

Autoreferat

Piotr Pawlas

Spis treści

1	Informacje o autorze.	2
2	Osiągnięcie naukowe.	3
2.1	Tytuł rozprawy habilitacyjnej: Modele uporządkowań zmiennych losowych w charakteryzacjach rozkładów prawdopodobieństwa, estymacji i miarach zależności.	3
2.2	Rozważania wstępne.	4
2.3	Modele uporządkowań zmiennych losowych.	4
2.4	K-te wartości rekordowe i uogólnione statystyki porządkowe w charakteryzacjach rozkładów prawdopodobieństwa.	11
2.5	Estymatory parametrów rozkładu Gumbela i Burra w terminach k-tych wartości rekordowych i uogólnionych statystyk porządkowych.	16
2.6	Miary zależności zmiennych losowych i ich zastosowania.	20
3	Pozostały dorobek naukowo-badawczy.	29
4	Działalność naukowa.	33
4.1	Spis publikacji naukowych.	33
4.2	Recenzje publikacji czasopiśmienniczych.	35
4.3	Udział w konferencjach naukowych.	35
4.4	Udział w stażach naukowych.	36
5	Działalność dydaktyczna.	37
5.1	Zajęcia dydaktyczne.	37
5.2	Funkcje promotorskie i organizacyjne.	37
6	Bibliografia Autoreferatu.	38
7	Bibliografia prac cytujących wyniki rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego.	43

1 Informacje o autorze.

1. Imię i nazwisko: Piotr Pawlas

2. Posiadane dyplomy:

- Dyplom magistra matematyki uzyskany w 1996 roku na Wydziale Matematyki i Fizyki UMCS w Lublinie. Tytuł pracy magisterskiej: *Wielowymiarowe rozkłady wykładnicze i subwykładnicze*.
- Dyplom doktora nauk matematycznych uzyskany w 2002 roku na Wydziale Matematyki i Fizyki UMCS w Lublinie. Tytuł rozprawy doktorskiej: *Właściwości rozkładów i momentów k -tych dolnych i górnych wartości rekordowych rozkładów ciągłych*.
- Dyplom Master Sciences et Technologies uzyskany w 2007 roku na Uniwersytecie w Poitiers (Francja).

3. Zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- Instytut Matematyki,
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie,
asystent od 1 października 1996 do 30 września 2001.
- Instytut Matematyki,
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie,
adiunkt od 1 października 2002 do 30 września 2014,
asystent od 1 października 2014.

4. Staże naukowe:

- Instytut Matematyczny,
Polska Akademia Nauk, Warszawa,
staż od 1 października 2001 do 30 września 2002.
- L'Institut des Risques Industriels Assurantiels et Financiers w Niort,
Université de Poitiers, Francja,
staż od 1 października 2005 do 30 kwietnia 2006.
- L'Institut des Risques Industriels Assurantiels et Financiers w Niort,
Université de Poitiers, Francja,
staż od 1 października 2006 do 30 kwietnia 2007.

2 Osiągnięcie naukowe.

Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.)

2.1 Tytuł rozprawy habilitacyjnej: Modele uporządkowań zmiennych losowych w charakteryzacjach rozkładów prawdopodobieństwa, estymacji i miarach zależności.

Cykl publikacji habilitacyjnych powiązanych tematycznie:

A

[A1]. Pawlas, P., Szynal, D. (2003). On characterizations of distributions in terms of lower generalized order statistics. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 2(3, 4), 215-222.

[A2]. Pawlas, P., Rychlik, T., Szynal, D. (2003). On a characterization of distributions by expectations of transformed generalized order statistics. *Demonstratio Math.* 36(1), 239-245.

B

[B1]. Pawlas, P., Malinowska, I., Szynal, D. (2005). Estimation of the parameters of Gumbel and Burr distributions in terms of k-th record values. *Applicationes Mathematicae*, 32(4), 375-393.

[B2]. Pawlas, P., Malinowska, I., Szynal, D. (2006). Estimation of location and scale parameters for the Burr XII distribution using generalized order statistics. *Linear Algebra and its Applications*, 417, 150-162.

C

[C1]. Pawlas, P., Szynal, D. (2012). On a new measure of dependence and its applications. *Demonstratio Math.* XLV(2), 243-256.

[C2]. Pawlas, P., Szynal, D. (2015). On a characterization of a power distribution. *Demonstratio Math.* XLVIII(1), 100-106.

[C3]. Pawlas, P. (2016). Characterization of distributions based on k-th lower record values. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 52(2), 139-148.

[C4]. Pawlas, P., Szynal, D. (2016). Characterization of distributions via k-th upper record values. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 52(3), 149-157 .

Uwaga. W bibliografii autoreferatu stosuję oznaczenie $[\cdot]$, a w bibliografii prac cytujących wyniki rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego oznaczenie $\{\cdot\}$.

2.2 Rozważania wstępne.

Zagadnienia dotyczące uporządkowań zmiennych losowych stanowią obszerny dział teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Następujące słowa kluczowe określają typy znanych z literatury uporządkowań: statystyki porządkowe, sekwencyjne statystyki porządkowe, górne i dolne wartości rekordowe, k -te górne i k -te dolne wartości rekordowe, rekordy Pfeifera oraz górne i dolne uogólnione statystyki porządkowe.

Rozprawa habilitacyjna zawiera probabilistyczne i statystyczne zastosowania modeli uporządkowań zmiennych losowych; w szczególności statystyk porządkowych, k -tych górnych i dolnych wartości rekordowych oraz górnych i dolnych uogólnionych statystyk porządkowych. Pierwsza część rozprawy ([A1]-[A2]) wykorzystuje wspomniane pojęcia do charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa. W drugiej części rozprawy ([B1]-[B2]) podaje się estymatory parametrów rozkładów Gumbela i Burra w terminach k -tych wartości rekordowych i uogólnionych statystyk porządkowych. Trzecia część rozprawy ([C1]-[C4]) poświęcona jest nowemu typowi zależności zmiennych losowych i jego zastosowaniom, w szczególności w charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa.

2.3 Modele uporządkowań zmiennych losowych.

Tradycyjny obiekt statystyczny stanowi zbiór niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$ o jednakowym rozkładzie danym przez dystrybuantę F . Istnieje jednak wiele sytuacji, w których specyfika badanego problemu wymaga zastosowania zależnych obserwacji $X_1, X_2, \dots, X_n$. Taki przypadek występuje w modelach uporządkowanych zmiennych losowych. Najprostsze sposoby uporządkowania zmiennych losowych prowadzą do statystyk porządkowych i wartości rekordowych.

Przykład 2.1. *Rozważmy ciąg $X_1, \dots, X_n$ średnich dziennych temperatur. Wtedy k -ta pod względem wielkości temperatura reprezentuje statystykę porządkową $X_{k:n}$.*

Przykład 2.2. *Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$, gdzie X_i reprezentuje średnią cenę akcji pewnej spółki na giełdzie w danym okresie czasu.*

W momencie t występuje wartość rekordowa Y_t , jeżeli cena X_t przekracza wszystkie poprzednie ceny.

Konsekwencją uporządkowania obserwacji jest utworzenie nowego zbioru zmiennych losowych, najczęściej statystyk porządkowych lub wartości rekordowych. Definicje tych zmiennych losowych podamy w dalszej części pracy. Tutaj zauważmy jedynie, że badanie uporządkowanych obserwacji wynika z potrzeby konstrukcji modeli teoretycznych dla wielu zagadnień praktycznych. Na przykład w zadaniach wyznaczania składek ubezpieczeniowych dla zdarzeń katastroficznych, tworzenia systemów zabezpieczeń przeciwpowodziowych i antylawinowych, porównywania ryzyk, itp.

Zagadnienia związane z teorią uporządkowanych modeli zmiennych losowych znajdują zastosowanie w takich dziedzinach nauki, jak teoria wytrzymałości materiałów [88], teoria globalnego ocieplenia [93], modelowanie stochastyczne w finansach [94], czy biologii ewolucyjnej [55].

W pracy rozważamy zagadnienia probabilistyczne i statystyczne bazujące na statystykach porządkowych, k -tych górnych i dolnych wartościach rekordowych oraz górnych i dolnych uogólnionych statystykach porządkowych.

2.3a. Statystyki porządkowe.

Niech $(X_1, \dots, X_n)$ będzie wektorem losowym złożonym z niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie danym przez dystrybuantę F i funkcję gęstości f . Ustawmy każdy możliwy zespół wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$ wektora $(X_1, \dots, X_n)$ według wielkości w porządku niemalejącym. Jeżeli dwie współrzędne x_i i x_j są równe, to ich wzajemna kolejność może być dowolna.

Statystyką porządkową $X_{k:n}$, dla $k = 1, 2, \dots, n$, nazywamy zmienną losową będącą funkcją wektora losowego $(X_1, \dots, X_n)$, która przybiera k -tą co do wielkości wartość każdego z możliwych zespołów wartości $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dla danego n możemy utworzyć n takich statystyk porządkowych, a mianowicie

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}.$$

Zmienne $X_{1:n}$ oraz $X_{n:n}$ nazywamy odpowiednio minimalną i maksymalną statystyką porządkową.

Łączna gęstość wektora losowego $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$ wyraża się wzorem:

$$f_{X_{1:n}, \dots, X_{n:n}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_n), & \text{dla } x_1 < \dots < x_n, \\ 0, & \text{poza,} \end{cases}$$

a rozkład prawdopodobieństwa statystyki porządkowej $X_{k:n}$ ma postać

$$f_{X_{k:n}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F^{k-1}(x) (1-F(x))^{n-k} f(x).$$

Łączny rozkład statystyk porządkowych $X_{i:n}$ oraz $X_{k:n}$ dany jest wzorem

$$f_{X_{i:n}, X_{k:n}}(x, y) = \frac{n!}{(i-1)!(k-i-1)!(n-k)!} F^{i-1}(x) f(x) (F(y) - F(x))^{k-i-1} \cdot (1-F(y))^{n-k} f(y), \quad i < k; \quad x < y.$$

Statystyki porządkowe były przedmiotem badań matematyków już na początku dwudziestego wieku. Pojęcie statystyki porządkowej zostało użyte po raz pierwszy przez Galtona w 1902 w [38] (Moldovanu, Sela [65]). Warto również wspomnieć pracę [81] z 1902 roku, w której Pearson odnosi się do problemu odpowiedniego podziału stawki badanego przez Galtona. Pierwszy obszerny wykład teorii statystyk porządkowych znajduje się w książce Davida [28] z 1970 roku. Drugie wydanie ukazało się w 1981 roku ([29]), a trzecie w 2003 roku ([30]). Wśród pozycji monograficznych, poświęconych statystykom porządkowym, cytowane są książki: Galambos [37], Arnold, Balakrishnan i Nagaraja [11], David i Nagaraja [30]. W 2013 roku ukazała się monografia Ahsanullaha, Nevzorova i Shakila [9], [3].

Wśród charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa w terminach statystyk porządkowych, oddzielną klasę stanowią wyniki dotyczące oszacowania współczynnika korelacji lub kowariancji statystyk porządkowych.

Bartoszyński i Terrell rozważali w 1980 r. problem wielkości współczynnika korelacji dla statystyk porządkowych, pojawiający się w zagadnieniach podziału komórki. Terrell ([92]) wykazał w 1983 roku, że rozwiązanie tego problemu prowadzi do charakteryzacji rozkładu prostokątnego. Mianowicie, dla próby (X_1, X_2) , statystyki porządkowe $X_{1:2}, X_{2:2}$ są dodatnio skorelowane o współczynniku korelacji $\leq 1/2$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy próba pochodzi z populacji o rozkładzie prostokątnym.

Wynik Terrella został uogólniony w 1985 roku przez Székeli and Móri ([90]) na przypadek dwóch dowolnych statystyk porządkowych pochodzących z próby o liczebności n . Arnold i Brockett [13] w 1988 roku podali oszacowanie dla $Cov(X_{1:2}, X_{2:2})$ charakteryzujące rozkład jednostajny, które uprościł Papathanasiou [70] w 1990 roku.

Wyniki pracy habilitacyjnej dotyczące statystyk porządkowych stanowią kontynuację wspomnianych rozważań o oszacowaniu współczynnika korelacji lub kowariancji zmiennych losowych, które wykorzystano w charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa. Szczegółowe rozwiązania podano w rozdziale 2.6, gdzie wprowadzono nową miarę zależności zmiennych losowych; PD-kowariancję, którą wykorzystano również w badaniu miary zależności nieskorelowanych zmiennych losowych.

2.3b. K-te wartości rekordowe.

Początek rozwoju matematycznej teorii wartości rekordowych związany jest z pracami Chandlera [26] oraz Fostera i Stuarta [35]. Chandler w 1952 roku zdefiniował dolne czasy rekordowe i związane z nimi dolne wartości rekordowe. Ponadto wyprowadził wzory na rozkłady prawdopodobieństwa tych zmiennych zmiennych losowych. W 1954 roku Foster i Stuart po raz pierwszy wykorzystali wartości rekordowe do konstrukcji testów statystycznych dotyczących losowości ciągu obserwacji. Feller ([34]) w 1966 roku podał kilka przykładów wartości rekordowych w kontekście problemów hazardowych. Resnick ([85]) w 1973 roku badał asymptotyczne własności wartości rekordowych.

Pojęcie wartości rekordowych Chandlera stanowiło inspirację do wprowadzenia nowych pojęć i rozwiązań problemów probabilistycznych i statystycznych (Galampos [37]).

Dziubdziela i Kopociński wprowadzili pojęcie k-tych górnych wartości rekordowych w pracy [32] z 1976 roku. Definicję k-tych dolnych czasów rekordowych i k-tych dolnych wartości rekordowych podano w pracy [71] (Pawlas, Szynal).

Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie danym przez dystrybuantę F oraz funkcję gęstości f . Przez $X_{j:n}$ oznaczamy j -tą statystykę porządkową z próby $(X_1, \dots, X_n)$. Dla dowolnego naturalnego $k \geq 1$ definiujemy ciąg $(U_k(n))$ k-tych górnych czasów rekordowych:

$$U_k(1) = 1, \quad U_k(n+1) = \min \{j > U_k(n) : X_{j:j+k-1} > X_{U_k(n):U_k(n)+k-1}\}, \quad n \geq 1.$$

Ciąg $(Y_n^{(k)})$, gdzie $Y_n^{(k)} = X_{U_k(n):U_k(n)+k-1}$, $(Y_1^{(k)} = X_{1:k} = \min(X_1, \dots, X_k))$, nazywamy ciągiem k-tych górnych wartości rekordowych ciągu (X_n) .

Gęstość wektora losowego $(Y_1^{(k)}, \dots, Y_n^{(k)})$ wyraża się wzorem:

$$f_{Y_1^{(k)}, \dots, Y_n^{(k)}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{1 - F(x_i)} (1 - F(x_n))^{k-1} f(x_n), & \text{dla } x_1 < \dots < x_n, \\ 0, & \text{poza.} \end{cases}$$

Gęstości zmiennej losowej $Y_n^{(k)}$ oraz wektora losowego $(Y_m^{(k)}, Y_n^{(k)})$ dla $m < n$ mają postać:

$$f_{Y_n^{(k)}}(x) = \frac{k^n}{(n-1)!} (-\ln(1 - F(x)))^{n-1} (1 - F(x))^{k-1} f(x), \quad n \geq 1,$$

$$f_{Y_m^{(k)}, Y_n^{(k)}}(x, y) = \frac{k^n}{(n-1)!(n-m-1)!} (\ln(1 - F(x)) - \ln(1 - F(y)))^{n-m-1} \cdot (-\ln(1 - F(x)))^{m-1} \frac{f(x)}{1 - F(x)} (1 - F(y))^{k-1} f(y), \quad n \geq 2, x < y.$$

Wiadomo, że istnieją pewne klasy rozkładów, które wygodniej jest badać za pomocą k-tych dolnych wartości rekordowych (Pawlas, Szynal [71]).

Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie danym przez dystrybuantę F oraz funkcję gęstości f . Przez $X_{j:n}$ oznaczamy j -tą statystykę porządkową z próby $(X_1, \dots, X_n)$. Dla dowolnego naturalnego $k \geq 1$ definiujemy ciąg $(L_k(n))$ dolnych k-tych czasów rekordowych

$$L_k(1) = 1, \quad L_k(n+1) = \min \{j > L_k(n) : X_{k:L_k(n+1)+k-1} > X_{k:j+k-1}\}, \quad n \geq 1.$$

Wtedy ciąg $(Z_n^{(k)})$, gdzie $Z_n^{(k)} = X_{k:L_k(n)+k-1}$, ($Z_1^{(k)} = X_{k:k} = \max(X_1, \dots, X_k)$), nazywamy ciągiem k -tych dolnych wartości rekordowych ciągu (X_n) .

Gęstość wektora losowego $(Z_1^{(k)}, \dots, Z_n^{(k)})$ wyraża się następującym wzorem:

$$f_{Z_1^{(k)}, \dots, Z_n^{(k)}}(z_1, \dots, z_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(z_i)}{F(z_i)} (F(z_n))^{k-1} f(z_n), & \text{dla } z_1 > \dots > z_n, \\ 0, & \text{poza.} \end{cases}$$

Gęstości zmiennej losowej $Z_n^{(k)}$ oraz wektora losowego $(Z_m^{(k)}, Z_n^{(k)})$ dla $m < n$ mają postać:

$$f_{Z_n^{(k)}}(x) = \frac{k^n}{(n-1)!} (-\ln(F(x)))^{n-1} (F(x))^{k-1} f(x), \quad n \geq 1,$$

$$f_{Z_m^{(k)}, Z_n^{(k)}}(x, y) = \frac{k^n}{(n-1)!(n-m-1)!} (\ln(F(x)) - \ln(F(y)))^{n-m-1} \cdot (-\ln(F(x)))^{m-1} \frac{f(x)}{F(x)} (F(y))^{k-1} f(y), \quad n \geq 2, x > y.$$

Pojęcie k -tych dolnych wartości rekordowych zostało wykorzystane w charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa (rozkład Gumbela) oraz w konstrukcji estymatorów parametrów skali i przesunięcia (rozkład Burra, rozkład Gumbela).

Wyniki dotyczące charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa, wykorzystujące k -te dolne wartości rekordowe podano w rozdziale 2.4, natomiast wyniki dotyczące estymacji parametrów w rozdziale 2.5.

Zauważmy, że pojęcie k -tych dolnych wartości rekordowych z [71] było badane, między innymi, w pracach [21], {26} (wyznaczanie rozkładów granicznych ciągów różnic i ilorazów k -tych dolnych wartości rekordowych), [22], {28}, [40], [62], {59} (charakteryzacja rozkładów prawdopodobieństwa), a także w [56], {46} i [58], {51} (momenty i wzory rekurencyjne na momenty k -tych dolnych wartości rekordowych).

2.3c. Uogólnione statystyki porządkowe.

Kamps ([44]) w 1995 roku wprowadził pojęcie uogólnionych „jednostajnych” statystyk porządkowych $U(r, n, \tilde{m}, k)$.

Niech $n, k \in \mathbf{N}$, $m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbf{R}$, $M_r = \sum_{j=r}^{n-1} m_j$, $r = 1, \dots, n-1$, będą parametrami, dla których $\gamma_r = k + (n-r) + M_r \geq 1$ i niech $\tilde{m} = (m_1, \dots, m_{n-1})$, $n \geq 2$.

Jeżeli łączna funkcja gęstości wektora $(U(1, n, \tilde{m}, k), \dots, U(n, n, \tilde{m}, k))$ wyraża się wzorem

$$f^{U(1, n, \tilde{m}, k), \dots, U(n, n, \tilde{m}, k)}(u_1, \dots, u_n) = k \left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - u_i)^m (1 - u_n)^{k-1}, \quad (1)$$

dla $0 < u_1 \leq \dots \leq u_n < 1$, to zmienne $U(r, n, \tilde{m}, k)$, $r = 1, \dots, n$, nazywamy uogólnionymi statystykami porządkowymi z rozkładu jednostajnego.

Uogólnione statystyki porządkowe określamy na podstawie uogólnionych „jednostajnych” statystyk porządkowych.

Dla rozkładu danego przez dystrybuantę typu absolutnie ciągłego F definiujemy zmienne $X(r, n, \tilde{m}, k) = F^{-1}(U(r, n, \tilde{m}, k))$, $r = 1, \dots, n$. Elementy ciągu $(X(r, n, \tilde{m}, k))$ nazywamy uogólnionymi statystykami porządkowymi. Na mocy wzoru (1) mamy:

$$f^{X(1, n, \tilde{m}, k), \dots, X(n, n, \tilde{m}, k)}(x_1, \dots, x_n) = k \left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} (1 - F(x_i))^{m_i} f(x_i) \right) \cdot (1 - F(x_n))^{k-1} f(x_n), \text{ dla } F^{-1}(0) < x_1 \leq \dots \leq x_n < F^{-1}(1).$$

Powyższy model zawiera, jako szczególne przypadki, różne klasy uporządkowanych zmiennych losowych. Wybór parametrów k i n prowadzi do statystyk porządkowych, k -tych górnych wartości rekordowych, statystyk Stiglera, Lewlessa oraz rekordów Pfeiffera. W analizie rozkładów odwrotnych owocne okazało się pojęcie dolnych uogólnionych statystyk porządkowych, które wprowadzono w pracy [72] (Pawlas, Szynal).

Niech $n, k \in \mathbf{N}$, $m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbf{R}$, $M_r = \sum_{j=r}^{n-1} m_j$, $r = 1, \dots, n-1$, będą parametrami, dla których $\gamma_r = k + (n-r) + M_r \geq 1$ i niech $\tilde{m} = (m_1, \dots, m_{n-1})$, $n \geq 2$.

Definicja 2.1. (Pawlas, Szynal [72]). *Zmienne losowe $Z(1, n, \tilde{m}, k), \dots, Z(n, n, \tilde{m}, k)$ nazywamy dolnymi uogólnionymi statystykami porządkowymi, jeżeli ich łączna funkcja gęstości wyraża się wzorem*

$$f^{Z(1, n, \tilde{m}, k), \dots, Z(n, n, \tilde{m}, k)}(x_1, \dots, x_n) = k \left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} (F(x_i))^{m_i} f(x_i) \right) (F(x_n))^{k-1} f(x_n), \quad (2)$$

dla $F^{-1}(1) > x_1 \geq \dots \geq x_n > F^{-1}(0)$.

Zauważmy, że dla $m_1 = \dots = m_{n-1} = -1$, $\gamma_r = k$, łączna funkcja gęstości k -tych dolnych wartości rekordowych ma postać

$$f^{Z(1, n, -1, k), \dots, Z(n, n, -1, k)}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f(x_i)}{F(x_i)} (F(x_n))^{k-1} f(x_n), & x_1 \geq \dots \geq x_n, \\ 0, & \text{poza.} \end{cases}$$

Rozprawa habilitacyjna zawiera wyniki dotyczące górnych i dolnych statystyk porządkowych w kontekście charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa (od-

wrotny rozkład Pareto, odwrotny rozkład Weibulla) oraz w konstrukcji estymatorów parametrów skali i przesunięcia (rozkład Burra).

Wyniki dotyczące charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa w terminach dolnych i górnych uogólnionych statystyk porządkowych zawiera rozdział 2.4, natomiast wyniki dotyczące estymacji parametrów skali i przesunięcia wykorzystujące górne uogólnione statystyki porządkowe podano w rozdziale 2.5.

Należy zauważyć, że w 2003 roku Kamps ([45]) wprowadził pojęcie dualnych uogólnionych statystyk porządkowych, które jest analogonem wprowadzonego w 2001 roku (Pawlas, Szynal [72]) pojęcia dolnych uogólnionych statystyk porządkowych. Jednakże w literaturze czasopiśmienniczej i monograficznej zostało zaakceptowane wyżej określone pojęcie dolnych uogólnionych statystyk porządkowych. Na przykład w pracach [8], {22}, [14], {25}, [46], {39}, [47], {40}, [48], {41}, [49], {56}, [50], {44}, [57], {48}, [59], {55}, i książce [86], {5}.

2.4 K-te wartości rekordowe i uogólnione statystyki porządkowe w charakteryzacjach rozkładów prawdopodobieństwa.

[A1]. Celem pracy [A1] są charakteryzacje rozkładu Gumbela i odwrotnych rozkładów typu Weibulla oraz Pareto, wykorzystujące odpowiednio k -te dolne wartości rekordowe i uogólnione statystyki porządkowe. Te twierdzenia można traktować jako odpowiedniki twierdzeń charakteryzujących rozkład wykładniczy ([2], [3], [4], [36], [83]).

W problemie charakteryzacyjnym wykorzystuje się pojęcie ciągu zupełnego funkcji (Lin [60], [23]).

Definicja 2.2. Niech $L(a, b)$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych na (a, b) . Ciąg $(f_n) \subset L(a, b)$, $n \geq 1$, nazywamy zupełnym na $L(a, b)$, jeżeli dla dowolnej funkcji $g \in L(a, b)$ równość

$$\int_a^b g(x)f_n(x)dx = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

implikuje, że $g(x) = 0$ p.w. (prawie wszędzie) na (a, b) .

Następujący lemat podaje przykład ciągu zupełnego funkcji, który wykorzystano w [A1].

Lemat 2.1. [60]. *Dla dowolnej, ustalonej liczby naturalnej n_0 i nieujemnej, ciągłej funkcji $h(x)$, mającej nieujemne pochodne na (a, b) , ciąg*

$$\{(h(x))^n e^{-h(x)} : n \geq n_0\}$$

funkcji jest ciągiem zupełnym w $L(a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $h(x)$ jest ściśle monotoniczna na (a, b) .

W [A1] dowiedziono twierdzenia charakteryzujące rozkład Gumbela.

Rozważmy rozkład Gumbela postaci

$$F(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in R. \quad (3)$$

Twierdzenie 2.1. [A1]. *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o absolutnie ciągłej i ściśle rosnącej dystrybuancie F . Zmienna losowa X ma rozkład (3) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $m \geq 1$ zmienna losowa $D_m = m \left(Z_m^{(k)} - Z_{m+1}^{(k)} \right)$ ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$.*

Twierdzenie 2.2. [A1]. *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o absolutnie ciągłej dystrybuancie F . Niech ponadto $-\ln F(0) = 1$. Następujące warunki są równoważne:*

i) X_n ma rozkład Gumbela.

ii) $Z_{m+1}^{(k)}, Z_m^{(k)} - Z_{m+1}^{(k)}$ są niezależne.

Druga część pracy [A1] podaje charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa w terminach dolnych uogólnionych statystyk porządkowych. W literaturze rozwiązywania podobnego typu, wykorzystujące oszacowania momentów uporządkowanych zmiennych losowych, znajdują się w pracach Plackett [82] i Moriguti [66], w których wykorzystano dolne i górne ograniczenia dla wartości oczekiwanej i wariancji maksymalnej statystyki porządkowej z populacji o rozkładach symetrycznych. W 1954 roku Hartley i David ([41]) podali oszacowanie wartości oczekiwanej maksymalnej statystyki porządkowej:

$$EX_{n:n} \leq \frac{n-1}{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

W 1978 roku Nagaraja ([68]), przy tych samych założeniach, otrzymał następujące ograniczenie dla wartości oczekiwanej wartości rekordowej $X_{U(n)}$:

$$EX_{U(n)} \leq \left(\binom{2n}{n} - 1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie równość charakteryzuje rozkład Weibulla.

Rozważmy odwrotny rozkład Weibulla o dystrybuancie

$$F(x) = e^{-(\theta/x)^\alpha}, \quad x > 0; \quad \alpha > 0, \quad \theta > 0, \quad (4)$$

oraz odwrotny rozkład Pareto o dystrybuancie

$$F(x) = \left(\frac{x}{\delta} \right)^\theta, \quad x \in (0, \delta); \quad \delta > 0, \quad \theta > 0. \quad (5)$$

Na mocy wzoru (2) otrzymujemy:

$$f^{Z(r,n,m,k)}(x) = \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} (F(x))^{\gamma_{r-1}} (g_m(F(x)))^{r-1} f(x),$$

gdzie

$$c_{r-1} = \prod_{j=1}^r \gamma_j, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

$$g_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{m+1} (1 - x^{m+1}), & m \neq -1 \\ -\log x, & m = -1. \end{cases}$$

Twierdzenie 2.3. [A1]. *Niech F oznacza dystrybuantę ciągłą taką, że $F^{-1}(t) \neq 0$ dla $t \in (0, 1)$. Jeżeli*

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \quad p_1, p_2 \in R \setminus \{0, 1\}, \quad 1/p_1 + 1/p_2 = 1,$$

$$r, r_1, r_2, \quad n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \quad k, k_1, k_2 \geq 1,$$

$$r \leq n, \quad r_1 \leq n_1, \quad r_2 \leq n_2, \quad m \in \mathbb{R},$$

to dla $p_1 > 1$

$$\frac{(r-1)!}{c_{r-1}} E|Z(r, n, m, k)|^\alpha \leq \left(\frac{(r_1-1)!}{c_{r_1-1}} E|Z(r_1, n_1, m, k_1)|^{\alpha_1 p_1} \right)^{1/p_1}$$

$$\cdot \left(\frac{(r_2 - 1)!}{c_{r_2-1}} E|Z(r_2, n_2, m, k_2)|^{\alpha_2 p_2} \right)^{1/p_2},$$

gdzie równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $c > 0$

$$|F^{-1}(t)|^{\alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2} = c \cdot t^{\gamma_2 - \gamma_1} (g_m^d(t))^{r_2 - r_1} \quad (6)$$

p.w. na $(0, 1)$, $\gamma_i = k + (n - i)(m + 1)$ dla $i = 1, 2$. Dla $p_1 < 1$ mamy nierówność przeciwną.

Można wykazać, że odwrotne rozkłady typu Pareto i Weibulla mogą być zapisane w postaci (6). Ponadto otrzymujemy następujące charakteryzacje tych rozkładów:

Wniosek 2.1. *Jeżeli $r_2 = r_1$, to równość (6) wyznacza odwrotny rozkład Pareto (5).*

Wniosek 2.2. *Jeżeli $m = -1$ i $\gamma_1 = \gamma_2$, to równość (6) wyznacza odwrotny rozkład Weibulla (4).*

[A2]. Twierdzenia charakteryzujące rozkłady prawdopodobieństwa znajdują również zastosowanie w konstrukcji testów zgodności ([89]). W pracy [A2] uogólnia się następujące twierdzenie charakteryzacyjne z [89].

Twierdzenie 2.4. (Swanepoel, Graan [89]). *Niech $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ oznaczają statystyki porządkowe z próby o dystrybucji F , a G będzie pewną ciągłą dystrybucją. $F = G$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \geq 1$ i dla każdego k takiego, że $1 \leq k \leq n$,*

$$E(G(X_{k:n})) = \frac{k}{n+1}. \quad (7)$$

Na podstawie powyższego twierdzenia autorzy pracy [89] konstruują ważony test Craméra-von Misesa i ważony test Kołmogorova-Smirnova. W pracy [A2] podano uogólnienie twierdzenia 2.4. W sformułowaniu i dowodzie tego uogólnienia wykorzystuje się następujący lemat.

Lemat 2.2. (por. [A2]). *Niech*

$$I_1 = \{(r_n, n) : \text{dla ustalonego } \mu \in N, n \geq \mu, 1 \leq r_\mu \leq \mu, \text{ oraz } r_\mu \leq r_n \leq r_\mu + n - \mu\},$$

$$I_2 = \{(r_n, n) : n \geq 2, 1 \leq r_n \leq n\},$$

$$I_3 = \{(r_{ij}, n_j) : n_j \rightarrow \infty, \text{ gdy } j \rightarrow \infty, \text{ oraz } r_{ij} = i, i = 1, 2, \dots, n_j\},$$

$$I_3 = \{(r_{ij}, n_j) : \mu_j, n_j \in N, \mu_{j+1} > n_j \geq \mu_j > j, j = 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{v=\mu_j}^{n_j} \frac{1}{v-1} = \infty, \text{ oraz } r_{ij} = i, i = \mu_j, \dots, n_j\}.$$

Wtedy dla dowolnego zbioru I_j , $j = 1, 2, 3, 4$, par indeksów (r, n) , $1 \leq r \leq n$, ciąg wielomianów

$$\{x^{r-1}(1-x)^{n-r}\}_{(r,n) \in I_j}$$

jest ciągiem zupełnym w $L(0, 1)$.

Twierdzenie 2.5. [A2]. Niech $Z(r, n, m, k)$ oznacza dolną uogólnioną statystykę porządkową z próby o rozkładzie F dla $m > -1$ i niech F_0 będzie dowolną dystrybuantą ciągłą. $F = F_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $j=1, 2, 3, 4$ i każdej pary (r, n) należącej do zbioru I_j , mamy

$$E_F(F_0(Z(r, n, m, k))) = \frac{c_{r-1}}{(r-1)!} \left(\frac{1}{m+1}\right)^r B\left(\frac{\gamma_r + 1}{m+1}, r\right), \quad (8)$$

gdzie $c_{r-1} = \prod_{j=1}^r \gamma_j$, dla $r = 1, 2, \dots, n$, $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$.

Wniosek 2.3. Z równości (8) otrzymujemy równość (7), gdy $m = 0$, $k = 1$.

Następujące twierdzenie podaje warunek charakteryzujący rozkład prawdopodobieństwa przy użyciu wartości oczekiwanej pewnej funkcji k -tych dolnych wartości rekordowych.

Twierdzenie 2.6. [A2]. $F = F_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla ustalonych liczb naturalnych k i n_0 ,

$$E_F(F_0(Z_n^{(k)})) = \left(\frac{k}{k+1}\right)^n,$$

dla $n \geq n_0$.

Problem wykorzystania powyższego twierdzenia do konstrukcji testów zgodności bazujących na obserwacjach k -tych dolnych wartości rekordowych jest ciągle otwarty.

2.5 Estymatory parametrów rozkładu Gumbela i Burra w terminach k-tych wartości rekordowych i uogólnionych statystyk porządkowych.

Zagadnienia estymacji parametrycznej stanowią również pole dla zastosowań modeli uporządkowanych zmiennych losowych. Za jedną z pionierskich prac na ten temat uważa się pracę Lloyda z 1952 roku ([61]). Dla rodziny rozkładów symetrycznych zależnych od parametru przesunięcia i skali autor otrzymał liniowe, nieobciążone estymatory o minimalnej wariancji w terminach statystyk porządkowych. Podejście Lloyda opierało się na założeniu znajomości zarówno wektora wartości oczekiwanych jak i macierzy kowariancji statystyk porządkowych. W praktyce wyznaczenie macierzy kowariancji może się okazać trudne. W 1952 roku Gupta ([39]) zaproponował uproszczoną metodę estymacji, stosowaną w przypadku, kiedy znane są tylko wartości oczekiwane.

W przypadku innych modeli uporządkowanych zmiennych losowych, Ahsanullah w 1980 roku ([5]) otrzymał estymatory parametrów skali i przesunięcia dla rozkładu wykładniczego w terminach wartości rekordowych. Przykłady estymatorów μ i σ dla szerokiej klasy rozkładów (Gumbel, potęgowy, Weibull, Rayleigh, logistyczny, Pareto) bazujących na wartościach rekordowych znajdują się w książce Ahsanullaha [6]. Tematyka estymacji parametrycznej dla modeli uporządkowanych zmiennych losowych rozważana jest również w monografiach: Arnold, Balakrishnan i Nagaraja ([11], [12]), Balakrishnan i Aggarwala ([17]), David i Nagaraja ([30]).

Wyniki prac [B1] i [B2] dotyczą estymacji parametrów rozkładu Gumbela i Burra w terminach k-tych wartości rekordowych i uogólnionych statystyk porządkowych.

[B2], [B1]. Praca [B2] podaje, w terminach górnych uogólnionych statystyk porządkowych, estymatory parametrów skali i przesunięcia (μ i σ) z rozkładu Burra: liniowy nieobciążony estymator o minimalnej wariancji (MVLUE) oraz najlepszy estymator niezmienniczy (BLIE). Z rozważań [B2] uzyskuje się wyniki Ahsanullaha z [7] dla rozkładu Lomaxa.

Rozważmy rozkład Burra o dystrybuancie

$$F(x) = 1 - \beta^\lambda \left(\beta + \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-\lambda}, \quad x > \mu; \quad \beta > 0, \lambda > 0, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0. \quad (9)$$

Rozkład Burra zawiera jako szczególne przypadki uogólniony rozkład Pareto ($\lambda = \beta = \alpha^{-1}$), a także rozkład Lomaxa ($\beta = 1$).

Uogólnione statystyki porządkowe w konstrukcji estymatorów dla klasy rozkładów typu Pareto wykorzystywano w pracy [7]. Praca [B2] uogólnia te wyniki.

Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych obserwacji z populacji o rozkładzie danym przez dystrybuantę F . Przez $X(1, n, m, k), \dots, X(n, n, m, k)$ oznaczamy górne uogólnione statystyki porządkowe ciągu (X_n) . Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$c_r = \prod_{j=1}^r \gamma_j \lambda, \quad d_r = \prod_{j=1}^r (\gamma_j \lambda - 1) \text{ and } e_r = \prod_{j=1}^r (\gamma_j \lambda - 2). \quad (10)$$

Twierdzenie 2.7. [B2]. *Niech $X(1, n, m, k), \dots, X(n, n, m, k)$ będą górnymi uogólnionymi statystykami porządkowymi z rozkładu Burra. Liniowe, nieobciążone estymatory o minimalnej wariancji (MVBLUE) parametrów μ i σ , gdy znane są parametry λ and β , mają postać:*

$$\hat{\mu}_{GM} = \sum_{i=1}^n w_{1i} X(i, n, m, k), \quad \hat{\sigma}_{GM} = \frac{(\gamma_1 \lambda - 1)}{\beta} (X(1, n, m, k) - \hat{\mu}_{GM}), \quad (11)$$

gdzie

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{1}{D_0} \left\{ T_0 e_1 (\gamma_1 \lambda - 1) - \frac{e_1^2}{c_1} (\gamma_1 \lambda - \gamma_2 \lambda + 1) \right\}, \\ w_{1i} &= \frac{1}{D_0} \left\{ -\frac{e_1 e_i}{c_i} (\lambda \gamma_r - \lambda \gamma_{i+1} + 1) \right\}, \quad r = 2, \dots, n-1, \\ w_{1n} &= -\frac{1}{D_0} e_1 (\gamma_n \lambda - 1) \frac{e_n}{c_n}, \\ D_0 &= e_1 c_1 T_0 - e_1^2, \quad T_0 = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{c_i}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\text{Var}(\hat{\mu}_{GM}) = \sigma^2 \beta^2 \frac{T_0}{D_0}, \quad \text{Var}(\hat{\sigma}_{GM}) = \sigma^2 \frac{T_0 + e_1^2}{D_0}, \quad \text{Cov}(\hat{\mu}_{GM}, \hat{\sigma}_{GM}) = \sigma^2 \beta \frac{T_0 - e_1}{D_0}.$$

Twierdzenie 2.8. [B2]. *Najlepsze estymatory niezmiennicze (BLIE) parametrów skali i przesunięcia μ i σ dla rozkładu Burra (9) dane są wzorami*

$$\tilde{\mu}_{BL} = \hat{\mu}_{GM} - \hat{\sigma}_{GM} \left[\beta \frac{T_0 - e_1}{T_0 + D_0 + e_1^2} \right], \quad \tilde{\sigma}_{BL} = \hat{\sigma}_{GM} \frac{D_0}{T_0 + D_0 + e_1^2}. \quad (12)$$

Błędy średniokwadratowe estymatorów $\tilde{\mu}_{BL}$ i $\tilde{\sigma}_{BL}$ określają wzory

$$\text{MSE}(\tilde{\mu}_{BL}) = \sigma^2 \beta^2 \left[\frac{T_0}{D_0} - \beta \frac{(T_0 - e_1)^2}{D_0(D_0 + T_0 + e_1^2)} \right], \quad \text{MSE}(\tilde{\sigma}_{BL}) = \sigma^2 \frac{T_0 + e_1^2}{D_0 + T_0 + e_1^2},$$

gdzie $\hat{\sigma}_{GM}$ i $\hat{\mu}_{GM}$ są estymatorami MVLUE dla σ i μ z (11).

Specyfikacja parametrów w powyższych twierdzeniach prowadzi do następujących wniosków.

Wniosek 2.4. Dla $\lambda = \beta = \alpha^{-1}$, otrzymujemy estymatory typu MVLUE oraz BLIE dla uogólnionego rozkładu Pareto.

Wniosek 2.5. Dla $\beta = 1$, otrzymujemy estymatory typu MVLUE oraz BLIE dla rozkładu Lomaxa ([7]).

Wniosek 2.6. Dla $m_1 = \dots = m_{n-1} = -1$ otrzymujemy estymatory typu MVLUE oraz BLIE dla rozkładu Burra wyrażone w terminach k -tych górnych wartości rekordowych ([B1]).

W pracy [B1] podano estymatory MVLUE, BLIE oraz MLE (maksymalnej wiarygodności) parametrów μ i σ dla rozkładu Gumbela w terminach k -tych dolnych wartości rekordowych i dla rozkładu Burra w terminach k -tych górnych wartości rekordowych.

Rozważmy rozkład Gumbela o dystrybuancie

$$F(x) = e^{-e^{-\{\frac{x-\mu}{\sigma}\}}}, \quad x \in R; \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0. \quad (13)$$

Twierdzenie 2.9. [B1]. Liniowe, nieobciążone estymatory o minimalnej wariancji (MVLUE) parametrów μ i σ z rozkładu Gumbela (13), wyrażone w terminach k -tych dolnych wartości rekordowych $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_m^{(k)}$, mają postać:

$$\hat{\mu}_{GM}^{(k)} = z_m^{(k)} - (\nu(m) + \ln k) \left[(m-1)^{-1} \sum_{i=1}^{m-1} z_i^{(k)} - z_m^{(k)} \right], \quad \hat{\sigma}_{GM}^{(k)} = (m-1)^{-1} \sum_{i=1}^{m-1} z_i^{(k)} - z_m^{(k)}. \quad (14)$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\mu}_{GM}^{(k)}) &= \sigma^2 \left(\frac{(\nu(m) + \ln k)^2}{(m-1)} + V_{m,m}^* \right), & \text{Var}(\hat{\sigma}_{GM}^{(k)}) &= \frac{\sigma^2}{m-1}, \\ \text{Cov}(\hat{\mu}_{GM}^{(k)}, \hat{\sigma}_{GM}^{(k)}) &= -\frac{\sigma^2(\nu(m) + \ln k)}{m-1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\xi_i^{(k)} &= \ln k + \nu(i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \nu(1) &= \gamma, \quad \nu(i) = \nu(i-1) - (i-1)^{-1}, \quad i \geq 2, \\ V_{1,1}^* &= \frac{\pi^2}{6}, \quad V_{i,i}^* = V_{i-1,i-1}^* - (i-1)^{-2}, \quad i \geq 2.\end{aligned}$$

Twierdzenie 2.10. [B1]. *Najlepsze estymatory niezmiennicze (BLIE) parametrów skali i przesunięcia μ i σ dla rozkładu Gumbela (13) dane są wzorami*

$$\tilde{\mu}_{BL}^{(k)} = \hat{\mu}_{GM}^{(k)} - \hat{\sigma}_{GM}^{(k)} \frac{(\nu(m) + \ln k)}{m}, \quad \tilde{\sigma}_{BL}^{(k)} = \hat{\sigma}_{GM}^{(k)} \frac{m-1}{m}.$$

Błędy średniokwadratowe estymatorów $\tilde{\mu}_{BL}^{(k)}$ i $\tilde{\sigma}_{BL}^{(k)}$ mają postać

$$\text{MSE}(\tilde{\mu}_{BL}^{(k)}) = \sigma^2 \left[\frac{(\nu(m) + \ln k)^2}{m} + V_{m,m}^* \right], \quad \text{MSE}(\tilde{\sigma}_{BL}^{(k)}) = \frac{\sigma^2}{m},$$

gdzie $\hat{\sigma}_{GM}^{(k)}$ i $\hat{\mu}_{GM}^{(k)}$ są podane w (14).

Twierdzenie 2.11. [B1]. *Estymatory maksymalnej wiarygodności (MLE) parametrów skali i przesunięcia μ i σ dla rozkładu Gumbela (13) dane są wzorami*

$$\hat{\mu}_{ML}^{(k)} = z_m^{(k)} + \ln \left(\frac{m}{k} \right) [\bar{z}^{(k)} - z_m^{(k)}], \quad \hat{\sigma}_{ML}^{(k)} = \bar{z}^{(k)} - z_m^{(k)},$$

gdzie $\bar{z}^{(k)} = \sum_{i=1}^m z_i^{(k)} / m$.

Wniosek 2.7. *Dla $k = 1$ otrzymujemy estymatory dla rozkładu Gumbela wyrażone w terminach górnych wartości rekordowych uzyskane w [10].*

W przypadku rozkładu Burra otrzymano następujące estymatory wyrażone w terminach k -tych górnych wartości rekordowych.

Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych obserwacji z populacji o rozkładzie X , a $Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \dots, Y_m^{(k)}$ oznaczają k -te górne wartości rekordowe ciągu (X_n) . Jeżeli X ma rozkład Burra (9), to wielkości z (10) mają postać

$$c_i = k^i \lambda^i, \quad d_i = (k\lambda - 1)^i \text{ oraz } e_i = (k\lambda - 2)^i.$$

Twierdzenie 2.12. [B1]. *Liniowe, nieobciążone estymatory o minimalnej wariancji (MVLUE) parametrów μ i σ z rozkładu Burra (9), wyrażone w terminach k -tych górnych wartości rekordowych $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}$, dane są wzorami*

$$\hat{\mu}_{GM}^{(k)} = \left[\sum_{i=1}^m w_{1i} y_i^{(k)} \right], \quad \hat{\sigma}_{GM}^{(k)} = \frac{1}{\beta} d_1 \left(y_1^{(k)} - \hat{\mu}_{GM}^{(k)} \right), \quad (15)$$

gdzie

$$w_{11} = \frac{1}{D_0} \left\{ T_0 e_1 d_1 - \frac{e_1^2}{c_1} \right\}, \quad w_{1i} = \frac{1}{D_0} \left\{ -\frac{e_{i+1}}{c_i} \right\}, \quad i = 2, \dots, m-1, \\ w_{1m} = -\frac{1}{D_0} d_1 \frac{e_{m+1}}{c_m}, \quad D_0 = e_1 c_1 T_0 - e_1^2, \quad T_0 = \sum_{i=1}^m \frac{e_i}{c_i}.$$

Wariancje i kowariancje tych estymatorów mają postać

$$\text{Var}(\hat{\mu}_{GM}^{(k)}) = \sigma^2 \beta^2 \frac{T_0}{D_0}, \quad \text{Var}(\hat{\sigma}_{GM}^{(k)}) = \sigma^2 \frac{T_0 + e_1^2}{D_0}, \quad \text{Cov}(\hat{\mu}_{GM}^{(k)}, \hat{\sigma}_{GM}^{(k)}) = \sigma^2 \beta \frac{T_0 - e_1}{D_0}.$$

Twierdzenie 2.13. [B1]. *Najlepsze estymatory niezmiennicze (BLIE) parametrów skali i przesunięcia μ i σ dla rozkładu Burra (9) dane są wzorami*

$$\tilde{\mu}_{BL}^{(k)} = \hat{\mu}_{GM}^{(k)} - \hat{\sigma}_{GM}^{(k)} \left[\beta \frac{T_0 - e_1}{T_0 + D_0 + e_1^2} \right], \quad \tilde{\sigma}_{BL}^{(k)} = \hat{\sigma}_{GM}^{(k)} \frac{D_0}{T_0 + D_0 + e_1^2}. \quad (16)$$

Błędy średniokwadratowe estymatorów $\tilde{\mu}_{BL}^{(k)}$ i $\tilde{\sigma}_{BL}^{(k)}$ określają wzory

$$\text{MSE}(\tilde{\mu}_{BL}^{(k)}) = \sigma^2 \beta^2 \left[\frac{T_0}{D_0} - \beta \frac{(T_0 - e_1)^2}{D_0(D_0 + T_0 + e_1^2)} \right], \quad \text{MSE}(\tilde{\sigma}_{BL}^{(k)}) = \sigma^2 \frac{T_0 + e_1^2}{D_0 + T_0 + e_1^2},$$

gdzie $\hat{\sigma}_{GM}^{(k)}$ i $\hat{\mu}_{GM}^{(k)}$ są dane w (15).

Zauważmy, że estymatory (15) i (16) parametrów rozkładu Burra w terminach k -tych górnych wartości rekordowych można uzyskać jako szczególne przypadki estymatorów (11) i (12) z pracy [B2], kładąc $m_1 = \dots = m_{n-1} = -1$. Wyniki z pracy [B2] były wykorzystywane w pracach ([1], {7}, [25], {12}, [27], {31}, [95], {19}).

2.6 Miary zależności zmiennych losowych i ich zastosowania.

Pierwsze próby badania zależności między cechami danej populacji wywodzą się z biologii oraz antropologii ([31]). Tablica Rodgersa i Nicewandera opublikowana w 1988 roku ([87]) zawiera najważniejsze fakty z historii rozwoju pojęcia

korelacji (zob. również [31], str. 26). Pojęcie to, ogólniej miara zależności między zmiennymi losowymi, ma bogatą literaturę monograficzną ([18], [31], [69]) i czasopiśmienniczą. Wśród wyników polskich autorów należy przytoczyć opracowania [19], [24], [51], [52], które reprezentują nowe spojrzenie na zagadnienie zależności zmiennych losowych.

Najpowszechniej używaną miarą zależności zmiennych losowych X i Y jest kowariancja ($Cov(X, Y)$) określona wzorem

$$Cov(X, Y) = EXY - EYEX, \quad (17)$$

dla $X \in L^1$, $Y \in L^1$, $XY \in L^1$ (L^1 -przestrzeń całkowalnych zmiennych losowych). Pojęcie to przypisuje się Pearsonowi, chociaż statystyczny odpowiednik (17) był wcześniej używany przez ekonomistę Edgewortha w [33].

Modyfikacja tego pojęcia została podana przez Hoeffdinga ([42]):

$$Cov^{(F)}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F_{(X,Y)}(x, y) - F_X(x)F_Y(y)] dx dy,$$

a jej uogólnienie w pracy Mardia i Thomson ([63]):

$$Cov^{(F)}(X^r, Y^s) = rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{r-1} y^{s-1} [F_{(X,Y)}(x, y) - F_X(x)F_Y(y)] dx dy, \quad r, s \geq 1.$$

Krajka i Szynal ([53]), wzorując się na nowej koncepcji zależności ([24], [51]) zwanej zależnością kwadrantową, wprowadzili kwantylową miarę zależności, a następnie w [54] podali pojęcie Q-kowariancji, które można wykorzystywać w badaniu zależności zmiennych losowych w przypadku, gdy kowariancja Pearsona i F-kowariancja nie mogą być stosowane (Drouet-Mari i Kotz [31]). Pojęcie to pozwoliło wprowadzić nową miarę zależności ([C1]) zwaną PD-kowariancją i podać jej zastosowania, w szczególności do badania zależności nieskorelowanych zmiennych losowych.

[C1]. W pracy [C1] wprowadzono nową miarę zależności zmiennych losowych zwaną pseudo-kowariancją ($Cov^{(PD)}(X, Y)$). Pozwala ona badać zależność zmiennych losowych X i Y , gdy klasyczna kowariancja nie może być stosowana. Ważnym zastosowaniem tej miary jest badanie zależności nieskorelowanych zmiennych losowych. Ponadto miara ta może być wykorzystana w charakterystyce rozkładów prawdopodobieństwa.

Niech (Ω, A, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla danego $r > 0$, L^r oznacza przestrzeń zmiennych losowych X takich, że $E|X|^r < \infty$. L^0 stanowi przestrzeń wszystkich zmiennych losowych, mających ciągłe rozkłady. Dla $p \in (0, 1)$, $y(p)$ jest kwantylem rzędu p zmiennej losowej Y tj. $P[Y < y(p)] \leq p \leq P[Y \leq y(p)]$.

Dla zmiennych $X \in L^1$ oraz $Y \in L^0$ o rozkładach ciągłych określamy wielkości

$$L_{X,Y}(p) := E(X - EX)I[Y \geq y(p)], \quad \bar{L}_{X,Y}(p) := E(X - EX)I[Y < y(p)],$$

gdzie $I[\cdot]$ oznacza funkcję indykatora. W dalszej części wykorzystujemy równości

$$L_{X-EX, Y-EY}(p) = L_{X,Y}(p), \quad \bar{L}_{X-EX, Y-EY}(p) = \bar{L}_{X,Y}(p)$$

oraz

$$\bar{L}'_{X,Y}(p) = E(X|Y = y(p)) - EX \quad (\text{cf. Krajka i Szynal [54]}),$$

gdzie $\bar{L}'_{X,Y}(p) = \frac{d}{dp} \bar{L}_{X,Y}(p)$.

Definicja 2.3. (Krajka i Szynal [54]). *Dla zmiennej losowej $X \in L^1$ i dowolnej zmiennej losowej $Y \in L^0$, Q -kowariancja $Cov^{(Q)}(X, Y)$ jest zdefiniowana następująco:*

$$Cov^{(Q)}(X, Y) = - \int_0^1 y(p) dL_{X,Y}(p) = \int_0^1 y(p) d\bar{L}_{X,Y}(p),$$

pod warunkiem, że jedna z całek po prawej stronie jest skończona.

Poniższe twierdzenie podaje związek między $Cov(X, Y)$, $Cov^{(F)}(X, Y)$ oraz $Cov^{(Q)}(X, Y)$.

Twierdzenie 2.14. (Krajka i Szynal [54]). *Niech X i Y będą zmiennymi losowymi o ciągłych rozkładach takich, że $X \in L^1$, $Y \in L^1$ and $XY \in L^1$. Wtedy*

$$Cov(X, Y) = Cov^{(F)}(X, Y) = Cov^{(Q)}(X, Y) = Cov^{(Q)}(Y, X).$$

Aby wprowadzić pojęcie nowej miary zależności, użyjemy następującego oszacowania $Cov^{(Q)}(X, Y)$.

Twierdzenie 2.15. (Krajka i Szynal [54]). *Niech (X, Y) oznacza wektor losowy, którego składowe mają ciągłe i ściśle monotoniczne rozkłady brzegowe. Załóżmy, że*

$X \in L^1$, $Y \in L^r$, $\bar{L}_{X,Y}(p)$ jest różniczkowalna dla $p \in (0, 1)$ i $\int_0^1 |\bar{L}'_{X,Y}(p)|^s dp < \infty$, gdzie $r, s > 0$ i $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Wtedy

$$|Cov^{(Q)}(X, Y)| \leq \left(\int_0^1 |y(p)|^r dp \right)^{1/r} \left(\int_0^1 |\bar{L}'_{X,Y}(p)|^s dp \right)^{1/s}. \quad (18)$$

Wniosek 2.8. Jeżeli $r = s = 2$, to

$$|Cov^{(Q)}(X, Y)| \leq \left(\int_0^1 (y(p))^2 dp \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (E(X|Y = y(p)) - EX)^2 dp \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Zauważmy, że klasyczne ograniczenie dla $Cov(X, Y)$ ma w tym przypadku postać:

$$|Cov(X, Y)| \leq \sigma X \sigma Y, \quad (20)$$

gdzie $\sigma^2 X = Var X$, $\sigma^2 Y = Var Y$.

Ograniczenie dla Q-kowariancji we wzorze (19)

$$\left(\int_0^1 (y(p))^2 dp \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (E(X|Y = y(p)) - EX)^2 dp \right)^{1/2}$$

jest równe 0 dla niezależnych zmiennych losowych X i Y , podczas gdy ograniczenie $\sigma X \sigma Y$ w (20) ma wartość dodatnią. To sugeruje wprowadzenie nowej miary zależności dla zmiennych losowych X i Y .

Definicja 2.4. [C1]. Niech (X, Y) oznacza wektor losowy, którego składowe mają ciągłe rozkłady brzegowe. Pseudokowariancję (X, Y) ($Cov^{(PD)}(X, Y)$) nazywamy wielkość

$$Cov^{(PD)}(X, Y) = \left(\int_0^1 (y(p))^2 dp \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (E(X|Y = y(p)) - EX)^2 dp \right)^{1/2},$$

pod warunkiem, że prawa strona równości jest skończona.

Wzór (18) pozwala na wprowadzenie ogólniejszej miary zależności X i Y .

Definicja 2.5. [C1]. Niech (X, Y) oznacza wektor losowy, którego składowe mają ciągłe rozkłady brzegowe; (r, s) -pseudokowariancję (X, Y) ($Cov_{r,s}^{(PD)}(X, Y)$) nazywamy wielkość

$$Cov_{r,s}^{(PD)}(X, Y) = \left(\int_0^1 |y(p)|^r dp \right)^{1/r} \left(\int_0^1 (E(X|Y = y(p)) - EX)^s dp \right)^{1/s},$$

pod warunkiem, że prawa strona równości jest skończona, dla $r, s > 0$ i $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Rényi w [84] postuluje, aby miara zależności spełniała następujące warunki:

1. Miara przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$.
2. Jeżeli X i Y są niezależne, wartość miary równa się 0.
3. Jeżeli X jest funkcją Y , to wartość miary wynosi 1.
4. Wzrost zależności między zmiennymi powoduje wzrost wartości miary.
5. Niezmienniczość względem transformacji liniowej zmiennych.
6. Symetria.

Zauważmy, że wprowadzona (nieunormowana) miara zależności PD-kowariancja $(Cov^{(PD)}(X, Y))$ spełnia warunki 2, 4, 5.

Wprowadźmy naturalne pojęcie $PD - (r, s)$ nieskorelowania.

Definicja 2.6. [C1]. *Mówimy, że X i Y są $PD - (r, s)$ nieskorelowane, jeżeli*

$$Cov_{r,s}^{(P,D)}(X, Y) = 0,$$

gdzie $r, s > 0$ oraz $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. W przypadku, gdy $r = s = 2$ mówimy, że zmienne losowe X i Y są PD -nieskorelowane.

Następujące przykłady rzucają więcej światła na pojęcie PD-kowariancji $(Cov^{(PD)}(X, Y))$ i możliwości jego zastosowań.

Przykład 2.3. [C1]. *Niech łączna funkcja gęstości $f_{X,Y}(x, y)$ wektora losowego (X, Y) ma postać:*

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & |x| + |y| \leq 1, \\ 0; & |x| + |y| > 1. \end{cases}$$

Zmienne losowe X i Y mają jednakowy rozkład dany przez funkcję gęstości postaci

$$f(x) = \begin{cases} x + 1; & x \in (-1, 0], \\ -x + 1; & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Stąd $EX = EY = 0$ i $EXY = 0$. Zatem X i Y są nieskorelowane. Ponadto $E(Y|X) = E(X|Y) = 0$, skąd

$$Cov(X, Y) = Cov^{(PD)}(X, Y) = Cov^{(PD)}(Y, X) = 0.$$

Przykład 2.4. [C1]. Niech X ma rozkład jednostajny na $(-1, 1)$ i $Y = |X|$. Wtedy $\text{Cov}(X, Y) = 0$, ale X i Y są zależne. Ponadto

$$\text{Cov}^{(PD)}(X, Y) = \left(\int_0^1 |y(p)|^2 dp \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\bar{L}'_{X,Y}(p)|^2 dp \right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

więc X i Y są PD-nieskorelowane.

Przykład 2.5. [C1]. Niech łączna funkcja gęstości $f_{X,Y}(x, y)$ wektora losowego (X, Y) ma postać:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)]; & |x| < 1 \wedge |y| < 1, \\ 0; & |x| \geq 1 \vee |y| \geq 1. \end{cases}$$

W tym przypadku zmienne losowe X i Y mają rozkłady jednostajne na $(-1, 1)$. Ponadto $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, więc X i Y są zależne. Zauważmy, że X i Y są nieskorelowane ($\text{Cov}(X, Y) = 0$). Obliczmy teraz $\text{Cov}^{(PD)}(X, Y)$.

Ponieważ

$$\sqrt{\int_0^1 (y(p))^2 dp} = \sigma(Y) = \sqrt{3}/3$$

i

$$\sqrt{\int_0^1 (E(X|Y = y_p) - EX)^2 dx} = \frac{2}{15\sqrt{7}},$$

to

$$\text{Cov}^{(PD)}(X, Y) = \frac{2\sqrt{21}}{315} \neq 0.$$

Przykład 2.6. [C1]. Niech

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x) := F_1(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x^2}, & x > 1, \end{cases} & F_{X_2}(x) := F_2(x) &= \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x^4}, & x > 1, \end{cases} \\ G_{Y_1}(y) := G_1(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ y, & 0 < y \leq 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases} & G_{Y_2}(y) := G_2(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq -1, \\ \frac{y+1}{3}, & -1 < y \leq 2, \\ 1, & y > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Określmy

$$F_{X,Y}(x, y) = \alpha F_1(x)G_1(y) + (1 - \alpha)F_2(x)G_2(y).$$

Wtedy $Cov(X, Y) = \alpha(1 - \alpha)[EX_1 - EX_2][EY_1 - EY_2]$ i X oraz Y są zależne, ale nieskorelowane bo $EY_1 = EY_2$ (Behboodian [20]).

Naszym celem jest wyznaczenie pseudokowariancji (X, Y) ($Cov^{(PD)}(X, Y)$). Niech $\alpha = 1/2$.

Funkcja gęstości (X, Y) ma postać

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & (x < 1 \wedge y \in R) \vee (x > 1 \wedge (y < -1 \vee y > 2)), \\ \frac{1}{x^3} + \frac{2}{3x^5} & x > 1 \wedge y \in (0, 1), \\ \frac{2}{3x^5} & x > 1 \wedge (y \in (-1, 0) \vee y \in (1, 2)), \end{cases}$$

a rozkład brzegowy Y jest określony przez dystrybuantę $G_Y(y)$, gdzie

$$G_Y(y) = \alpha G_1(y) + (1 - \alpha)G_2(y).$$

Stąd dla $\alpha = 1/2$ mamy

$$E(X|Y = y) = \begin{cases} 0, & y \leq -1 \vee y > 2, \\ \frac{4}{3} & y \in (-1, 0], \\ \frac{11}{6} & y \in (0, 1], \\ \frac{4}{3} & y \in (1, 2], \end{cases}$$

co daje

$$E(X|Y = y(p)) = \begin{cases} 0, & y(p) \leq -1 \vee y(p) > 2, \\ \frac{4}{3} & y(p) \in (-1, 0] \ (\Rightarrow p \in (0, 1/6)), \\ \frac{11}{6} & y(p) \in (0, 1] \ (\Rightarrow p \in (1/6, 5/6)), \\ \frac{4}{3} & y(p) \in (1, 2]. \ (\Rightarrow p \in (5/6, 1)). \end{cases}$$

$EX = 5/3$, więc

$$\sqrt{\int_0^1 (E(X|Y = y(p)) - EX)^2 dx} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Ponadto

$$(\int_0^1 (y(p))^2 dp)^{1/2} = \sqrt{2/3}.$$

Zatem

$$\text{Cov}^{(PD)}(X, Y) = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Wiadomo, że równość

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}^{(Q)}(X, Y) = \text{Cov}^{(PD)}(X, Y) = 0$$

jest spełniona, gdy X i Y są niezależne. Stąd pojawia się naturalne pytanie, czy warunek

$$\text{Cov}^{(Q)}(X, Y) = \text{Cov}^{(Q)}(X^o, Y^o) = \text{Cov}^{(PD)}(X^o, Y^o),$$

gdzie $X^o = X - EX$, $Y^o = Y - EY$, zachodzi także dla pewnych zależnych zmiennych losowych. Badania tego zagadnienia prowadzą do charakteryzacji pewnych rozkładów prawdopodobieństwa w terminach statystyk porządkowych oraz k -tych wartości rekordowych.

Twierdzenie 2.16. [C1]. *Niech (X_1, X_2) będzie próbą z populacji o rozkładzie absolutnie ciągłym danym przez dystrybuantę F , a $X_{1:2}$ i $X_{2:2}$ oznaczają statystyki porządkowe. Warunek*

$$\text{Cov}^{(Q)}(X_{1:2}, X_{2:2}) = \text{Cov}^{(PD)}(X_{1:2}^o, X_{2:2}^o) = \frac{\alpha^2}{(\alpha + 1)^2(\alpha + 2)^2}, \quad \alpha > 0,$$

gdzie $X_{1:2}^o = X_{1:2} - EX_{1:2}$ i $X_{2:2}^o = X_{2:2} - EX_{2:2}$, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład potęgowy.

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy charakteryzacje rozkładu jednostajnego, podane w pracach Terrell [92] i Papathanasiou [70]. Ich wyniki zawarte są w następującym wniosku.

Wniosek 2.9. [C1]. *Niech (X_1, X_2) będzie próbą z populacji o rozkładzie absolutnie ciągłym danym przez dystrybuantę F na $(0, 1)$, a $X_{1:2}$ i $X_{2:2}$ oznaczają statystyki porządkowe. Warunek*

$$\text{Cov}(X_{1:2}, X_{2:2}) = \text{Cov}^{(Q)}(X_{1:2}, X_{2:2}) = \text{Cov}^{(PD)}(X_{1:2}^o, X_{2:2}^o) = \frac{1}{3}\sigma^2 X,$$

gdzie $X_{1:2}^o = X_{1:2} - EX_{1:2}$ i $X_{2:2}^o = X_{2:2} - EX_{2:2}$, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład jednostajny na $(0, 1)$.

[C2], [C3], [C4]. W pracy [C2] uogólniono wynik charakteryzacyjny z [C1] rozważając próbę n -elementową.

Twierdzenie 2.17. [C2]. *Niech $(X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą z populacji o rozkładzie absolutnie ciągłym danym przez dystrybuantę F na $(0, 1)$ i $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ oznaczają statystyki porządkowe. Warunek*

$$Cov(X_{i:n}, X_{j:n}) = Cov^{(Q)}(X_{i:n}, X_{j:n}) = Cov^{(PD)}(X_{i:n}^o, X_{j:n}^o),$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X ma rozkład potęgowy.

Prace [C3] i [C4] podają charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa w terminach k -tych dolnych wartości rekordowych ([C3]) oraz k -tych górnych wartości rekordowych ([C4]).

W pracy [C3] podano charakteryzacje następujących rozkładów prawdopodobieństwa:

i) ujemny rozkład wykładniczy

$$F(x) = e^{\lambda(x-\nu)}, \quad x < \nu; \quad \lambda > 0, \quad \nu \in R. \quad (21)$$

ii) ujemny rozkład Pareto

$$F(x) = \left(\frac{\delta - \nu}{\delta - x} \right)^\theta, \quad x < \nu; \quad \theta > 0, \quad \nu, \delta \in R, \nu < \delta. \quad (22)$$

iii) odwrotny rozkład potęgowy

$$F(x) = \left(\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \right)^\theta, \quad \alpha < x < \beta; \quad \theta > 0, \quad \alpha, \beta \in R, \alpha < \beta. \quad (23)$$

Twierdzenie 2.18. [C3]. *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie danym przez ściśle rosnącą dystrybuantę F i funkcję gęstości f . Niech $Z_m^{(k)}$ i $Z_n^{(k)}$ dla $m < n$, oznaczają k -te dolne wartości rekordowe. Oznaczmy przez $Z_m^{(k,0)} = Z_m^{(k)} - EZ_m^{(k)}$ i $Z_n^{(k,0)} = Z_n^{(k)} - EZ_n^{(k)}$. Warunek*

$$Cov^Q(Z_n^{(k,0)}, Z_m^{(k,0)}) = Cov^{(PD)}(Z_n^{(k,0)}, Z_m^{(k,0)}),$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X ma:

- i) ujemny rozkład wykładniczy (21) (zależy od wartości c w dowodzie),*
- ii) ujemny rozkład Pareto (22) (zależy od wartości c w dowodzie),*
- iii) odwrotny rozkład potęgowy (23) (zależy od wartości c w dowodzie).*

W pracy [C4] podano charakteryzacje następujących rozkładów prawdopodobieństwa:

i) rozkład wykładniczy

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-\gamma)}, \quad x > 0; \lambda > 0, \gamma \in R. \quad (24)$$

ii) rozkład Pareto

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\mu + \delta}{x + \delta} \right)^\theta, \quad x > \mu; \theta > 0, \mu, \delta \in R, \mu + \delta > 0. \quad (25)$$

iii) rozkład potęgowy

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\nu - x}{\nu - \mu} \right)^\theta, \quad \mu < x < \nu; \theta > 0, \mu, \nu \in R, \mu < \nu. \quad (26)$$

Twierdzenie 2.19. [C4]. *Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie danym przez ściśle rosnącą dystrybuantę F i funkcję gęstości f . Niech $Y_m^{(k)}$ i $Y_n^{(k)}$ dla $m < n$, oznaczają k -te wartości rekordowe z (X_n) . Oznaczmy przez $Y_m^{(k,0)} = Y_m^{(k)} - EY_m^{(k)}$ i $Y_n^{(k,0)} = Y_n^{(k)} - EY_n^{(k)}$. Warunek*

$$Cov^Q(Y_n^{(k,0)}, Y_m^{(k,0)}) = Cov^{(PD)}(Y_n^{(k,0)}, Y_m^{(k,0)}),$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X ma:

i) rozkład wykładniczy (24) (zależy od wartości c w dowodzie),

ii) rozkład Pareto (25) (zależy od wartości c w dowodzie),

iii) rozkład potęgowy (26) (zależy od wartości c w dowodzie).

3 Pozostały dorobek naukowo-badawczy.

[P1]. Pawlas, P., Szynal, D. (1998). Relations for single and product moments of k -th record values from exponential and Gumbel distributions. J. Appl. Statist. Sci., 7(1), 53-61.

[P2]. Pawlas, P., Szynal, D. (1999). Recurrence relations for single and product moments of k -th record values from Pareto, generalized Pareto and Burr distributions. Commun. Statist. - Theory Meth., 28(7), 1699-1709.

[P3]. Pawlas, P., Szynal, D. (2000). Recurrence relations for single and product moments of k -th record values from Weibull distributions, and a characterization. J. Appl. Statist. Sci., 10(1), 17-26.

[P4]. Pawlas, P., Szynal, D. (2000). Characterizations of the inverse Weibull distribution and generalized extreme value distributions by moments of k -th record values. Appl. Math., 27(2), 197-202.

[P5]. Pawlas, P., Szynal, D. (2000). Recurrence relations for single and product moments of k -th lower record values from the inverse distributions of Pareto's type and characterizations. Discussiones Math., 20, 223-231.

[P6]. Pawlas, P., Szynal, D. (2001). Recurrence relations for single and product moments of generalized order statistics from Pareto, generalized Pareto and Burr distributions. Commun. Statist. - Theory Meth., 30(4), 739-746.

[P7]. Pawlas, P., Szynal, D. (2001). Recurrence relations for single and product moments of lower generalized order statistics from the inverse Weibull distribution, Demonstratio Math. 34(2), 353-358.

[P8]. Pawlas, P. (2006). Étude de la sinistralité Auto, MVP et RPFA à la MACIF IDF. L'Institut des Risques Industriels, Assurantiels et Financiers de l'Université de Poitiers, 109 stron (treść pracy zastrzeżona przez zleceniodawcę).

[P9]. Pawlas, P. (2007). Modélisation statistique appliqué à la prévention des risques. L'Institut des Risques Industriels, Assurantiels et Financiers de l'Université de Poitiers, 52 strony (treść pracy zastrzeżona przez zleceniodawcę).

[P1]. W pracy [P1] podano definicje k -tych dolnych czasów rekordowych i k -tych dolnych wartości rekordowych. W terminach k -tych dolnych i k -tych górnych wartości rekordowych wyprowadzono wzory na relacje rekurencyjne dla momentów brzegowych i łącznych rozkładu Gumbela i rozkładu wykładniczego.

Otrzymane relacje pozwalają wyrazić momenty brzegowe k -tych wartości rekordowych w terminach momentów ekstremalnych statystyk porządkowych.

Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie wykładniczym, a $Y_n^{(k)}$ oznacza k -tą górną wartość rekordową ciągu (X_n) .

Twierdzenie 3.1. Dla $n \geq 1$ i $r = 0, 1, \dots$,

$$E(Y_n^{(k)})^{r+1} = EX_{1:k}^{r+1} + \sum_{l=1}^{r+1} \frac{(r+1)^{(l)}}{k^l} \sum_{p_1=2}^n \sum_{p_2=2}^{p_1} \cdots \sum_{p_l=2}^{p_{l-1}} EX_{1:k}^{r+1-l},$$

gdzie $(r+1)^{(l)} = (r+1)r(r-1) \cdots (r-l+2)$.

Z wyników podanych w [P1] korzystano, między innymi, w pracach [62], {59},

[64], {60}, [91], {71}.

[P2]. Dla rozkładów typu Pareto (rozkład Pareto, uogólniony rozkład Pareto i rozkład Burra) podano wzory rekurencyjne na momenty brzegowe i łączne k -tych górnych wartości rekordowych.

Ponadto praca zawiera twierdzenia charakteryzujące rozkłady typu Pareto.

Rozważmy rozkład Burra o funkcji gęstości

$$f(x) = \lambda \tau \beta^\lambda \frac{x^{\tau-1}}{(\beta + x^\tau)^{\lambda+1}}, \quad x > 0; \beta > 0, \lambda > 0, \tau > 0. \quad (27)$$

Twierdzenie 3.2. *Zmienna losowa X ma rozkład Burra (27) wtedy i tylko wtedy, gdy dla $n \geq 2$ i $\lambda k \tau > \tau + 1$,*

$$E(Y_n^{(k)})^{\tau+1} = \frac{\beta(\tau+1)}{\lambda k \tau - (\tau+1)} EY_n^{(k)} + \frac{\lambda k \tau}{\lambda k \tau - (\tau+1)} E(Y_{n-1}^{(k)})^{\tau+1}.$$

Mohsin i Pilz ([67], {65}) wykorzystali wyniki pracy [P2] do charakteryzacji rozkładu hipergeometrycznego.

[P3]. W pracy [P3] wyniki z pracy [P1], dotyczące rozkładu wykładniczego, zostały rozszerzone na przypadek rozkładu Weibulla. Otrzymano następujące twierdzenie charakteryzujące rozkład Weibulla.

Rozważmy rozkład Weibulla o funkcji gęstości

$$f(x) = \lambda \beta x^{\beta-1} e^{-\lambda x^\beta}, \quad x > 0; \beta > 0, \lambda > 0. \quad (28)$$

Twierdzenie 3.3. *Zmienna losowa X ma rozkład Weibulla (28) wtedy i tylko wtedy, gdy dla $n \geq 1$*

$$E(Y_n^{(k)})^\beta = \frac{n}{k\lambda}.$$

Wyniki pracy [P3] uogólniają, między innymi, rezultaty otrzymane przez Balakrishnana i Ahsanullaha w [16].

[P4]. W pracy [P4] podano twierdzenia charakteryzacyjne dla odwrotnego rozkładu Weibulla oraz rozkładu uogólnionych wartości ekstremalnych w terminach k -tych wartości rekordowych.

Rozważmy odwrotny rozkład Weibulla o dystrybuancie

$$F(x) = e^{-\left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha}, \quad x > 0; \alpha > 0, \theta > 0. \quad (29)$$

Twierdzenie 3.4. *Zmienna losowa X ma odwrotny rozkład Weibulla (29) wtedy i tylko wtedy, gdy dla $n \geq 2$ i $(n-1)\alpha > r$,*

$$E \left(Z_n^{(k)} \right)^r = \left(1 - \frac{r}{(n-1)\alpha} \right) E \left(Z_{n-1}^{(k)} \right)^r.$$

Modele związane z rozkładem Weibulla wykorzystywane są również w modelach fizycznych [43], {38}.

[P5]. W pracy [P5] podano wzory rekurencyjne na momenty brzegowe i łączne k -tych dolnych wartości rekordowych z odwrotnych rozkładów typu Pareto (odwrotny rozkład Pareto, odwrotny uogólniony rozkład Pareto i odwrotny rozkład Burra). Wzory te wykorzystano w twierdzeniach charakteryzujących rozkłady prawdopodobieństwa.

Rozważmy odwrotny rozkład Pareto o dystrybuancie

$$F(x) = \left(\frac{x}{\delta} \right)^\alpha \quad x \in (0, \delta); \alpha > 0, \delta > 0. \quad (30)$$

Twierdzenie 3.5. *Zmienna losowa X ma odwrotny rozkład Pareto (30) wtedy i tylko wtedy, gdy dla $n \geq 2$,*

$$E \left(Z_n^{(k)} \right)^r = \frac{\alpha k}{\alpha k + r} E \left(Z_{n-1}^{(k)} \right)^r.$$

[P6]. W pracy [P6] podano wzory rekurencyjne na momenty brzegowe i łączne górnych uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładów typu Pareto.

Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie Burra (27), a $X(r, n, m, k)$ oznacza górną uogólnioną statystykę porządkową ciągu (X_n) .

Twierdzenie 3.6. *Dla $k, n \in N$, $m \in Z$ $1 \leq r \leq n$ i $j = 0, 1, 2, \dots$, takich, że $\lambda \gamma_r \tau > \tau + 1$,*

$$EX^{\tau+j}(r, n, m, k) = \frac{\beta(\tau+j)}{\lambda \gamma_r \tau - (\tau+j)} EX^j(r, n, m, k) + \frac{\lambda \gamma_r \tau}{\lambda k \tau - (\tau+j)} EX^{\tau+j}(r-1, n, m, k).$$

Wyniki tej pracy rozszerzają twierdzenia Balakrishnana i Ahsanullaha ([15]) dla wartości rekordowych na przypadek uogólnionych statystyk porządkowych.

[P7]. W pracy [P7] wprowadzono model dolnych uogólnionych statystyk porządkowych podany w części 2.3c. rozprawy habilitacyjnej. Powyższy model został następnie zastosowany do wyznaczenia relacji rekurencyjnych na momenty brzegowe i łączne dolnych uogólnionych statystyk porządkowych dla odwrotnego rozkładu Weibulla.

Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o odwrotnym rozkładzie Weibulla (29), a $Z(r, n, m, k)$ oznacza dolną uogólnioną statystykę porządkową ciągu (X_n) .

Twierdzenie 3.7. Dla $k, n \in N$, $m \in Z$ $1 \leq r \leq n$ i $j = 0, 1, 2, \dots$,

$$EZ^{j+\alpha+1}(r, n, m, k) = \frac{\alpha\theta^\alpha\gamma_r}{j+1} [EX^{j+1}(r-1, n, m, k) - EX^{j+1}(r, n, m, k)].$$

[P8]. W pracy [P8], korzystając z danych dotyczących ubezpieczeń zdrowotnych i samochodowych MACIF (towarzystwo ubezpieczeniowe), zastosowałem uogólnione modele liniowe do wyznaczenia prawdopodobieństwa wystąpienia szkody jako pewnej funkcji liniowej kombinacji zmiennych objaśniających (wiek, zawód, płeć, ...).

[P9]. Tematem pracy [P9] jest analiza szkód komunikacyjnych w SMACL (towarzystwo ubezpieczeniowe). Zaprezentowane metody statystyczne pozwalają wyróżnić główne składniki ryzyka i oszacować koszty ubezpieczenia.

4 Działalność naukowa.

4.1 Spis publikacji naukowych.

[A1]. Pawlas, P., Szynal, D. (2003). On characterizations of distributions in terms of lower generalized order statistics, Journal of Statistical Theory and Applications, 2(3, 4), 215-222.

[A2]. Pawlas, P., Rychlik, T., Szynal, D. (2003). On a characterization of distributions by expectations of transformed generalized order statistics, Demonstratio Math. 36(1), 239-245.

- [B1]. Pawlas, P., Malinowska, I., Szynal, D. (2005). Estimation of the parameters of Gumbel and Burr distributions in terms of k -th record values, *Applicaciones Mathematicae*, 32(4), 375-393.
- [B2]. Pawlas, P., Malinowska, I., Szynal, D. (2006). Estimation of location and scale parameters for the Burr XII distribution using generalized order statistics, *Linear Algebra and its Applications*, 417, 150-162.
- [C1]. Pawlas, P., Szynal, D. (2012). On a new measure of dependence and its applications, *Demonstratio Math.* XLV(2), 243-256.
- [C2]. Pawlas, P., Szynal, D. (2015). On a characterization of a power distribution, *Demonstratio Math.* XLVIII(1), 100-106.
- [C3]. Pawlas, P. (2016). Characterization of distributions based on k -th lower record values, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 52(2), 139-148.
- [C4]. Pawlas, P., Szynal, D. (2016). Characterization of distributions via k -th upper record values, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 52(3), 149-157.
- [P1]. Pawlas, P., Szynal, D. (1998). Relations for single and product moments of k -th record values from exponential and Gumbel distributions. *J. Appl. Statist. Sci.*, 7(1), 53-61.
- [P2]. Pawlas, P., Szynal, D. (1999). Recurrence relations for single and product moments of k -th record values from Pareto, generalized Pareto and Burr distributions. *Commun. Statist. - Theory Meth.*, 28(7), 1699-1709.
- [P3]. Pawlas, P., Szynal, D. (2000). Recurrence relations for single and product moments of k -th record values from Weibull distributions, and a characterization. *J. Appl. Statist. Sci.*, 10(1), 17-26.
- [P4]. Pawlas, P., Szynal, D. (2000). Characterizations of the inverse Weibull distribution and generalized extreme value distributions by moments of k -th record values. *Appl. Math.*, 27(2), 197-202.
- [P5]. Pawlas, P., Szynal, D. (2000). Recurrence relations for single and product moments of k -th lower record values from the inverse distributions of Pareto's type and characterizations. *Discussiones Math.*, 20, 223-231.
- [P6]. Pawlas, P., Szynal, D. (2001). Recurrence relations for single and product moments of generalized order statistics from Pareto, generalized Pareto and Burr distributions. *Commun. Statist. - Theory Meth.*, 30(4), 739-746.
- [P7]. Pawlas, P., Szynal, D. (2001). Recurrence relations for single and product moments of lower generalized order statistics from the inverse Weibull distribution. *Demonstratio Math.* 34(2), 353-358.
- [P8]. Pawlas, P. (2006). Étude de la sinistralité Auto, MVP et RPFA à la MACIF IDF. L'Institut des Risques Industriels, Assurantiels et Financiers de

l'Université de Poitiers.

[P9]. Pawlas, P. (2007). Modelisation statistique appliqué à la prévention des risques. L'Institut des Risques Industriels, Assurantiels et Financiers de l'Université de Poitiers.

4.2 Recenzje publikacji czasopiśmienniczych.

1. Applicationes Mathematicae (3 artykuły).
2. Communication in Statistics - Theory and Methods (1 artykuł).
3. Demonstratio Mathematica (1 artykuł).
4. Extreme (1 artykuł).
5. Journal of Statistical Research of Iran (1 artykuł).
6. Metrika (1 artykuł).
7. Metron (2 artykuły).

4.3 Udział w konferencjach naukowych.

Referaty i uczestnictwo w krajowych i zagranicznych konferencjach naukowych dotyczących zastosowań probabilistyki w tym:

1. XXVI Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Szkoleniowa Zastosowań Matematyki w Zakopanem–Kościelisku (1997). Temat referatu: O momentach górnych i dolnych k -tych wartości rekordowych rozkładu wykładniczego i Gumbela.
2. XXIII Krajowa Konferencja „Statystyka Matematyczna- Wisła 97” (1997). Temat referatu: O momentach k -tych górnych wartości rekordowych z rozkładów typu Pareto.
3. V Konferencja z probabilistyki w Poraju (1998). Temat referatu: O momentach k -tych górnych wartości rekordowych z rozkładów ciągłych.

4. XXVII Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Szkoleniowa Zastosowań Matematyki w Zakopanem–Kościelisku (1998). Temat referatu: Wzory rekurencyjne na momenty k -tych wartości rekordowych rozkładów typu Burra i Frécheta i ich zastosowania.
5. XXVIII Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Szkoleniowa Zastosowań Matematyki w Zakopanem–Kościelisku (1999). Temat referatu: O momentach k -tych dolnych wartości rekordowych z odwrotnych rozkładów typu Pareto.
6. VIII Konferencja z Probabilistyki Będlewo (2004). Temat referatu: Estymacja parametrów rozkładów prawdopodobieństwa w terminach k -tych wartości rekordowych.
7. Międzynarodowa Konferencja Probabilistyczna IMPAN Warszawa (2003). Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations. Temat referatu: Characterizations of probability distributions in terms of moments k -th record values and generalized order statistics.
8. Risk Theory and Related Topics - EMS School in Applied Mathematic (2008), Będlewo.
9. XLI Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Szkoleniowa Zastosowań Matematyki w Zakopanem–Kościelisku (2012).
10. Zagadnienia aktuarialne - teoria i praktyka, IM PAN, SGH Warszawa (2012).

4.4 Udział w stażach naukowych.

1. Instytut Matematyczny, Polska Akademia Nauk, Warszawa, staż od 1 października 2001 do 30 września 2002. Wyniki odbytego stażu są opublikowane w pracy:

[A2]. Pawlas, P., Rychlik, T., Szynal, D. (2003). On a characterization of distributions by expectations of transformed generalized order statistics, *Demonstratio Math.* 26(1), 239-245.

2. L'Institut des Risques Industriels Assurantiels et Financiers w Niort, Université de Poitiers, Francja, staż od 1 października 2005 do 30 kwietnia 2006. Wyniki stażu zawiera praca:

[P8]. Étude de la sinistralité Auto, MVP et RPFA à la MACIF IDF (2006).

3. L’Institut des Risques Industriels Assurantiels et Financiers w Niort, Université de Poitiers, Francja, staż od 1 października 2006 do 30 kwietnia 2007. Wyniki stażu zawiera praca:

[P9]. Modélisation statistique appliqué à la prévention des risques (2007).

Po odbyciu stażu naukowego na Uniwersytecie w Poitiers otrzymałem dyplom „Master Sciences et Technologies”.

5 Działalność dydaktyczna.

5.1 Zajęcia dydaktyczne.

1. Wykłady dla studentów studiów dziennych i zaocznych I i II stopnia na kierunku matematyka: rachunek prawdopodobieństwa, matematyczne podstawy ubezpieczeń życiowych, teoria ryzyka, matematyka finansowa, gry i funkcje decyzyjne, metody stochastyczne w finansach, dyskretne procesy stochastyczne.

2. Konwersatoria, ćwiczenia i laboratoria przedmiotów matematycznych: rachunek prawdopodobieństwa, matematyczne podstawy ubezpieczeń życiowych, teoria ryzyka, matematyka finansowa, gry i funkcje decyzyjne, metody stochastyczne w finansach, dyskretne procesy stochastyczne, teoria miary.

3. Pomoce dydaktyczne dla studentów Instytutu Matematyki na Platformie Wirtualny Kampus UMCS (wykłady i skrypty).

5.2 Funkcje promotorskie i organizacyjne.

1. Pełnienie funkcji promotora:

- i) prac magisterskich (25),
- ii) prac licencjackich (28),
- iii) prac dyplomowych (15).

2. Pełnienie funkcji opiekuna roku w Instytucie Matematyki (3 razy).

3. Organizacja Międzynarodowej Konferencji Probabilistycznej w Nałęczowie: XX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Lublin-Nałęczów, 5-11 September, 1999.

6 Bibliografia Autoreferatu.

- [1] Aboelenen, Z. A. (2010). Inference for Weibull distribution under generalized order statistics. *Mathematics and Computers in Simulation* 81, 26-36.
- [2] Ahsanullah, M. (1976). On a characterization of the exponential distribution by order statistics. *J. Appl. Prob.* 13, 818-822.
- [3] Ahsanullah, M. (1978). A characterization of the exponential distribution by spacings. *J. Appl. Prob.* 15, 650-653.
- [4] Ahsanullah, M. (1979). Characterization of the exponential distribution by record values. *Sankhyā B*, Vol. 41, 116-121.
- [5] Ahsanullah, M. (1980). Linear prediction of record values for the two parameter exponential distribution. *Ann. Inst. Statist. Math*, 32, 363-368.
- [6] Ahsanullah, M. (1995). *Record Statistics*. Oxford Clarendon Press Commack, New York.
- [7] Ahsanullah, M., Habibullah, M. (2000). Estimators of parameters of Pareto distribution by generalized order statistics. *Commun.Statist.- Theory Meth.*, 29 (7), 1597-1609.
- [8] Ahsanullah, M. (2007). Some characterization of the power function distribution based on lower generalized order statistics. *Pakistan J. Statist.*, 23, 139-146.
- [9] Ahsanullah, M., Nevzorov, V. P., and Shakil, M. (2013). *An Introduction to Order Statistics*. Paris, France: Atlantis Press.
- [10] Ali Mousa, M. A., Jaheen, Z. F., and Ahmed, A. A. (2002). Bayesian estimation, prediction and characterization for the Gumbel model based on records. *Statistics* 36, 65-74.
- [11] Arnold, B. C., Balakrishnan, N., Nagaraja, H. N. (1992). *A First Course in Order Statistics* (Wiley Series in Probability and Statistics). Wiley, New York.
- [12] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998). *Records*. John Wiley, New York.
- [13] Arnold, B. C. and Brockett, P. L. (1988). Variance bounds using a theorem of Polya. *Statistics and Probability Letters* 6, 321-238.
- [14] Athar, H. and Faizan, M. (2011). Moments of Lower generalized Order Statistics from Power Function Distribution and its Characterization. *International Journal of Statistical Sciences*, Vol. 11, 125-134.
- [15] Balakrishnan, N., Ahsanullah, M. (1994). Recurrence relations for single and product moments of record values from generalized Pareto distribution. *Commun. Statist. Theory Meth.*, 23 (10), 2841-2852.

- [16] Balakrishnan, N., Ahsanullah, M. (1995). Recurrence relations for single and product moments of record values from exponential distribution. *J. Appl. Statist. Sc.*, 2(1) , 73-87.
- [17] Balakrishnan, N., and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications*. Boston.
- [18] Balakrishnan, N., and Chin-Diew, L. (2009). *Continuous Bivariate Distributions*. Second Edition. Springer.
- [19] Bednarski, T., Ledwina, T. (1982). A note on the weak convergence of an estimator of monotonic dependence function of two random variables. *Math. Operationsforsch. Statist.*, Ser. Statistics 13, 555-560.
- [20] Behboodian, J. (1990). Examples of uncorrelated dependent random variables using a bivariate mixture. *Amer. Statist.*, Vol. 44, No. 3, 218.
- [21] Bieniek, M. and Szynal, D. (2000). Limiting distributions of differences and quotients of successive k -th upper and lower record values. *Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 20, 189-202.
- [22] Bieniek, M. and Szynal, D. (2004). Characterizations based on k -th upper and lower record values. *Demonstratio Math.*, 37, No 2, 263-273.
- [23] Boas, R.P. (1954). *Entire Functions*. Academic Press, New York.
- [24] Bromek, T. and Pleszczyńska, E. (1991). *Statistical Inference: Theory and Practice*. PWN.
- [25] Burkschat, M. (2010). Linear estimators and predictors based on generalized order statistics from generalized Pareto distributions. *Commun. Statist.- Theory Meth.*, 39, 311-326.
- [26] Chandler, K.N. (1952). The distribution and frequency of record values. *Journal of the Royal Statistics Society, Series B*, Vol. 14, No. 2, 220-228.
- [27] Chansoo, K. and Keunhee, H. (2014). Bayesian estimation of Rayleigh distribution based on generalized order statistics. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 8, No. 150, 7475-7485.
- [28] David, H. A. (1970). *Order Statistics*, 1st edn, Wiley, New York.
- [29] David, H. A. (1981). *Order Statistics*, 2nd edn, Wiley, New York.
- [30] David H. A. and Nagaraja, H. N. (2003). *Order Statistics*, Third Edition. John Wiley, New York.
- [31] Drouet-Mari, D and Kotz, S. (2001). *Correlation and Dependence*. London: Imperial College Press.
- [32] Dziubdziela, W. and Kopocinski, B. (1976). Limiting properties of the k -th record value. *Applicationes Mathematicae*, 15, 187-190.
- [33] Edgeworth, F. Y. (1893). Statistical correlation between social phenomena. *J. R. Statist. Soc.*, 56, 670-675.
- [34] Feller, W. (1966). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. II, Wiley, New York.
- [35] Foster, F. G. and Stuart, A. (1954). Distribution free tests in time-series based on the breaking of records. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol 16, 1-13.
- [36] Gajek, L. and Gather, U. (1989). Characterizations of the exponential distribution by failure rate and moment properties of order statistics. *Extreme value theory, Lecture Notes in Statistics*, Springer, 51, 114-124

- [37] Galambos, J. (1978, 1987). The asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, Wiley, New York (1st ed), Kreiger, FL (2nd ed.).
- [38] Galton, F. (1902). The most suitable proportion between the values of first and second prized. *Biometrika*, 1, 385-390.
- [39] Gupta, A.K. (1952). Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample. *Biometrika*, 39, 260-273.
- [40] Hamedani, G. G., Javanshiri, Z., Maadooliat, M. and Yazdani, A. (2014). Remarks on characterizations of Malinowska and Szynal. *Applied Mathematics and Computation* 246, 377-388.
- [41] Hartley, H. O. and David, H. A. (1954). Universal Bounds for Mean Range and Extreme Observation *Ann. Math. Statist.* Volume 25, Number 1 , 85-99.
- [42] Hoeffding, W. (1940). Mastabinvariante Korrelations-Theorie. *Schriften Math. Inst. Univ. Berlin* 5, 187-233.
- [43] Jankowic, B. (2013). Kinetic modeling of native Cassava starch thermo-oxidative degradation using Weibull and Weibull-derived models. *Wiley Online Library, University of Belgrade*, 41-57.
- [44] Kamps U, (1995). A concept of generalized order statistics. B.G. Teubner, Stuttgart.
- [45] Kamps, U., Cramer, E., and Burkschat, M. (2003). Dual generalized order statistics. *Metron*, Vol 61, 13-26.
- [46] Khan, R. U. and Kumar, D. (2010). On moments of lower generalized order statistics from exponentiated Pareto distribution and its characterization. *Applied Mathematical Sciences*, Vol 4(55), 2711-2722.
- [47] Khan, R. U. and Kumar, D. (2011). Lower generalized order statistics from exponentiated gamma distribution and its characterization. *ProbStat Forum*, Vol 4, 25-38.
- [48] Khan, R. U. and Kumar, D. (2011). Expectation identities of lower generalized order statistics from generalized exponential distribution and a characterization. *Mathematical Methods of Statistics*, Vol 20(2), 150-157.
- [49] Khwaja, S. K. (2014). Expectation of ordered random variates and related results. *Aligarh-202002*, (India).
- [50] Kotb, M. A, Marwa, M. and Newer, H. A. (2013). Recurrence relations for single and product moments of lower generalized order statistics from general form of distributions and its characterizations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol 87(2), 229-247.
- [51] Kowalczyk, T. and Pleszczyńska, E. (1977). Monotonic dependence functions of bivariate distributions. *The Annals of Statistics*, Vol. 5, No. 6, 1221-1227.
- [52] Kowalczyk, T. (1994). A unified Lorenz-type approach to divergence and dependence. *Dissertationes Mathematicae CCCXXXV*, Polska Akademia Nauk.
- [53] Krajka, A and Szynal, D. (1992). Nonparametric functional characteristics of dependence. *C.R.Acad. Sci.Paris*, 315, Series I, pp. 1107-1112.
- [54] Krajka, A. and Szynal, D. (1994). On Q-covariance and its applications. *Proceedings of International Conference on Linear Statistical Inference LINSTAT'93*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 293-300, 1994.

- [55] Krug, J. and Jain, K. (2005). Breaking records in the evolutionary race, *Physica A* 358, 1–9.
- [56] Kumar, D. (2011). Recurrence relations for moments of k -th lower record values from exponentiated log-logistic distribution and a characterization, *International Journal of Mathematical Archive-2*, Vol 6, 813-819.
- [57] Kumar, D. (2013). Relations for marginal and joint moment generating functions of extended type I generalized logistic distribution based on lower generalized order statistics and characterization. *Tamsui Oxford Journal of Inf. and Math. Science*, 29(2), 219-238.
- [58] Kumar, D. (2014). Explicit Expressions for Moments of k -th lower record values from J-Shaped Distribution and a characterization. *Math. Sci. Lett*, 3, No 3, 237-241.
- [59] Kumar, D. (2016). Ratio and inverse moments of Marshall-Olkin extended Burr type XII distribution based on lower generalized order statistics. *Journal of Data Science* 14, 53-66.
- [60] Lin, G. D. (1986). On a moment problem. *Tôhoku Math. J.* 38, 595-598.
- [61] Llyod, E. H. (1952). Least Squares estimation of location and scale parameters using order statistics. *Biometrika*, 39, 88-95.
- [62] Malinowska, I., Szynal, D. (2008). On characterization of certain distributions of k -th lower (upper) record values. *Applied Mathematics and Computation*, 202, 338-347.
- [63] Mardia, K. V., Thomson, J. W. (1971). Unified treatment of moments-formulae. *Sankhyā A* 33, 121-132.
- [64] Minimol, S., Yageen, P. T. (2014). On characterization of Gompertz distribution by properties of generalized record values. *Journal of Statistical Theory and Applications*, Vol. 13. No. 1, 38-45.
- [65] Moldovanu, B. and Sela, A. (2001). The Optimal Allocation of Prizes in Contests. *The American Economic Review*, Vol. 91, No. 3, 542-558.
- [66] Moriguti, S. (1951). Extremal properties of extreme value distributions. *Ann. Math. Statist.* 22, 523-536.
- [67] Mohsin, M., Pilz, J. (2013). A recurrence relation of hypergeometric series through record statistics and characterization. *Appl. Math. Inf. Sci.* 7, No. 4, 1307-1310.
- [68] Nagaraja, H. N. (1978). On the Expected Values of Record Values. *Austral. J. Statist.* 20, 176-182.
- [69] Nelsen, R. B. (1991). *Copulas and associations*. Kluwert Academic Publishers, Dodrecht. North-Holland, Amsterdam, pp. 515–570.
- [70] Papathanasiau, V. (1990). Some characterization of distributions based on order statistics. *Statistics & Probability Letters* 9, 145-147.
- [71] Pawlas, P., Szynal, D. (1998). Relations for single and product moments of k th record values from exponential and Gumbel distributions, *J. Appl. Statist. Science* 7, 53-61.
- [72] Pawlas, P., Szynal, D. (2001). Recurrence relations for single and product moments of lower generalized order statistics from the inverse Weibull distribution. *Demonstratio Math.* 34(2), 353-358.
- [73] Pawlas, P., Szynal, D. (2003). On characterizations of distributions in terms of lower generalized order statistics. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 2(3, 4), 215-222.
- [74] Pawlas, P., Rychlik, T., Szynal, D. (2003). On a characterization of distributions by expectations of transformed generalized order statistics. *Demonstratio Math.*, 36(1), 239-245.

- [75] Pawlas, P., Malinowska, I., Szynal, D. (2005). Estimation of the parameters of Gumbel and Burr distributions in terms of k -th record values, *Applicaciones Mathematicae*, 32(4), 375-393.
- [76] Pawlas, P., Malinowska, I., Szynal, D. (2006). Estimation of location and scale parameters for the Burr XII distribution using generalized order statistics. *Linear Algebra and its Applications*, 417, 150-162.
- [77] Pawlas, P., Szynal, D. (2012). On a new measure of dependence and its applications. *Demonstratio Math.* XIV(2), 243-256.
- [78] Pawlas, P., Szynal, D. (2015). On a characterization of a power distribution. *Demonstratio Math.* 48(1), 100-106.
- [79] Pawlas, P. (2016). Characterization of distributions based on k -th lower record values. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 52(2), 139-148.
- [80] Pawlas, P., Szynal, D. (2016). Characterization of distributions via k -th upper record values. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 52(3), 149-157.
- [81] Pearson, K. (1902). Note on Francis Galton's difference problem. *Biometrika*, 1, 390-399.
- [82] Plackett, R. L. (1947). Limits of the ratio of mean range to standard deviation. *Biometrika*, 34, 120-122.
- [83] Puri, P. S. and Rubin, H. (1970). A characterization based on absolute differences of two i.i.d. random variables. *Ann. Math. Statist.*, 41, 2113-2122.
- [84] Rényi, A. (1959). Of measures of dependence. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 10, 441-451.
- [85] Resnick, S. I. (1973). Record values and related statistics. *Ann. Probab.* 2, 650- 662.
- [86] Rinne, H. (2006). *The Weibull Distribution*, Chapman and Hall/CRC.
- [87] Rodgers, J. L. and Nicewander, W. A. (1988). Thirteen ways to look at the correlation coefficient. *Amer. Statist.*, 42, 59-66.
- [88] Sibani, P. (2007). Linear response in aging glassy systems, intermittency and the Poisson statistics of record fluctuations. *Eur. Phys. J. B.* 58(4), 438-491.
- [89] Swanepoel, J. W. H Graan, F. C. (2002). Goodness-of-fit tests based on estimated expectations of probability integral transformed order statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.* 54, No. 3, 531-542.
- [90] Székeli, G. J. and Móri, T. F. (1985). An extremal property of rectangular distributions. *Statistics and Probability Letters* 3, 107-109.
- [91] Tavangar, M., Asadi, M. (2011). Some results on conditional expectations of lower record values. *Statistics*, Vol. 45, No. 3, 237-255.
- [92] Terrell, G. R. (1983). A characterization of rectangular distributions. *Ann. of Prob.* Vol. 11, No. 3, 823-826.
- [93] Wergen, G. and Krug, J. (2010). Record-breaking temperatures reveal a warming climate. *Europhys. Lett.* 92, 30008 (6pp.)
- [94] Wergen, G., Bogner, M. and Krug, J. (2011). Record statistics for biased random walks, with an application to financial data, *Phys. Rev. E* 83, 051109 (6pp.).

- [95] Zoraghi, N., Abbasai, B., Seyed, T. A. N. and Mechrzad, A. (2012). Estimating the four parameters of the Burr III distribution using a hybrid method of variable neighborhood search and iterated local search algorithms. *Applied Mathematics and Computation* 218, 9664-9675.

7 Bibliografia prac cytujących wyniki rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego.

Książki:

- {1}. Ahsanullah, M. (2004). *Record Values-Theory and Applications*. University Press of America.
- {2}. Ahsanullah, M.; Hamedani, G. G. (2010). *Exponential Distribution: Theory and Methods*. Book Series: Mathematics Research Developments.
- {3}. Ahsanullah, M., Nevzorov, V. P., and Shakil, M. (2013). *An Introduction to Order Statistics*. Paris, France: Atlantis Press.
- {4}. Ahsanullah, M., and V. B. Nevzorov (2015). *Records via Probability Theory*. Springer, Atlantis Press.
- {5}. Rinne, H. (2006). *The Weibull Distribution*. Chapman and Hall/CRC.

Czasopisma z bazy JRC:

- {6}. Abd El-Baset, A. Ahmad. (2012). Joint Moment Generating Functions of Nonadjacent Dual Generalized Order Statistics from Reflected Generalized Pareto Distributions. *Commun. Statist.- Theory Meth.*, Vol. 41, No. 15, 2762-2772.
- {7}. Aboelenen, Z. A. (2010). Inference for Weibull distribution under generalized order statistics. *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 81, No. 1, 26-36.
- {8}. Ahmad, Abd El-Baset A. (2008). Single and product moments of generalized order statistics from linear exponential distribution. *Commun. Statist.- Theory Meth.*, Vol. 37, No. 8, 1162-1172.
- {9}. Ahmad, Abd EL-Baset A. (2011). On Bayesian interval prediction of future generalized-order statistics using doubly censoring. *Statistics*, Vol. 45, No. 5, 413-425.
- {10}. Ateya, Saieed F., Ahmad, Abd El-Baset A. (2013). Inferences based on generalized order statistics under truncated Type I generalized logistic distribution. *Statistics*, Vol. 47, No. 1, 141-155.
- {11}. Ateya, Saieed F. (2013). Estimation under modified Weibull distribution based on right censored generalized order statistics. *Journal of Applied Statistics*, Vol. 40, No. 12, 2720-2734.
- {12}. Burkschat, M. (2010). Linear estimators and predictors based on generalized order statistics from generalized Pareto distributions. *Commun. Statist.- Theory Meth.*, 39, 311-326.
- {13}. Karimi, Z., Madadi, M., Rezapour, M. (2015). Non-linear Bayesian prediction of generalized order statistics for lifetime models. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, Vol. 6, No. 1, 153-162.
- {14}. Khan, A. H. and Khan, M. J. S. (2012). On ratio and inverse moment of generalized order

statistics from Burr distribution. *Pakistan Journal of Statistics*, Vol. 28, No. 1, 59-68.

{15}. Kumar, D. (2015). Exact moments of generalized order statistics from type II exponentiated log-logistic distribution, *Haceteppe Journal of Mathematics and Statistics*, Vol. 44 (3), 715-733.

{16}. Minimol, S., Thomas, P. Yageen. (2013). On some properties of Makeham distribution using generalized record values and its characterization. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, Vol. 27, No. 4, 487-501.

{17}. Mohsin, Muhammad; Pilz, Juergen. (2013). A Recurrence Relation of Hypergeometric Series Through Record Statistics and a Characterization. *Applied Mathematics and Information Science*, Vol. 7, No. 4, 1307-1310.

{18}. Nadarajah, S. (2010). Explicit expressions for moments of Pareto order statistics. *Quantitative Finance*, Vol. 10, No. 6, 585-589.

{19}. Zoraghi, N., Abbasai, B., Seyed, T. and Mechrzad, A. (2012). Estimating the four parameters of the Burr III distribution using a hybrid method of variable neighborhood search and iterated local search algorithms. *Applied Mathematics and Computation* 218, 9664-9675.

Czasopisama spoza bazy JRC:

{20}. Abushal, T. (2013). On Bayesian prediction of future median generalized order statistics using doubly censored data from type-I generalized logistic model. *Journal of Statistical and Econometric Methods*, Vol.2, No.1, 61-79.

{21}. Ahsanullah, M. (2004). A characterization of the uniform distribution by dual generalized order statistics. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Vol. 33, 2921-2928.

{22}. Ahsanullah, M. (2007). Some characterization of the power function distribution based on lower generalized order statistics. *Pakistan J. Statistics*, 23, 139-146.

{23}. Akhter, Z., Athar, H. (2015). On characterization of probability distributions through conditional expectation of generalized and dual generalized order statistics. *Pakistan Journal of Statistics*, Vol. 31, No. 2, 159-170.

{24}. Ali Mousa, M. A., Jaheen, Z. F., and Ahmed, A. A. (2002). Bayesian estimation, prediction and characterization for the Gumbel model based on records. *Statistics*, 36, 65-74.

{25}. Athar, H. and Faizan, M. (2011). Moments of Lower generalized Order Statistics from Power Function Distribution and its Characterization. *International Journal of Statistical Sciences*, Vol. 11, 125-134.

{26}. Bieniek, M. and Szynal, D. (2000). Limiting distributions of differences and quotients of successive k-th upper and lower record values. *Probability and Mathematical Statistics*, Vol. 20, 189-202.

{27}. Bieniek, M. and Szynal, D. (2002). Recurrence Relations for Distribution Functions and Moments of kth Record Values. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 111, No. 3, 3511-3519.

{28}. Bieniek, M. and Szynal, D. (2004). Characterizations based on k-th upper and lower record values. *Demonstratio Math.*, 37, No 2, 263-273.

{29}. Bieniek, M. and Szynal, D. (2007). On k-th record times, record values and their moments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 137, No 1, 12-22.

{30}. Blas, B., Russ, K. (2010). Understanding Markups in the open economy under Bertrand competition. *NBER WORKING PAPER SERIES*, 1-50.

- {31}. Chansoo, K. and Keunhee, H. (2014). Bayesian estimation of Rayleigh distribution based on generalized order statistics. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 8, No. 150, 7475 - 7485.
- {32}. Eldesoky, E. (2008). Recurrence relations for inverse and ratio moments of generalized order statistics from doubly truncated. *Statistica*, 68, 365-374.
- {33}. El-Din, M. M., Amein, M. M. (2015). Residual and Past Entropy for Concomitants of Ordered Random Variables of Morgenstern Family. *Journal of Probability and Statistics*, Vol. 2015, 6 pages.
- {34}. Ellah, A. H., Ahmad, A. and Fawzy, M. A. (2009). Recurrence relations for moment generating functions of generalized order statistics based on doubly truncated class of distributions. *J. Statist. Res. Iran*, 6, 209-230.
- {35}. Elshahat, M. A. T., Ismail, A. E. (2014). Quasi-likelihood estimation for inverse Weibull distribution. *International Journal of Mathematics and Statistics Studies*, Vol.2, No.2, pp. 54-63.
- {36}. Nassar, M. M. A., Fotouh, S. (2011). Estimation for the Parameters of the Weibull Extension Model Based on Generalized Order Statistics. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 6, No. 36, 1749 - 1760.
- {37}. Jabeen, R., Azaz Ahmad, A. Feroze, N. and Gilan, G. (2013). Estimation of Location and Scale Parameters of Weibull Distribution Using Generalized Order Statistics under Type II Singly and Doubly Censored Data. *International Journal of Advanced Science and Technology*, Vol. 55, 67-80.
- {38}. Jankowic, B. (2013). Kinetic modeling of native Cassava starch thermo-oxidative degradation using Weibull and Weibull-derived models. *Wiley Online Library, University of Belgrade*, 41-57.
- {39}. Khan, R. U., and Kumar, D. (2010). On moments of lower generalized order statistics from exponentiated Pareto distribution and its characterization. *Applied Mathematical Sciences*, Vol 4(55), 2711-2722.
- {40}. Khan, R. U., and Kumar, D. (2011). Lower generalized order statistics from exponentiated gamma distribution and its characterization. *ProbStat Forum*, Vol 4, 25-38.
- {41}. Khan, R. U., and Kumar, D. (2011). Expectation identities of lower generalized order statistics from generalized exponential distribution and a characterization. *Mathematical Methods of Statistics*, Vol 20(2), 150-157.
- {42}. Khan, R. U., and Khan, M. A. (2015). Dual generalized order statistics from family of J-shaped distribution and its characterization. *Journal of King Saud University - Science*, 27, 285-291.
- {43}. Kotb, M. S. (2013). Bayesian inference and prediction for modified Weibull distribution under generalized order statistics. *Journal of Statistics and Management Systems*, Vol. 17, No. 5-6, 547-578.
- {44}. Kotb, M. A, Marwa, M. and Newer, H. A. (2013). Recurrence relations for single and product moments of lower generalized order statistics from general form of distributions and its characterizations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol 87(2), 229-247.
- {45}. Kozan, A., Tanil, H. (2013). Bottom-k-Lists. *Journal of the Turkish Statistical Association*, Vol. 6, No. 2, 73-79.
- {46}. Kumar, D. (2011). Recurrence relations for moments of k-th lower record values from exponentiated log-logistic distribution and a characterization. *International Journal of Mathe-*

mathematical Archive-2, Vol 6, 813-819.

- {47}. Kumar, D. (2013) Recurrence relations for marginal and joint moment generating functions of generalized logistic distribution based on lower k record values and its characterization. *ProbStat Forum*, Vol. 5, 47-53.
- {48}. Kumar, D. (2013). Relations for marginal and joint moment generating functions of extended type I generalized logistic distribution based on lower generalized order statistics and characterization. *Tamsui Oxford Journal of Inf. and Math. Science* 29(2), 219-238.
- {49}. Kumar, D. (2013). Moment generating functions of lower generalized order statistics from generalized logistic distribution and its characterization. *Pacific Journal of Applied Mathematics*, Vol.5, 29-44.
- {50}. Kumar, D., Kulshrestha, A. (2013). Expectation Identities of Upper Record Values from Generalized Pareto Distribution and a Characterization. *Journal of Statistics Applications and Probability*, Vol. 2, No. 2, 115-121.
- {51}. Kumar, D. (2014). Explicit Expressions for Moments of k -th lower record values from J-Shaped Distribution and a characterization. *Math. Sci. Lett*, 3, No 3, 237-241.
- {52}. Kumar, D. (2014). On relations for the moments generating functions from the extended type II generalized logistic distribution based on k -th upper record values and a characterization. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS)* Vol. 7, No. 4, 257-271.
- {53}. Kumar, D. (2015). On the quotient moment of lower generalized order statistics and characterization. *JAMSI*, Vol. 11, No. 1, 73-89.
- {54}. Kumar, D., Jain, N. (2015). The Type I Generalized Half-Logistic Distribution Based on Upper Record Values. *Journal of Probability and Statistics*, Vol. 2015, 11 pages.
- {55}. Kumar, D. (2016). Ratio and inverse moments of Marshall-Olkin extended Burr type XII distribution based on lower generalized order statistics. *Journal of Data Science* 14, 53-66.
- {56}. Khwaja, S. K. (2014). Expectation of ordered random variates and related results. Aligarh-202002, (India).
- {57}. Mahmoud, M. A., Ghazal, G. M. (2012). Characterization of exponential family of distribution based on recurrence relations for generalized order statistics. *J. Math. Comput. Sci.* Vol. 2, No. 6, 1894-1908.
- {58}. Malinowska, I., Morris, K. W., Szynal, D. (2004). On Dual Characterizations of Continuous Distributions in Terms of Expected Values of Two Functions of Order Statistics and Record Values. *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 121, No.5, 2664-2673.
- {59}. Malinowska, I., Szynal, D. (2008). On characterization of certain distributions of k -th lower (upper) record values, *Applied Mathematics and Computation* 202, 338-347.
- {60}. Minimol, S., Yageen, P. T. (2014). On characterization of Gompertz distribution by properties of generalized record values. *Journal of Statistical Theory and Applications*, Vol. 13. No. 1, 38-45.
- {61}. Moghadam, M. S., Yaghmaei, F. (2012). Inference for Lomax Distribution under Generalized Order Statistics. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, No. 105, 5241 - 5251.
- {62}. Morris, K., Szynal, D. (2000). Goodness-of-fit tests based on characterizations of continuous distributions. *Applicationes Mathematicae*, 27, 4, 475-488.
- {63}. Morris, K., Szynal, D. (2005). Goodness-of-fit tests via record values. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 23 No. 4, 491-554.
- {64}. Morris, K., Szynal, D. (2008). Some U-Statistics in goodness-of-fit tests derived from

- characterizations via record values. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 46 No. 4, 339-414.
- {65}. Mohsin, M., Pilz, J. (2013). A recurrence relation of hypergeometric series through record statistics and characterization. *Appl. Math. Inf. Sci.* 7, No. 4, 1307-1310.
- {66}. Noor, F., Aslam, M. (2013). Bayesian inference of the inverse Weibull mixture distribution using type-I censoring. *Journal of Applied Statistics*, Vol. 40, 1076-1089.
- {67}. Saran, J., Pandey, A. (2005). Estimation of Parameters of A Two-Parameter Exponential Distribution and Its Characterization by K -th Record Values. *International Journal of Statistical Sciences*, Vol. 4, pp 1-12.
- {68}. Saran, J., Puskharna, N., Tiwari, R. (2015). Moment Properties of Generalized Order Statistics from Lindley Distribution. *Journal of Statistics Applications and Probability*, Vol. 4, No. 3, 429-434.
- {69}. Selim, M. and Salem, H. (2014). Recurrence Relations for Moments of k -th Upper Record Values from Flexible Weibull Distribution and a Characterization. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, Vol. 2, No. 3, 168-171.
- {70}. Tahmasebi, S., Jafari, A. (2015). Concomitants of Dual Generalized Order Statistics from Morgenstern Type Bivariate Generalized Exponential Distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, Vol. 14, No. 1, 1-12.
- {71}. Tavangar, M., Asadi, M. (2011). Some results on conditional expectations of lower record values. *Statistics*, Vol. 45, No. 3, 237-255.
- {72}. Yageen, T., Jerin, P. (2014). On generalized lower(k) record values from the Fréchet distribution. *J. Japan Statist. Soc.*, Vol. 44, No. 2, 157-178.

Piotr Pawlas