

dr hab., em. prof. UJ
Edward Tutaj
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego

RECENZJA

pracy doktorskiej p. Rafała NALEPY

pt.

WARUNKI ZWARTOŚCIOWE W PRZESTRZENI FUNKCJI O UTEMPEROWANYCH
PRZYROSTACH I ICH ZASTOSOWANIA W TEORII RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

1. O temacie pracy.

Matematyk, jeśli badając jakąś przestrzeń topologiczną, stwierdzi jej zwartość, odczuwa "przyływ mocy". Przestrzenie zwarte mają bowiem wiele unikatowych własności pozwalających na stosowanie silnych metod. Dobrym przykładem jest tu metoda punktów stałych. W klasycznym twierdzeniu Brouwera, występująca w nim kula domknięta w $\mathbb{R}^n$, jest automatycznie zbiorem zwartym, a w twierdzeniu Schaudera, uogólniającym tw. Brouwera, występujące w nim odwzorowanie jest zwarte (pełnociągłe), co umożliwia wykorzystanie własności przestrzeni zwartych. Jednak w praktyce, gdy stosujemy twierdzenia o punktach stałych w konkretnych sytuacjach, to nie mamy zwartości danej z założenia, lecz musimy jej dowieść/sprawdzić ją dla konkretnego zbioru $X \subset E$, gdzie E jest zazwyczaj (tj. w przypadku twierdzeń o istnieniu dla równań różniczkowych i całkowych) jakąś przestrzenią (funkcyjną) Banacha. Wynika stąd, że silne metody (jnp. twierdzenie Schaudera, a także inne) wymagają dodatkowego "oprzysądowania" w postaci odpowiednich kryteriów zwartości. Termin "odpowiednich" oznacza, że kryteria te są często specyficzne dla danej przestrzeni E (ew. klasy przestrzeni) w tym sensie, że są formułowane w języku elementów E . Klasycznym przykładem - źródłowym dla wielu prac, w tym i niniejszej

pracy - jest twierdzenie Ascoli-Arzelii, w którym tą własnością formułowaną w "języku elementów przestrzeni" jest *równociągłość*.

Poszukiwanie "pracujących" kryteriów zwartości, ewentualnie względnej zwartości, to ważna problematyka. Przez dziesiątki lat od jej pojawienia, udało się znaleźć wiele odpowiednich twierdzeń. Wymienić tu można dla przykładu wymienione wyżej twierdzenie Ascoli-Arzelii, lub tak kryteria zwartości zbiorów w przestrzeniach z bazami Schaudera (czyli w szczególności dla wszystkich przestrzeni l_p). Ale dla wielu ważnych klas przestrzeni Banacha, jeszcze takich satysfakcjonujących kryteriów nie mamy. Należą do nich w szczególności tytułowe przestrzenie o *utemperowanych przyrostach*. Przestrzenie te, a w zasadzie klasy takich przestrzeni, stanowią uogólnienie klasycznych przestrzeni funkcji spełniających warunek Höldera (a zatem w szczególności warunek Lipschitza). I takie zadanie sobie Autor stawia: *zdefiniować (możliwie szeroką) klasę przestrzeni o utemperowanych przyrostach, udowodnić pewne kryteria zwartości w tych przestrzeniach i na koniec pokazać jakieś zastosowania tych rezultatów*.

Uważam, że powyższa tematyka, jako mocno zakorzeniona w analizie matematycznej, jest istotna i warta badania.

2. Opis zawartości rozprawy.

Praca zredagowana jest w ośmiu rozdziałach poprzedzonych trzypięciowym *Wstępem* i zakończonych dwustronicowymi *Uwagami końcowymi*.

Rozdział pierwszy, poświęcony ustaleniu oznaczeń i terminologii, nie zawiera istotnych treści. Istotny z punktu widzenia treści rozprawy, jest rozdział drugi, w którym Autor omawia tzw. "miary niezwartości" zbioru w przestrzeni metrycznej, a w szczególności miary niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa. Miary niezwartości zostały powołane do samodzielnego życia w matematyce w latach 50-tych ubiegłego stulecia i okazały się nader poręcznym narzędziem. Szczególnie "sympatyczna" z punktu widzenia definicji, jest miara niezwartości Hausdorffa, gdyż jest to odległość Hausdorffa zbioru od podprzestrzeni podzbiorów zwartych rozważanej przestrzeni metrycznej. Autor omawia także aksjomatyczną teorię takich miar wg. pracy pp. Banasia i Goebela z 1980 roku. Rozdział kończy przypomnienie twierdzenia Darbo o punktach stałych kontrakcji względem miar niezwartości (wykorzystywane w końcowych rozdziałach pracy), które jest pewnym analogonem twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Chociaż w rozdziale tym nie ma nowych rezultatów, to jest on potrzebny dla czytelnika nie obcującego na codzień z miarami niezwartości.

W rozdziale trzecim Autor wprowadza tytułowe przestrzenie *funkcji o przyrostach utemperowanych*. Dla zadanej przestrzeni metrycznej (M, d) , oraz zadanej funkcji $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ niemalejącej i takiej, że $\omega(t) = 0$ tylko dla $t = 0$, (zwanej modulem ciągłości), wprowadzone są przestrzenie $C_\omega(M)$ złożone z tych funkcji rzeczywistych na M , dla których istnieje stała K , zależna od funkcji, taka, że

$$|x(u) - x(v)| \leq K \cdot \omega(d(u, v)).$$

Autor "banachizuje" te przestrzenie, wprowadzając stosowną normę i dowodząc zupełności. Wprawdzie metody stosowane w dowodach własności przestrzeni $C_\omega(M)$ są analogiczne jak w przypadku funkcji hölderowskich, których są uogólnieniem, i zapewne są do znalezienia w literaturze przedmiotu, ale może nie w takiej ogólności, jaką proponuje Autor.

Najistotniejsze w omawianej pracy są rozdziały czwarty i piąty. W czwartym Autor formułuje i dowodzi pewnego kryterium relatywnej zwartości podzbiorów przestrzeni $C_\omega(M)$ (przy dodatkowym założeniu (subaddytywność) o module ω). Wypowiedź tego kryterium jest zbliżona do wypowiedzi twierdzenia Ascoli-Arzeliego i w dowodzie Autor stosuje to twierdzenie. Uzyskuje na tej drodze, jako wniosek, kryteria relatywnej zwartości (warunek konieczny) w przestrzeniach funkcji z warunkiem Höldera. W rozdziale piątym Autor konstruuje pewną miarę niezwartości $\beta_o(X)$ w przestrzeni typu $C_\omega(M)$ modyfikując nieco procedurę opisaną w przypadku $M = [a, b]$ na stronie 12-tej rozprawy.

W dwu ostatnich rozdziałach Autor przedstawia zastosowania uzyskanych rezultatów do udowodnienia twierdzeń o istnieniu rozwiązań równań całkowych (nieliniowych, a "kwadratowych") typu Hammersteina i Volterra-Hammersteina w rozważanych przestrzeniach. Używa w tym celu twierdzenia o kontrakcjach Darbo w zastosowaniu do skonstruowanej wcześniej miary niezwartości $\beta_o(X)$.

3. Ocena rozprawy.

Moja ocena rozprawy doktorskiej p. mgr Rafała Nalepy jest pozytywna. Po pierwsze tematyka pracy, chociaż nie jest w pełni nowatorska, to należy do kluczowego dla analizy matematycznej nurtu twierdzeń o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych i całkowych, w topologii do nurtu twierdzeń o punktach stałych, miarach niezwartości, a w analizie funkcjonalnej rezultaty Autora wzbogacają poznanie przestrzeni funkcji typu *o utemperowanych przyrostach*. Po drugie, udowodnione przez Autora kryterium relatywnej zwartości w postaci Twierdzenia 4.1 jest wprawdzie z ogólnego punktu widzenia, pewną wersją twierdzenia Arzeliego, jego uogólnieniem, ale na tyle niebanalnym, że wynik trzeba uznać za nowy. Twierdzenie 4.1, jego konsekwencje, a także konstrukcja nowej miary niezwartości $\beta_o(X)$, odpowiadają, moim zdaniem, wymogom oryginalności i nowości, jakie zwyczajowo stawia się w odniesieniu do prac doktorskich. Po trzecie, przedstawione w końcowych rozdziałach zastosowania, wskazują na potencjał uzyskanych rezultatów. I po czwarte, rozprawa napisana jest jasno, starannie i dodatkowo z pewną swadą, o co nie zawsze dbają kandydaci na doktorów.

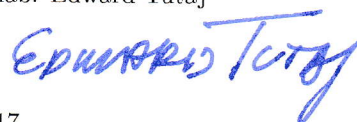
4. Konkluzja

Biorąc pod uwagę powyższe uważam, że:

Omawiana rozprawa doktorska p. mgr Rafała Nalepy pt. "WARUNKI ZWAR-

TOŚCIOWE W PRZESTRZENI FUNKCJI O UTEMPEROWANYCH PRZYROSTACH I ICH
ZASTOSOWANIA W TEORII RÓWNAŃ CAŁKOWYCH” *spełnia ustawowe wymogi
stawiane pracom doktorskim. Zarazem wnoszę o dopuszczenie p. mgr Rafała
Nalepy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.*

dr hab. Edward Tutaj



Kraków, 5-go kwietnia r. 2017