

dr. hab. Małgorzata Wróbel, prof. PCz
Instytut Matematyki
Politechniki Częstochowskiej
ul. Armii Krajowej 21
42-200 Częstochowa

Częstochowa, 5 kwietnia 2017 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgra Rafała Nalepy
Warunki zwartościowe w przestrzeni funkcji o utemperowanych
przyrostach i ich zastosowania w teorii równań całkowych

Badania prowadzone w pracy doktorskiej pana mgra Rafała Nalepy idą w dwóch kierunkach. Jednym z nich jest podanie warunków na relatywną zwartość zbiorów w przestrzeniach funkcyjnych, w których przyrosty funkcji są utemperowane zadany modułem ciągłości. Uzyskany warunek wystarczający staje się punktem wyjścia do konstrukcji miary niezwartości zbioru w rozważanej przestrzeni. Drugi kierunek badań, to zastosowanie miary niezwartości do nieliniowych równań całkowych w przestrzeniach funkcji hölderowskich. Rozprawa, w zdecydowanej większości, zawiera wyniki opublikowane wspólnie z opiekunem naukowym, panem profesorem Józefem Banasiem, w pracach [*On the space of functions with growths tempered by a modulus of continuity and its applications*, J. Funct. Spaces and Appl. 2013, Article ID 20437 (2013), 13 pages] oraz [*On a measure of noncompactness in the space of functions with tempered increments*, J. Math. Anal. Appl. 435 (2016), 1634-1651].

Pojęcie miary niezwartości zbioru zostało wprowadzone przez Kuratowskiego i pojawiło się raczej w kontekście zagadnień związanych z topologią ogólną. W latach późniejszych zostało opublikowanych wiele prac, w których miara niezwartości była ważnym narzędziem dowodowym, jak np. w teorii punktów stałych. W związku z tym, że napotymano na dużą trudność natury technicznej w określaniu postaci miary niezwartości w konkretnych przestrzeniach, część prac skupiona była na nowych, wygodnych w zastosowaniach, definicjach miar niezwartości np. miara Hausdorffa, czy też definicja aksjomatyczna. Część prac poświęcona jest aspektom aplikacyjnym warunków zwartościowych np. w teorii operatorów analizy nieliniowej. Przedłożona mi do recenzji rozprawa wpisuje się w nurt tych poszukiwań. Praca napisana jest w języku polskim, zawiera 69 stron, składa się z ośmiu rozdziałów oraz wstępu i bibliografii. We wstępie Autor bardzo rzetelnie wprowadza czytelnika w tematykę swoich badań, przedstawia rys historyczny i dobrze umiejscawia swoje rezultaty wśród

wyników innych matematyków, co świadczy o dobrej orientacji w danej tematyce badawczej. Rozdziały pierwszy i drugi, które moim zdaniem powinny stanowić jeden, są o charakterze wprowadzającym i zawierają podstawowe oznaczenia, definicje i twierdzenia niezbędne do dalszych rozważań. W rozdziale trzecim Autor definiuje przestrzeń $C_\omega(M)$ rzeczywistych funkcji określonych na ograniczonej przestrzeni metrycznej, których przyrosty (moduły ciągłości) są utemperowane zadany modułem ciągłości ω i dowodzi, że tak określona przestrzeń funkcyjna z odpowiednią normą jest przestrzenią Banacha. Kluczowym w dalszych rozważaniach jest fakt, że wprowadzona norma nie jest równoważna klasycznej normie zbieżności jednostajnej. Szczególnym przypadkiem takiej przestrzeni jest przestrzeń funkcji hölderowskich, a co za tym idzie, przestrzeń funkcji lipschitzowskich. Jest to ogólniejsza od występującej w literaturze definicji przestrzeni H_ϕ , gdzie zakłada się dodatkowo podaddytywność zadanego modułu ciągłości, zwanego klasycznie funkcją Höldera. W rozdziale czwartym Autor otrzymuje odpowiednik twierdzenia Arzeli-Ascolego w zdefiniowanych wcześniej przestrzeniach. Mianowicie dowodzi, że każdy ograniczony podzbiór funkcji jednakowo ciągłych, w sensie wprowadzonej normy, jest relatywnie zwarty. W rozdziale piątym wynik ten staje się punktem wyjścia do konstrukcji subliniowej BG-miary niezwartości z własnością maksimum. O tym, że jest to zadanie trudne świadczy następujący cytat zaczerpnięty z monografii [J. Appell, P.P. Zabrejko, *Nonlinear superposition operators*, Cambridge University Press, Cambridge-Port Chester-Melbourne-Sydney, 1990] "precompact sets are easily described in H_ϕ^0 , while no simple compactness criterion in the space H_ϕ is known (some criteria mentioned in the literature, e.g. [...] are false)". W rozdziale szóstym oraz siódmym Autor wykorzystuje określoną wcześniej miarę do rozwiązywania nieliniowych równań całkowych określonych w przestrzeniach funkcji hölderowskich: kwadratowego równania całkowego typu Hammersteina oraz kwadratowego równania całkowego typu Volterry-Hammersteina. Podstawowym narzędziem dowodowym jest tutaj twierdzenie Darbo o punkcie stałym dla odwzwowrowania kontrakcyjnego względem wcześniej wprowadzonej miary niezwartości.

Moja ogólna ocena pracy doktorskiej jest wysoka. Rezultaty zawarte w rozprawie są oryginalne oraz stanowią ważny wkład w szeroko rozumianą nieliniową analizę. Warunek wystarczający relatywnej zwartości zbiorów i skonstruowana po raz pierwszy miara niezwartości na podzbiorach przestrzeni Höldera są narzędziami, które spotkają się z uzasadnionym zainteresowaniem i uznaniem specjalistów. Niewątpliwym atutem jest opublikowanie uzyskanych wyników w czasopiśmie z listy filadelfijskiej. W związku z tym, że rozprawa w zdecydowanej większości opiera się na wynikach opublikowanych wspólnie z promotorem, z punktu widzenia recenzenta, cenna byłaby informacja na temat, które rezultaty są samodzielnym osiągnięciem Autora.

Struktura całości pracy jest dobrze przemyślana, stanowi dobrze usystematyzowane studium zagadnienia matematycznego wpisującego się w stale rozwijający się nurt badań. Zwięzły sposób wypowiadania twierdzeń oraz prowadzenia rozumowań, nietrywialne techniki dowodowe świadczą o dobrym poziomie profesjonalnym Autora. Rozprawa jest napisana precyzyjnie i zredagowana starannie, chociaż mam pewne zastrzeżenia co do stylu; niektóre zdania stanowią wręcz kalkę zdań pisanych w języku angielskim. Podczas lektury tekstu znalazłam kilka drobnych usterek, które wymieniam poniżej.

Strona 8 linia 7-8 od dołu: zdanie „Odległość $d(X, Y)$ jest poprawnie zdefiniowana dla dowolnego niepustego podzbioru Y przestrzeni E ” nie jest poprawne;

Strona 8 linia 8 i 10 od dołu: „ d_Y ” zamiast „ d_y ”;

Strona 26: ponieważ w dowodach Twierdzeń 6.1 i 6.2 wykorzystywana jest zależność $\|x\|_\infty \leq \|x\|_\alpha$, więc powinno być odwołanie do nierówności (3.15) lub komentarz, że moduł $|x(u_0)|$ w definicji normy $\|x\|_\alpha$ może być zastąpiony przez $\|x\|_\infty$;

Strona 29 linia 2 od dołu: „ $t \in [0, \frac{1}{n}]$ ”, zamiast „ $t \in [0, 1]$ ”;

Strona 35 linia 2 od dołu: we wzorze na normę powinno być „ $x, y \in M$ ”, zamiast „ $x, y \in X$ ”;

Strona 36 linia 5 od dołu: „takich $u, v \in M$, że $d(u, v) < \delta$ ” lub „ $(u, v) \in M_\sigma^2$ ”, zamiast „ $u, v \in M$ ”;

Strona 37 linia 3 od dołu oraz 47 linia 3 od dołu: „ $(u, v) \in M^2$ ”, zamiast „ $(u, v) \in M$ ”;

Strona 39 linia 10 od góry: „ $u, v \in M$ ”, zamiast „ $u, v \in X$ ”;

Strona 40 linia 8 od dołu : powinno być „w przestrzeni $C_{\omega_1}[a, b]$ lub $C_{\omega_1}(M)$, odpowiednio”;

W dowodzie Twierdzenia 2.3 jest odwołanie do warunków (i)-(v) Definicji 2.3.1 podczas gdy warunki są numerowane jako 1-5;

Strona 49 linia 8 od dołu : „w równaniu (6.45)” zamiast „w równaniu (5.34)”;

Strona 52 linia 3 od dołu : na końcu wzoru powinno być „ $|t - s|^{-\alpha}$ ” zamiast „ $|t - s|^{\alpha}$ ”;

Strona 55 linia 3 od góry: „Twierdzenia 6.1” zamiast „Twierdzenia 6.45”.

Podsumowując uważam, że rozprawa doktorska pana mgra Rafała Nalepy w pełni odpowiada warunkom określonym w art. 13 ust.1 ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki. Z pełnym przekonaniem wnioskuję o dopuszczenie pana mgra Rafała Nalepy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Metgora Wrobel