

Dr hab. Zbigniew Pasternak-Winiarski
Profesor Politechniki Warszawskiej
Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa

Warszawa 22 sierpnia 2016 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Anny Makarewicz
*Nowe własności wyznaczników macierzy prostokątnych i ich
interpretacja geometryczna*

Głównym celem omawianej rozprawy jest przedstawienie wyników badań wykonanych przez jej autorkę a dotyczących własności wyznaczników Cullisa-Radicia macierzy prostokątnych. Choć rozpatrywana w rozprawie definicja wyznaczników została podana przez C. E. Cullisa ponad sto lat temu (1913), to okazuje się, że wiele algebraicznych i geometrycznych własności takich wyznaczników było do tej pory nieznanymi, przynajmniej w takiej ogólności. Trzeba tu zaznaczyć, że choć definicja Cullisa-Radicia jest uogólnieniem zwykłej definicji wyznacznika macierzy kwadratowej, to wiele własności znanych z przypadku "kwadratowego" rozszerza się w sposób nietrywialny i autorka wiele takich własności znalazła. Ogólnie dziedzina rozprawy, choć nie leży w głównym nurcie badań współczesnej algebry czy geometrii, to jest żywa i w literaturze matematycznej ukazują się prace na jej temat (część z nich autorka wymieniła w Bibliografii – ostatnią z 2015 roku).

Praca ma 74 strony, zaopatrzona jest we *Wstęp* i podzielona na trzy rozdziały. Pierwszy z nich ma charakter wprowadzający i zawiera przegląd dotychczasowej wiedzy na temat wyznaczników macierzy prostokątnych. Są tu przytoczone różne znane z literatury definicje takich wyznaczników oraz te własności algebraiczne wyznaczników Cullisa-Radicia, które były ustalone przed powstaniem rozprawy. Są tu też informacje na temat znanych interpretacji geometrycznych takich wyznaczników.

Rozdział drugi będący główną częścią pracy (37 stron) zawiera przedstawienie i dowody tych algebraicznych własności wyznaczników Cullisa-Radicia, które odkryła autorka. Są to przedstawienia wyznacznika za pomocą sum prostszych obiektów (Twierdzenia 2.1-2.7), wzory na zmianę wyznacznika gdy zamienimy kolejność kolumn (Twierdzenia 2.8-2.10) oraz twierdzenia o zmianie wyznacznika przy powielaniu kolumn macierzy (Twierdzenia 2.11-2.13).

Rozdział trzeci jest poświęcony przedstawieniu nowych wyników na temat interpretacji geometrycznej wyznacznika macierzy prostokątnej. Okazuje się, że jeżeli kolumny macierzy wymiaru $3 \times n$ są wierzchołkami i ewentualnie pewnymi innymi punktami różnych brył w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, to moduły wyznaczników (lub ich wielokrotności) są objętościami tych brył (Twierdzenia 3.1-3.3 i następujące po nich wnioski). Wyznaczników

macierzy wymiaru 2×3 i 2×4 można też używać do wyznaczenia pól trójkąta i równoległoboku odpowiednio (Twierdzenia 3.4 i 3.5).

Przedstawione w pracy wyniki ilustrowane są sporą ilością przykładów. Dowody twierdzeń i lematów są poprawne. Polegają one głównie na pokazywaniu różnych równości metodą żmudnych przekształceń algebraicznych (szczególnie wyróżniają się pod tym względem dowody Lematów 2.1 i 2.2 gdzie trzeba rozpatrywać dużą liczbę przypadków). Nie trzeba w nich korzystać z żadnych zaawansowanych wyników z innych dziedzin matematyki poza algebrą liniową i kombinatoryką. Nie znaczy to jednak, że nie byłyby potrzebne różne pomysły aby rozumowania skrócić albo w ogóle przeprowadzić. Podotrzebna też była intuicja aby przewidzieć jaką końcową postać powinien mieć wynik danego rozumowania.

Generalnie praca świadczy o tym, że jej autorka posiada zdolność prowadzenia badań i rozwiązywania problemów naukowych w zakresie matematyki. Posługuje się przy tym swobodnie pojęciami i metodami z dziedziny, w ramach której pracuje. W swoich rozważaniach odnosi się do innych publikacji mających związek z tematyką badań, a korzystając z przedstawionych tam metod i rezultatów zaznacza to wyraźnie w tekście rozprawy.

Rozprawa jest przygotowana starannie pod względem edytorskim i redakcyjnym, choć nie jest wolna od drobnych usterek. Już w Definicji 1.1 jest nieścisłość przy określaniu symbolu I . Brakuje też czegoś w ostatnim zdaniu na str. 7. Na szczęście usterki dają się stosunkowo łatwo usunąć i nie mają istotnego wpływu ani na prawdziwość przedstawionych wyników ani na ogólny poziom rozprawy. Swoje szczegółowe uwagi na ten temat przekazałem bezpośrednio autorce.

W rezultacie pragnę stwierdzić, że praca mgr Anny Makarewicz stanowi wartościowy wkład do badań w zakresie algebry liniowej oraz związanych z nią zagadnień geometrycznych, zawierając oryginalne rozwiązania problemów mających znaczenie w tej teorii. Świadczy też o tym fakt, że większość istotnych wyników zawartych w rozprawie została opublikowana lub skierowana do publikacji w czasopiśmie naukowych. Uważam, że rozprawa jest świadectwem solidnej wiedzy autorki i jej zdolności do pracy twórczej.

Konkluzja Uważam, że praca mgr Anny Makarewicz spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim z dziedziny matematyki i wnioskuję o skierowanie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Zbigniew Pasternak-Winiarski