

Wielowymiarowe problemy singularnego sterowania stochastycznego na skończonym horyzoncie czasowym

Autor: Marcin Boryc
Promotor: Łukasz Kruk

Singularne sterowanie stochastyczne jest klasą problemów, w których można wpływać na dryf procesu Markowa, zwykle dyfuzji, ponosząc koszty proporcjonalne do wahania stosowanego sterowania. Dopuszczalne funkcje sterowania nie muszą być absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a i mogą posiadać skoki. Takie podejście jest naturalne w wielu praktycznych problemach, między innymi matematyki finansowej (znajdowanie optymalnego portfela), teorii kolejek czy sterowania statkami kosmicznymi.

Jednowymiarowe problemy singularnego sterowania stochastycznego są obecnie dobrze znane. W takim przypadku, jeśli funkcja kosztów bieżących jest wypukła, optymalnie sterowany proces staje się dyfuzją, odbitą od brzegu tak zwanego *obszaru niedziałania* $\mathcal{D}$. Dla dyfuzji ze współczynnikami niezależnymi od czasu i kosztami zdyskontowanymi, rozważanej na nieskończonym horyzoncie czasowym, $\mathcal{D}$ jest przedziałem, zaś funkcja wartości należy do klasy funkcji ciągłych wraz z drugą pochodną. Zarówno regularność C^2 funkcji wartości, jak i charakterystyka optymalnie sterowanego procesu jako dyfuzji z odbiciem, mają miejsce także w przypadku dwuwymiarowego ruchu Browna ([7]). W problemach wielowymiarowych znane są jedynie częściowe rezultaty. Dla przykładu, dla optymalnego sterowania ruchem Browna na nieskończonym horyzoncie czasowym została udowodniona regularność brzegu $\mathcal{D}$, oprócz „punktów narożnych” ([8]) oraz charakterystyka optymalnego sterowania jako rozwiązania odpowiednio zmodyfikowanego problemu Skorochoda ([4]).

W niniejszej pracy rozważamy n -wymiarowy problem singularnego sterowania stochastycznego na skończonym horyzoncie czasowym, w którym proces stanu jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego ze współczynnikami zależnymi od czasu, funkcja kosztów bieżących jest wypukła zaś funkcje sterowania mogą wpływać na proces stanu pchając go w dowolnym kierunku. Dokładniej, niech $T > 0$ będzie ustaloną liczbą reprezentującą horyzont czasowy i niech $W = (W_t, t \geq 0)$ będzie standardowym n -wymiarowym ruchem Browna adaptowanym do filtracji $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ spełniającej zwykle warunki, zdefiniowanej na zupełnej przestrzeni prawdopodobieństwa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Oznaczmy przez $\mathcal{V}$ zbiór wszystkich dopuszczalnych sterowań v , które są lewostronnie ciągłymi, adaptowanymi do filtracji $(\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$ procesami losowymi zdefiniowanymi na $[0, T]$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$, posiadającymi P -prawie pewnie ograniczone wahanie oraz takimi, że $v_0 = 0$ P -prawie pewnie. Tak jak zwyczajowo przyjęło się w teorii singularnego sterowania stochastycznego, dla $v \in \mathcal{V}$ piszemy $v_t = \int_0^t \gamma_s d\xi_s$, gdzie $|\gamma_t| = 1$ dla każdego $t \in [0, T]$ i ξ jest niemalejącym i lewostronnie ciągłym procesem.

Rozważmy proces stanu opisany przez stochastyczne równanie całkowe

$$y_{xt}(s) = x + \int_t^s \left(a(r)y_{xt}(r) + b(r) \right) dr + \int_t^s \sigma(r) dW_{r-t} + v(s-t), \quad s \in [t, T],$$

gdzie $t \in [0, T]$ jest czasem początkowym, $x \in \mathbb{R}^n$ jest początkowym stanem sterowanego procesu, $b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $a, \sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{n \times n}$ są w kolejności funkcją dryfu i funkcją kowariancji sterowanego procesu. Dla każdego sterowania $v \in \mathcal{V}$, definiujemy funkcjonal kosztów

$$J_{xt}(v) = \mathbb{E} \left\{ \int_t^T f(y_{xt}(s), s) e^{-\int_t^s \alpha(r) dr} ds + \int_t^T c(s) e^{-\int_t^s \alpha(r) dr} d\xi(s-t) \right\},$$

gdzie f , α i c są odpowiednio funkcją kosztów bieżących, czynnikiem dyskontującym oraz funkcją kosztów ponoszonych za jednostkę zużytego „paliwa”. Zakładamy wypukłość $f(x, t)$ względem x .

Naszym celem jest scharakteryzowanie optymalnego kosztu, tak zwanej funkcji wartości

$$u(x, t) = \inf \{J_{xt}(v) : v \in \mathcal{V}\}.$$

Jeśli powyższe infimum jest osiągnięte dla pewnego $v^* \in \mathcal{V}$, mówimy, że v^* jest optymalnym sterowaniem (dla danych t i x).

W pierwszej części pracy dowodzimy oszacowań na funkcję wartości u przy odpowiednich założeniach. Dzięki tym oszacowaniom można wnioskować, że funkcja wartości ma lokalnie ograniczone uogólnione pochodne drugiego rzędu względem argumentów przestrzennych i pierwszego rzędu względem argumentu czasowego. W konsekwencji, gradient Du funkcji wartości względem argumentów przestrzennych jest ciągły w sensie Höldera łącznie względem x i t . Te własności są niezbędne do rozważania funkcji wartości jako rozwiązania odpowiedniego równania Hamiltona- Jacobiego-Bellmana

$$\max \left\{ Au(x, t) - f(x, t), |Du(x, t)| - c(t) \right\} = 0$$

w pewnym uogólnionym sensie. Tutaj A jest parabolicznym operatorem różniczkowym danym wzorem

$$Au(x, t) = \frac{-\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\beta(t) \circ D^2u(x, t) - \left(a(t)x + b(t)\right) \circ Du(x, t) + \alpha(t)u(x, t),$$

gdzie $\circ$ oznacza iloczyn skalarny, odpowiednio, wektorów lub macierzy, zaś $\beta(t) = \sigma(t)\sigma^T(t)$. Idąc dalej, wykazujemy istnienie i jednoznaczność optymalnego sterowania v^* . Powyższe wyniki zostały opublikowane w pracy [1].

Druga część rozprawy poświęcona jest charakteryzacji optymalnego sterowania n -wymiarowym ruchem Browna w przypadku parabolicznym jako jednoznacznego rozwiązania odpowiedniego problemu Skorochoda dla obszaru niedziałania $\mathcal{D} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T] : |Du(x, t)| < 1\}$, zmieniającego się w czasie. Definiujemy pole wektorowe $\Gamma_t(\cdot) = -Du(\cdot, t)$. Niech $(x_0, 0) \in \overline{\mathcal{D}}$. Mówimy, że proces $v \in \mathcal{V}$, $v_t = \int_0^t \gamma_s d\xi_s$, jest rozwiązaniem zmodyfikowanego problemu Skorochoda dla ruchu Browna $\sqrt{2}W_t$ w zbiorze $\overline{\mathcal{D}}$, startującego z punktu x_0 , z kierunkiem odbicia Γ , jeśli

- (a) proces $X_t = x_0 + \sqrt{2}W_t + v_t$ spełnia $(X_t, t) \in \overline{\mathcal{D}}$ dla $t \in [0, T]$ P -prawie pewnie,
- (b) dla każdego $t \in [0, T]$, $\xi_t = \int_0^t \mathbb{I}[(X_s, s) \in \partial\mathcal{D}, \gamma_s = \Gamma_s(X_s)] d\xi_s$,
- (c) z prawdopodobieństwem 1, dla wszystkich $t \in [0, T]$, każdy skok procesu X w czasie t występuje na pewnym przedziale $I \subset \mathbb{R}^n$ równoległym do pola wektorowego Γ_t na I (tzn. dla każdego $x \in I$ $\Gamma_t(x)$ jest równoległy do I) oraz takiego, że $I \times \{t\} \subseteq \partial^*\mathcal{D} \cap (\mathbb{R}^n \times \{t\})$. Jeśli X_t napotyka taki przedział I , to wykonuje natychmiastowy skok na koniec tego przedziału w kierunku Γ_t na I .

Tutaj $\partial^*\mathcal{D}$ oznacza fragment brzegu zbioru $\mathcal{D}$, który jest brzegiem parabolicznym „bez spodu”.

Główne twierdzenie niniejszej pracy orzeka, że dla każdego punktu startowego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ takiego, że $(x_0, 0) \in \overline{\mathcal{D}}$, optymalne sterowanie v^* w rozważanym przez nas problemie jest rozwiązaniem zmodyfikowanego problemu Skorochoda dla ruchu Browna $\sqrt{2}W_t$ w zbiorze $\overline{\mathcal{D}}$, startującego z punktu x_0 , z kierunkiem odbicia Γ . Wynik ten jest analogiczny do głównego twierdzenia zawartego w pracy [4]. Rozwiązuje on, w rozważanym przez nas przypadku, pochodzący z lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku otwarty problem, dotyczący struktury optymalnego singularnego sterowania stochastycznego.

Problem Skorochoda dla obszarów zależnych od czasu był rozważany, między innymi, w [2, 3, 5, 6]. W wymienionych pracach występują restrykcyjne założenia dotyczące regularności brzegu obszaru oraz kierunków odbicia niezbędne do zagwarantowania istnienia rozwiązania rozważanego problemu Skorochoda. W naszym przypadku, regularność brzegu obszaru niedziałania jest nieznana, zaś założenia dotyczące zbioru $\mathcal{D}$ są ukryte w naturze problemu stochastycznego sterowania singularnego. Dlatego używamy bezpośredniego probabilistycznego podejścia, podobnego do zastosowanego w pracy [4]. Problem paraboliczny jest jednak zdecydowanie trudniejszy niż problem eliptyczny rozważany w [4], ponieważ zarówno funkcja wartości jak i obszar niedziałania zmieniają się w czasie. Stwarza to poważne trudności, których przewyciężenie stanowi istotną część niniejszej pracy.

Literatura

- [1] M. Boryc and Ł. Kruk, *A multidimensional singular stochastic control problem on a finite time horizon*, Annales UMCS, VOL. LXIX, No. 1, pp. 23-57, 2015.
- [2] K. Burdzy, Z.-Q. Chen, J. Sylvester, *The heat equation and reflected Brownian motion in time-dependent domains*, The Annals of Probability, Vol. 32, No. 1B, pp. 775-804, 2004.
- [3] K. Burdzy, W. Kang, K. Ramanan, *The Skorokhod problem in a time-dependent interval*, Stochastic Processes and their Applications, Vol. 119, Issue 2, pp. 428-452, 2009.
- [4] Ł. Kruk, *Optimal policies for n -dimensional singular stochastic control problems, Part I: The Skorokhod problem*, SIAM J. Control Optim., 38, No. 5, pp. 1603-1622, 2000.
- [5] K. Nyström, T. Önskog, *The Skorokhod oblique reflection problem in time-dependent domains*, The Annals of Probability, Vol. 38, No. 6, pp. 2170-2223, 2010.
- [6] M. Słaby, *Explicit solutions of the extended Skorokhod problems in time-dependent bounded regions with orthogonal reflection fields*, Probability and Mathematical Statistics, Vol. 33, Fasc. 1, pp. 121-148, 2013.
- [7] H. M. Soner and S.E. Shreve, *Regularity of the value function for a two-dimensional singular stochastic control problem*, SIAM J. Control Optim., 27, pp. 876-907, 1989.
- [8] S. A. Williams, P. L. Chow and J. L. Menaldi, *Regularity of the free boundary in singular stochastic control*, Journal of Differential Equations 111, pp. 175-201, 1994.