15], [10], [38]. Tu chciano odejść od założenia markowskości pola prędkości. Rozważa się pole o funkcji kowariancji specjalnej postaci:

$$R_{p,q}(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} h(|t|, \xi) \hat{R}_{p,q}(\xi) d\xi,$$

gdzie dla każdego ξ funkcja h jako funkcja zmiennej t jest całkowicie monotoniczna, jest więc transformatą Laplace'a pewnej miary μ_ξ na półprostej dodatniej. Zakłada się, że nośniki odpowiednich miar μ_ξ są wspólnie oddzielone od zera. Dowód polega na przejściu do wyższego wymiaru. Otrzymuje się wtedy przypadek markowski, a proces, który nas interesuje jest jedną ze współrzędnych rozszerzonego procesu. Można wtedy korzystać ze znanych wyników.

Najobszerniejszą i najbardziej skomplikowaną część pracy stanowi rozdział 5, zawierający wyniki poświęcone zachowaniu trasera w polu lokalnie stacjonarnym. Nadal rozważa się gaussowskie pole prędkości, ale odchodzi się od założenia stacjonarności. Rozważa się pewne gaussowskie pole losowe $V(t, x, y)$ skonstruowane przy pomocy procesów Ornsteina-Uhlenbecka, takie, że dla każdego y pole $(V(t, x, y))_{(t,x)}$ jest stacjonarne. Zmienna x jest tzw. "szybką zmienną", natomiast y odpowiada za powolne zmiany. Ścisłej, położenie trasera opisane jest przez równanie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} X(t) &= V^{(\varepsilon)}(t, X(t)) \\ &= W(t, X(t), \varepsilon X(t)) + \varepsilon U(t, X(t), \varepsilon X(t)) \\ X(0) &= \frac{x_0}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Tym razem, w przeciwieństwie do poprzednich rozdziałów rozważa się zbieżność funkcjonalną procesu położenia trasera z przyspieszonym czasem, tj procesów $X^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon X(\frac{t}{\varepsilon^2})$. W głównym twierdzeniu (Tw. 5.3.1) wykazana jest zbieżność przeskalowanego procesu położenia trasera przy $\varepsilon \rightarrow 0$. W granicy otrzymuje się pewien proces dyfuzji.

Dowód jest długi i skomplikowany, wymaga kilku poziomów przybliżeń oraz wielu subtelnych oszacowań. Nie sprawdziłam wszystkich detali obliczeń, ale rozumowania, które prześledziłam wydają się poprawne. Poważne zastrzeżenia mam natomiast do redakcji tej części pracy. Dowód jest złożony i ma wiele kroków, a napisany jest jednym ciągiem, z ogromnym nagromadzeniem notacji, którą trudno spamiętać. Dobrze, że część technicznych lematów została wydzielona w innej sekcji. Mało jest wyjaśnień po co się wprowadza dodatkową notację i do czego się dąży. Powoduje to, że praca jest bardzo nieczytelna, a argument trudny do prześledzenia. Nie sądzę, że można by pracę można było opublikować w takiej formie. Doceniam złożoność rozumowania, jednak tym bardziej należałoby przybliżyć ideę czytelnikowi. Bardzo by pomogło, gdyby przed właściwym dowodem znalazł się schemat dowodu z głównymi krokami oraz motywujące wyjaśnienia. Należy też rozważyć ograniczenie notacji.

Nie mam takich zastrzeżeń do pozostałych części pracy, gdyż tam dowody są krótsze. Mogłoby być napisane nieco więcej o wyjaśnieniu/interpretacji założeń twierdzeń.

Bardziej konkretne uwagi:

Błąd w definicji mocnego rozwiązania (Def. 2.5.14) (- jaka powinna być filtracja?).

Nie rozumiem potrzeby przeprowadzania rozumowań ze str. 61 w sekcji 4.2.1. Widać od razu (jak zresztą napisano później w (4.26) z literówką w def. $\tilde{g}$), że

$$h(t, \xi) = E e^{-t\eta_\xi} = \int_0^\infty e^{-t\lambda} \mu_\xi(d\lambda),$$

gdzie $\eta_\xi = \gamma(\xi) + (\tilde{\gamma}(\xi))^{1/\alpha} \eta$, gdzie η jest zmienną losową α -stabilną ($\alpha < 1$), całkowicie niesymetryczną, z parametrem skośności 1, więc automatycznie otrzymuje się, że h jest całkowicie

monotoniczna po t i spełnione jest założenie (4.16). Wcześniejsze pół strony rozumowania jest niepotrzebne.

Przedstawiona do oceny rozprawa dotyczy trudnej tematyki procesów w losowym środowisku. Wyniki zaprezentowane w pracy są nowe i przyczyniają się do lepszego zrozumienia zagadnienia pasywnego trasaera. Doktorant wykazał się zrozumieniem tematyki oraz opanowaniem technik dowodowych wykorzystywanych w tego typu zagadnieniach.

Uważam, że rozprawa spełnia wymagania ustawowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Anne Talergł-Wable