Twierdzenia graniczne dla ruchów w polach losowych

Streszczenie

Motywacja

Niniejsza praca dotyczy problematyki ruchów w nieściśliwych polach losowych. Tego typu zagadnienie, opisuje np. transport substancji w turbulentnym płynie. Przepływ ten bywa bardzo skomplikowany i nieregularny. Stopień jego komplikacji charakteryzuje liczba Reynoldsa $Re := ul/\nu$, gdzie u jest charakterystyczną prędkością płynu, l jest typowym wymiarem liniowym zagadnienia, a ν jest jego lepkością kinetyczną. Ruch turbulentny, przy dostatecznie dużych wartościach liczby Reynoldsa, charakteryzuje się w każdym punkcie przepływu, nieregularnymi, nieuporządkowanymi zmianami prędkości w czasie. Transport substancji w turbulentnym przepływie może prowadzić do tzw. zjawiska turbulentnej dyfuzji, t.j. dyfuzji wywołanej przez skomplikowaną naturę adwekcji w turbulentnym przepływie płynu. Pojęcie turbulentnej dyfuzji zostało wprowadzone, na początku lat 20-tych XX wieku, przez G.I. Taylora w [19]. Zachodzenie takiego zjawiska w dostatecznie skomplikowanym układzie dynamicznym zostało sformułowane jako hipoteza przez V.I. Arnolda [1]. Tło fizyczne tego zagadnienia można znaleźć w monografii Frischa [6].

W transporcie dyfuzyjnym średniokwadratowe przemieszczenie substancji jest proporcjonalne do czasu. Ta zasada nazywa się prawem Ficka ([6]). R. Kraichnan [13] przypuszczał, że przybliżenie dyfuzyjne jest właściwe, w wymiarze $d \geq 3$ przy dostatecznie dużym mieszaniu, nawet dla nieściśliwych pól losowych o średniej równej 0, które nie zależą od czasu. W drugiej części swojej hipotezy przypuszczał, że aproksymacja dyfuzyjna nie zachodzi dla $d = 2$ ze względu na ograniczenie topologiczne spowodowane wymiarem.

Ponieważ turbulentny transport jest przepływem wysoce nieregularnym o dużej zmienności, to naturalnym modelem matematycznym, który jest wykorzystywany do badania tego zjawiska są losowe pola wektorowe. Transport opisany jest wtedy odpowiednim równaniem różniczkowym zwyczajnym z losową prawą stroną.

Model pasywnego trasera

Najprostszym sformułowaniem problemu turbulentnej dyfuzji w zagadnieniu turbulentnego transportu jest **model pasywnego trasera**. Model ten jest opisany następującym równaniem

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = V\left(t, X(t)\right), \quad t \in mbR, \\ \\ X(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $V : \mathbb{R}^{1+d} \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, jest pewnym rzeczywistym, dostatecznie regularnym, $d-$wymiarowym polem losowym nad przestrzenią probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Jest to klasyczny model hydrodynamiki statystycznej, patrz np. [15]. Jego interpretacją fizyczną jest ruch cząstki zanieczyszczenia unoszonej przez turbulentny przepływ. Cząstka ta jest nazywana **traserem**. Proces $\{X(t),\ t \geq 0\}$ modeluje jego trajektorię. W hydrodynamice badając model pasywnego trasera zakłada się zwykle nieściśliwość pola, t.j.

$$\nabla_x \cdot V(t,x) = \sum_{j=1}^{d} \nabla_{x_j} V_j(t,x) \equiv 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}. \tag{2}$$

Jednymi z podstawowych pytań dotyczących asymptotyki trasera, przy $t \to \infty$, jest pytanie czy trajektoria spełnia prawo wielkich liczb (PWL), a fluktuacje wokół średniej centralne twierdzenia graniczne (CTG). Prawo wielkich liczb mówi, że istnieje deterministyczny wektor $v_* \in \mathbb{R}^d$ (nazywany *dryfem Stokesa*), taki, że $X(t)/t \to v_*$ przy $t \to +\infty$. W przypadku, gdy można pokazać PWL to następnie pytamy się czy zachodzi CTG, tzn. czy $(X(t) - v_* t)/\sqrt{t}$ jest zbieżny według rozkładu, gdy $t \to +\infty$, do wektora normalnego $N(0, \kappa)$. Macierz kowariancji $\kappa = [\kappa_{i,j}]_{i,j=1,\dots d}$ jest nazywana *turbulentną dyfuzyjnością* trasera.

Omówienie niektórych wyników w literaturze

W przypadku, gdy pole $\{V(t,x), (t,x) \in \mathbb{R}^{1+d})\}$ jest stacjonarne po czasie i przestrzeni, całkowalne tzn. $\mathbb{E}|V(0,0)| < +\infty$, oraz gdy zachodzi (2), to proces $\{V(t, X(t)),\ t \geq 0\}$ jest stacjonarny ([17]). Z twierdzenia ergodycznego (patrz [14]) wiemy, że zachodzi zbieżność

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t V(s, X(s)) ds = \mathbb{E}\left[V(0,0) | \mathcal{V}_{\text{inv}}\right], \text{ p.n. oraz w } L^1, \tag{3}$$

gdzie $\mathcal{V}_{\text{inv}}$ jest σ-ciałem zbiorów niezmienniczych względem przesunięć ścieżki. W przypadku, gdy proces $\{V(t, X(t)),\ t \geq 0\}$ jest ergodyczny, (wtedy $\mathcal{V}_{\text{inv}}$ składa się ze zbiorów trywialnych). Prawa strona (3) wynosi $\mathbb{E}[V(0,0)]$.

Jeśli chodzi o CTG, to w pracach [5, 3, 12] pokazano, że jeśli stacjonarne pole wektorowe $\{V(t,x),(t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}\}$ ma średnią zero, jest markowowskie po czasie i posiada własność **przerwy spektralnej** to

$$\frac{X(t)}{\sqrt{t}} \Longrightarrow N(0,\kappa), \quad t \to \infty.$$

Powyżej $\Longrightarrow$ oznacza zbieżność według rozkładu.

W przypadku, gdy pole V jest markowowskie po czasie, lecz nie posiada własności przerwy spektralnej, możliwe jest pokazanie CTG, przy założeniu o mieszaniu w zmiennej przestrzennej, patrz [10] oraz [9], Chapter 12.

Jeśli chodzi o pola niemarkowowskie, to w pracy [11] (patrz także [4]) udowodniono, że CTG zachodzi, gdy gaussowskie pole $V(\cdot)$ jest stacjonarne po czasie i przestrzeni, nieściśliwe, o średniej zero oraz istnieje $T > 0$ takie, że macierz kowariancji

$$R(t,x) = \mathbb{E}[V_i(t,x)V_j(0,0)]_{ij=1,\ldots,d}, \; x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \tag{4}$$

spełnia $R(t,x) = 0, \; |t| > T, \; x \in \mathbb{R}^d$.

Należy też wspomnieć o funkcjonalnej wersji powyższych wyników. Problem pasywnego trasera w skalowaniu dyfuzyjnym wygląda następująco

$$\begin{cases} \dfrac{dX^{(\varepsilon)}(t)}{dt} = \dfrac{1}{\varepsilon} V\left(\dfrac{t}{\varepsilon^2}, \dfrac{X^{(\varepsilon)}(t)}{\varepsilon}\right), \\ X^{(\varepsilon)}(0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $\varepsilon > 0$ odpowiada ilorazowi skal mikro/makroskopowych. Badając asymptotykę powyższego modelu przy $\varepsilon \to 0$ interesuje nas **zasada niezmienniczości**. Mówi ona, że $\{X^{(\varepsilon)}(t), \; t \geq 0\}$ zbiega, do ruchu Browna $\{X(t), \; t \geq 0\}$, według rozkładu nad $C([0,+\infty);\mathbb{R}^d)$. Zasada ta była pokazana m.in. we wcześniej omówionych pracach [5, 3, 12] jak też i w [7],[8].

Omówienie uzyskanych wyników

Problem niezdegenerowania macierzy turbulentnej dyfuzyjności trasera

W Rozdziale 3 zajmujemy się przypadkiem pola V, które jest T-zależne, oraz które spełnia założenia pochodzące z [11]. Przypominamy, że w pracy tej pokazano zbieżność według rozkładu $X(t)/\sqrt{t}$ do wektora normalnego $N(0,\kappa)$. Powstaje podstawowe pytanie czy turbulentna dyfuzyjność κ nie jest macierzą zerową. Zagadnienie to nie zostało roztrzygnięte w [11]. Równość $\kappa = 0$ wskazywałaby na subdyfuzyjne zachowanie trasera. W Rozdziale 3 przedstawimy warunek dostateczny na to by $\kappa \neq 0$. W końcowej sekcji pokazujemy przykład nietrywialnego, nieściśliwego i mieszającego pola dla którego $\kappa = 0$.

CTG dla pól niemarkowowskich

Przypominamy, że CTG udowodniono w przypadku pól T-zależnych oraz w przypadku, gdy pole wektorowe $\{V(t,x),(t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}\}$ jest stacjonarne, markowowskie i posiada własność przerwy spektralnej ([5, 12, 3]). W przypadku pól gaussowskich macierz kowariancji tego typu pól losowych ma postać

$$R_{pq}(t,x) := \mathbb{E}\big[V_p(t,x)V_q(0,0)\big] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi-\gamma(\xi)|t|}\hat{R}_{pq}(d\xi), \tag{6}$$

gdzie istnieje γ_0 takie, że $\gamma(\cdot) \geq \gamma_0 > 0$ i $\hat{R}(d\xi) = [\hat{R}_{pq}(d\xi)]$, $p,q = 1,\dots,d$, jest miarą borelowską o wartościach w przestrzeniach $d \times d$ macierzy hermitowskich, nieujemnie oznaczonych.

Na podstawie [11, 5] można sformułować przypuszczenie, że centralne twierdzenie graniczne zachodzi dla ruchów w polach, których kowariancje szybko maleją po czasie np. gdy istnieją $a, C > 0$ takie, że

$$|R_{pq}(t,x)| \leq Ce^{-a|t|},\ \ p,q = 1,\dots,d, \text{dla wszystkich } (t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}.$$

Krokiem w tym kierunku jest wynik udowodniony w Rozdziale 4. Rozważamy w nim kowariancje, w których czynnik $\exp\{-\gamma(\xi)|t|\}$ we wzorze (6), jest zastąpiony przez

$$h(|t|,\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma(\xi,\lambda)|t|}\mu(d\lambda),$$

gdzie μ jest pewną nieujemną, skończoną miara borelowską na $\mathbb{R}$, a $\gamma : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ jest nieujemną, borelowską funkcją mierzalną. Rozważamy zatem pola $V(\cdot)$, których macierz kowariancji jest równa

$$R_{pq}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}h(|t|,\xi)\hat{R}_{p,q}(d\xi) \qquad p,q = 1,\dots,d.$$

Markowowskie pola odpowiadają przypadkowi $\mu(d\lambda) = \delta_0(d\lambda)$. Założenie przerwy spektralnej jest zastąpione przez hipotezę, że $\gamma(\xi,\lambda) \geq \gamma_0 > 0$.

Pola Lokalnie Stacjonarne

W dotychczasowych wynikach dla modelu pasywnego trasera zakładano stacjonarność po (t,x). Powodem była konieczność użycia twierdzenia ergodycznego w martyngałowym dowodzie CTG. W Rozdziale 5 zajmujemy się przypadkiem pola, które nie jest stacjonarne. Naturalnym uogólnieniem tego założenia jest pojęcie **lokalnej stacjonarności**. Pojęcie lokalnej stacjonarności pojawiło się między innymi w pracach [16], [18], [2] . Problem pasywnego trasera dla pola lokalnie stacjonarnego można zapisać następującym równaniem

$$\begin{cases} \dfrac{dX^{(\varepsilon)}(t)}{dt} = \dfrac{1}{\varepsilon} V_\varepsilon \left(\dfrac{t}{\varepsilon^2}, \dfrac{X^{(\varepsilon)}(t)}{\varepsilon} \right), \\ X^{(\varepsilon)}(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Pola $V_\varepsilon(t,x)$ są postaci $V(t,x,\varepsilon x)$, gdzie rozkłady $V(t,x,0)$ i $V(t,x,\varepsilon x)$ zaczynają się istotnie różnić od siebie dla $|x| \sim 1/\varepsilon$, dla małych $\varepsilon > 0$ oraz $V(t,x,y)$ jest stacjonarne dla każdego $y \in \mathbb{R}^d$.

Aby móc powiedzieć coś o asymptotyce konstruujemy przykład klasy gaussowskich pól lokalnie stacjonarnych i markowowskich po zmiennej czasowej i dla tej klasy pokazujemy aproksymację dyfuzyjną.

Nieco podobny problem badano w pracach [7, 8], gdy $V^{(\varepsilon)}(t,x)$ jest deterministycznym polem wektorowym sterowanym ergodycznym przepływem (ang. *flow*) na pewnej rozmaitości M o losowym warunku początkowym.

Bibliografia

[1] Arnold, V., I., *Instability of dynamical systems with several degrees of freedom*, Soviet Mathematics 5: 581–585, 1964.

[2] Bensoussan, A., Lions, J.L., Papanicolaou, G., *Asymptotic analysis for periodic structures. Studies in Mathematics and its Applications*, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[3] Carmona, R., Xu, L., *Homogenization For Time Dependent 2-d Incompressible Gaussian Flows.* Preprint (1996).

[4] Chojecki, T., Komorowski, T., *On positivity of the variance of a tracer moving in a divergence-free Gaussian random field*, Statistics & Probability Letters, 2014, vol. 91, issue C, pages 98-106

[5] Fannjiang, A., Komorowski, T., *Turbulent Diffusion in Markovian Flows*, Ann. of Appl. Prob. 9, 591-610, (1999).

[6] Frisch, U., *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press 1995.

[7] Kelly, D., Melbourne, I., *Deterministic homogenization for fast-slow systems with chaotic noise*, http://arxiv.org/abs/1409.5748, (2014)

[8] Kifer, Y., *L^2 diffusion approximation for slow motion in averaging* Stoch. Dynam 01/2002; 03(02).

[9] Komorowski, T., Landim, C., Olla, S., *Fluctuations in Markov Processes*, Springer, 2012.

[10] Komorowski, T., Olla, S., *On the Sector Condition and Homogenization of Diffusions with a Gaussian Drift*, Journ. of Funct. Anal. 197, 179-211, (2003).

[11] Komorowski, T., Papanicolaou, G., *Motion in a Gaussian, Incompresible Flow*, The Annals of Applied Probability , pp. 229-264 (1997).

[12] Koralov, L., *Transport by time dependent stationary flow*, Comm. Math. Phys. 199 (1999), no. 3, 649–681.

[13] Kraichnan, R., *Diffusion in a Random Velocity Field*, Phys. Fluids 13, 22-31(1970).

[14] Krengel, U., Brunel, A.,*Ergodic Theorems*, W. de Gruyter, 1985.

[15] Monin, A. S., Yaglom A. M., *Statistical Fluid Mechanics of Turbulence*, Vols I,II, MIT Press Cambridge,(1971), (1975).

[16] Olla, S., Siri, P., *Homogenization of a bond diffusion in a locally ergodic random environment*, Stochastic Processes and their Applications 109, pp. 317-326, 2004.

[17] Port, S. C., Stone, C., *Random Measures And Their Application To Motion In An Incompressible Fluid*. J. Appl. Prob. 13, 1976 499-506.

[18] Rhodes, R., *Diffusion in a locally stationary random environment*, Probab. Theory Related Fields 143 (2009), no. 3-4, 545568.

[19] Taylor, G. I., *Diffusions By Continuous Movements*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 20, 196-211 (1923).

Tymoteusz Chojecki

02.11.2017 r.