

Recenzja rozprawy doktorskiej

*Nowe własności wyznaczników macierzy prostokątnych
i ich interpretacja geometryczna*

napisanej przez Panią mgr Annę Makarewicz

Zgodnie ze swym tytułem rozprawa zawiera nowe własności wyznaczników macierzy prostokątnych i ich interpretację geometryczną, wyrażoną wzorami na objętość i pole wybranych figur geometrycznych.

Treść rozprawy. W rozdziale pierwszym zgromadzone zostały znane informacje o własnościach wyznaczników macierzy prostokątnych oraz możliwościach ich wykorzystania do wyznaczania pól i objętości. W pierwszej części rozdziału pierwszego (podrozdział 1.1) Autorka podaje oryginalną definicję Cullisa-Radicia wyznacznika macierzy prostokątnej (definicje 1.1, 1.2), definicję 1.4, równoważną z definicją oryginalną i nierównoważną z oryginalną definicją 1.3, 1.5, 1.6, wspominając jeszcze o kilku innych definicjach. W dalszej części rozdziału pierwszego (podrozdział 1.2) znajdujemy zebrane własności wyznacznika macierzy prostokątnej, pokrywające się z własnościami zwykłego wyznacznika. W podrozdziale 1.2 podane też zostało (między innymi) twierdzenie Cullisa o zmianie znaku wyznacznika, gdy w wyjściowej macierzy odwrócimy kolejność wierszy, kolumn lub wierszy i kolumn jednocześnie i wzór na wyznacznik iloczynu macierzy:

$$\det AB = \det A \det B,$$

w którym A jest macierzą kwadratową.

Zadziwiająco uboga jest treść ostatniej części rozdziału pierwszego (podrozdział 1.3). Nie jest to winą Autorki tylko istniejącego stanu rzeczy. Rozważano bowiem tylko macierze typu $2 \times n$ (pola wielokątów). Natomiast w przypadku dowolnej przestrzeni $\mathbb{R}^m$ znaleziono tylko (eleganckie) wzory na objętość sympleksu i dwóch typów wielościanów. Szkoda tylko, że z podanych na stronie 16 informacji trudno wywnioskować o jakie wielościany chodzi.

W rozdziale drugim znajdujemy trzynaście twierdzeń i dwa lematy. Twierdzenie 2.1 jest cytatem z pracy Radicia [16], z roku 2005. Pozostałe twierdzenia i lematy są dziełem Autorki rozprawy. Twierdzenie 2.2 jest uogólnieniem twierdzenia 2.1 na macierze dowolnego typu $m \times n$, gdzie $m \leq n$. W twierdzeniu 2.1 mamy $m = 2$.

Twierdzenia 2.1-2.4 prezentują sposoby wyznaczania wyznacznika macierzy typu $m \times n$ za pomocą kombinacji liniowej wyznaczników macierzy kwadratowych typu $m \times m$.

Twierdzenia 2.5, 2.6 prezentują sposoby wyznaczania wyznacznika macierzy typu $m \times n$, gdy jedna z kolumn tej macierzy, powiedzmy kolumna A_k , jest wektorem postaci

$$A_k = \sum_{i=1}^d s_i K_i, \text{ gdzie } s_i \in \{-1, 1\}, K_i \in \mathbb{R}^m \text{ dla } i = 1, 2, \dots, d.$$

Twierdzenie 2.7 podaje sposób obliczenia wyznacznika macierzy typu $m \times n$ za pomocą wyznacznika odpowiedniej macierzy typu $m \times (n-1)$.

Z kolei z twierdzenia 2.8 dowiadujemy się, że jeżeli w macierzy typu $m \times (m+1)$ zamienimy miejscami dwie dowolne kolumny, to wyznacznik zmieni znak. Twierdzenie 2.9 jest przeniesieniem twierdzenia 2.8 na macierze dowolnego typu $m \times n$, gdzie $m \leq n$. Wymagało to jednak wprowadzenia dodatkowych oznaczeń i operacji, a otrzymany wzór na wyznacznik macierzy powstałej w wyniku zamiany miejscami dwóch kolumn nie jest już tak prosty jak w poprzednim przypadku.

Pozostałe twierdzenia 2.10-2.13 oraz lematy 2.1, 2.2 dotyczą bardziej szczególnych zagadnień i w związku z tym pominę ich szczegółowy opis. W każdym razie dowiedzione w rozdziale własności wyznacznika są przydatne w trakcie obliczania wyznaczników macierzy prostokątnych, a te do uzyskania wzorów na objętości lub pola figur geometrycznych rozważanych w następnym rozdziale.

Rezultaty otrzymane w rozdziale drugim umożliwiły podanie sposobów obliczania objętości: ostrosłupów czworokątnych i ośmiościanów (podrozdział 3.1) oraz równoległoscianów o podstawie równoległoboku, graniastoslupów trójkątnych i ostrosłupów trójkątnych (podrozdział 3.2) w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Warto przy tym wspomnieć, że uzasadnienia podawanych wzorów wymagały jeszcze sporo wysiłku. Kończący rozprawę podrozdział 3.3 pozwala odpocząć po lekturze dwóch pierwszych podrozdziałów. Znajdujemy w nim jeden wzór na pole trójkąta i dwa wzory na pole równoległoboku w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Usterki redakcyjne

1. Ostatni wzór na stronie 9 należy poprawić, bo nie pasuje nawet do macierzy typu 2×2 .
2. Treści ostatniego zdania na stronie 12 trzeba się domyślać, bo zdanie jest długie i niedokończone.
3. Na stronie 16 w wierszach 9 i 10 od góry powinno być, odpowiednio $m \times (m+1)$, gdzie $m \geq 3$ i $\mathbb{R}^m$ zamiast $\mathbb{R}^3$.
4. W wypowiedzi twierdzenia 2.3 powinno być $\det A$ zamiast $|A|$.

Ocena. Pomimo zauważonych usterek uważam, że rozprawa jest zredagowana wystarczająco starannie i czytelnie. Natomiast na zawartość rozprawy spróbuję spojrzeć z dwóch punktów widzenia

Punkt 1. Można mieć wątpliwości dotyczące znaczenia tematyki rozprawy. Treść rozprawy i stosowane metody można określić mianem "elementarne". Uzyskane wyniki są nowe, ale nie można powiedzieć, że są wybitne.

Punkt 2. Uogólnianie wszystkiego jest w matematyce zjawiskiem naturalnym i pożądanym, chociaż efekty mogą być rozmaite. W początkowej fazie swego rozwoju pojęcia miary, całki, czy pochodnej wyglądały dość mizernie. Nie potrafię wykazać, że zajmowanie się wyznacznikiem macierzy prostokątnych jest zajęciem jałowym.

W teorii gier różniczkowych jest wiele problemów, których zrozumienie nie wymaga

znajomości matematyki, a których nikt nie potrafi rozwiązać. Elementarne i bardzo proste rozwiązanie gry "Lew i Człowiek na Arenie" znalazł wybitny matematyk Abram Samojłowicz Bezikowicz.

Jeżeli porównamy własne prace z pracami wybitnych matematyków, to nasze nie będą wybitne. Dlatego rozprawę mogę porównywać tylko z osiągnięciami innych matematyków, zajmujących się tą dziedziną. W tej konfrontacji rozprawa wypada całkiem nieźle.

Konkluzja. Moim zdaniem, rozprawa doktorska spełnia ustawowe warunki stawiane pracom doktorskim z matematyki. Wnioskuje o dopuszczenie Pani mgr Anny Markiewicz do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Witold Rzymowski

