Rafał Nalepa Rzeszów, 24.01.2017

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Warunki zwartościowe w przestrzeni funkcji o utemperowanych przyrostach i ich zastosowanie w teorii równań całkowych

Autor: mgr Rafał Nalepa

Promotor: prof. dr hab. Józef Banaś

Rozprawa doktorska poświęcona jest tzw. warunkom zwartościowym dla przestrzeni funkcji o przyrostach utemperowanych zadanym modułem ciągłości $C_\omega(M)$. Przestrzeń ta składa się z funkcji rzeczywistych, określonych na ograniczonej przestrzeni metrycznej i mających przyrosty utemperowane zadanym modułem ciągłości. Okazuje się, że przestrzeń $C_\omega(M)$ jest przestrzenią Banacha z normą zdefiniowaną w naturalny sposób, nawiązujący bezpośrednio do definicji przestrzeni [4].

Szczególnymi przypadkami takiej przestrzeni są przestrzeń funkcji rzeczywistych, które są określone na zadanym przedziale domkniętym i ograniczonym i spełniają na tym przedziale warunek Lipschitza oraz przestrzeń funkcji spełniających na takim przedziale warunek Höldera.

Już te wymienione wyżej egzemplarze przestrzeni funkcji o przyrostach utemperowanych modułem ciągłości wskazują na niewątpliwą użyteczność takiej przestrzeni w zastosowaniach.

Pomimo tego, że przestrzenie te są znane, są dość rzadko używane w rozważaniach analizy nieliniowej. W szczególności trudno jest spotkać twierdzenia o istnieniu rozwiązań pewnych równań (różniczkowych, całkowych) w takich przestrzeniach. Spowodowane jest to głównie tym, że we wspomnianych przestrzeniach brak jest kryteriów relatywnej zwartości a nawet nietrywialnych warunków wystarczających dla relatywnej zwartości.

Przedkładana praca ma na celu uzupełnienie tej luki oraz stworzenie metod i narzędzi, które umożliwią bardziej swobodne posługiwanie się opisaną wyżej przestrzenią funkcji o przyrostach utemperowanych zadanym modułem ciągłości, a w szczególności przestrzenią funkcji hölderowskich.

Głównym celem tej pracy jest przedstawienie wygodnych warunków zwartościowych, przy pomocy których będziemy mogli rozstrzygnąć o relatywnej zwartości dość obszernej klasy podzbiorów rozważanej przestrzeni. Ponadto, bazując na sformułowanych w pracy warunkach wystarczających dla relatywnej zwartości zbioru przedstawimy konstrukcję pewnej funkcji zbiorowej, która umożliwia dość zręczne posługiwanie się wspomnianymi warunkami wystarczającymi dla relatywnej zwartości zbioru. Funkcję tę nazywa się miarą niezwartości.

Warto zaznaczyć, że problematyka związana z miarami niezwartości jest w ostatnich czterdziestu latach niezwykle intensywnie badana przez matematyków z wielu ośrodków na całym świecie [2, 3]. Odkryto przy tym wiele możliwych zastosowań teorii miar niezwartości do różnych zagadnień rozważanych w analizie nieliniowej, w geometrii przestrzeni unormowanych, teorii operatorów i w teorii równań różniczkowych i całkowych [1, 2, 3].

Drugim głównym celem rozprawy jest wszechstronne zbadanie skonstruowanej przez nas miary niezwartości i przedstawienie jej własności wraz z dowodami.
Ponadto pokażemy użyteczność skonstruowanej przez nas miary niezwartości w dowodach twierdzeń egzystencjalnych dla nieliniowych równań całkowych w rozważanych przestrzeniach funkcji hölderowskich. Równania całkowe, którymi będziemy zajmować się w tej pracy, to kwadratowe równanie całkowe typu Hammersteina oraz kwadratowe równanie całkowe typu Volterry-Hammersteina. Powstają one przez wymnożenie operatora całkowego przez tzw. operator superpozycji. Jednakże operator superpozycji rozważany w tej pracy będzie operatorem liniowym, a nawet, ściślej rzecz ujmując, operatorem afinicznym. Takie zawężenie rozważań dotyczących operatora superpozycji występującego jako mnożnik operatorów całkowych wynika głównie z pewnego rezultatu J. Matkowskiego [6, 7].

Większość wyników przedstawiona w przedkładanej rozprawie została opublikowana w pracach [4, 5].

Literatura

[1] J. Banaś, *Measure of noncompactness in the space of continuous tempered functions*, Demonstratio Math, 14 (1981), 127-133.

[2] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 60, Dekker, New York 1980.

[3] J. Banaś, M. Mursaleem, *Sequence Spaces and Measures of Noncompactenss with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, New Delhi 2014.

[4] J. Banaś, R. Nalepa, *On the space of functions with growths tempered by a modulus of continuity and its applications*, J. Funct. Spaces and Appl. 2013, Article ID 820437 (2013), 13 pages.

[5] J. Banaś, R. Nalepa, *On a measure of noncompatness in the space of functions with tempered increments*, J. Math. Anal. Appl. 435 (2016), 1634-1651.

[6] J. Matkowski, *Functional equations and Nemytskii operators*, Funkc. Ekvac. 25 (1982), 127-132.

[7] J. Matkowski, *Uniformly continuous superposition operators in the space of Hölder functions*, J. Math. Anal. Appl. Volume 359 (2009) 56–61.

Rafał Nalepa