Autoreferat

1. Imię i nazwisko: **Marcin Wolski**
2. Posiadane stopnie i tytuły naukowe:

   1997: magisterium z filozofii (specjalność: nauki o poznaniu i komunikacji), Wydział Filozofii i Socjologii, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej;

   2003: doktorat z filozofii, Wydział Filozofii i Socjologii, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej.

   Rozprawa doktorska: *Dynamics of Cognitive States and Its Context Logic. Beliefs with Non-Standard Content* (Pierwsza Nagroda im. Klemensa Szaniawskiego za najwybitniejsze prace doktorskie w dziedzinie nauk społecznych i humanistycznych przyznawana przez Towarzystwo Krzewienia Nauk oraz Fundację Batorego).

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

   od 2003 Adiunkt w Zakładzie Logiki i Filozofii Nauki (poprzednia nazwa: Zakład Logiki i Metodologii Nauk), Wydział Filozofii i Socjologii, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej;

   1997 – 2003 Asystent w Zakładzie Logiki i Metodologii Nauk, Wydział Filozofii i Socjologii, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej;

4. Wykazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595):

   (*a*) tytuł osiągnięcia naukowego:

Reprezentacja i Przetwarzanie Wiedzy w Ujęciu Teorii Zbiorów Przybliżonych

–Analiza Operatorów Aproksymacji Pojęć–

(b) autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, nazwa wydawnictwa, rok wydania:

Rozprawa habilitacyjna składa się z jednotematycznego cyklu 8 publikacji, w którego skład wchodzą następujące artykuły:

i. Marcin Wolski: Galois connections and data analysis. Fundamenta Informaticae 60, 401–415 (2004)
ii. Marcin Wolski: Information quanta and approximation operators: once more around the track. Transactions on Rough Sets 8. Lecture Notes in Computer Science 5084, Springer, 237–250 (2008)
iii. Marcin Wolski: Distance measures induced by finite approximation spaces and approximation operators. Fundamenta Informaticae 85 (1), 497–512 (2008)
iv. Marcin Wolski: Rough set theory: ontological systems, entailment relations and approximation operators. Transactions on Rough Sets 10. Lecture Notes in Computer Science 5656, Springer, 1–14 (2009)
v. Marcin Wolski: Perception and classification. A note on near sets and rough sets. Fundamenta Informaticae 101 (1-2), 143–155 (2010)
vi. Marcin Wolski: Monadic algebras: a standpoint on rough sets. Fundamenta Informaticae 108 (3-4), 181–196 (2011)
vii. Marcin Wolski: Incomplete and nondeterministic information systems: object-directed semantics for descriptor languages. Fundamenta Informaticae 109 (3), 355–368 (2011)
viii. Marcin Wolski: Granular computing: topological and categorical aspects of near and rough set approaches to granulation of knowledge. Transactions on Rough Sets 16. Lecture Notes in Computer Science 7736, Springer, 34–52 (2013)

Spis treści

Rozdział 1

Omówienie cyklu publikacji stanowiących rozprawę

1.1 Wprowadzenie: kontekst badań

Reprezentacja i przetwarzanie wiedzy są przedmiotem intensywnych multidyscyplinarnych badań (np.: informatyka, psychologia, nauki kognitywne, filozofia), a historia tych badań jest bardzo długa i sięga czasów starożytnych (w szczególności prac Arystotelesa na temat poprawności rozumowań oraz metodologii nauk). W konsekwencji, literatura dotycząca reprezentacji wiedzy jest „niezliczona" i już na samym wstępie należy zawęzić zakres tematyki poruszanej w niniejszej rozprawie. Zatem, odkładając na bok tę bardzo bogatą historię oraz różne rozstrzygnięcia dotyczące wiedzy i jej formalnego opisu, głównym tematem rozprawy jest reprezentacja i przetwarzanie wiedzy w ujęciu teorii zbiorów przybliżonych, matematycznej metody analizy danych wprowadzonej w latach osiemdziesiątych przez polskiego matematyka Z. Pawlaka [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72]. Rozpatrując główne cele sztucznej inteligencji Z. Pawlak konkluduje [70]:

> *Dlatego często przyjmuje się skromniejszy cel. Według tego poglądu głównym celem sztucznej inteligencji jest opracowanie programów, które pozwolą maszynie (robotowi, automatowi) zachować się celowo w otoczeniu, lub mówiąc inaczej – opracowanie programów, pozwalających na rozwiązywanie możliwie szerokiej klasy konkretnych problemów związanych z analizą danych otrzymanych z otoczenia – i odpowiednie reagowanie na ich podstawie celem rozwiązania określonego zadania.*

Warto podkreślić aplikacyjny charakter postawionych celów: nie chodzi tutaj o filozoficzną czy psychologiczną adekwatność programów czy struktur (np. symulacja zachowań ludzi czy modelowanie pracy mózgu), ale o ich użyteczność. W przeciwieństwie do typowych podejść w naukach kognitywnych, logice i filozofii, gdzie cele są „ambitne", a aplikacje służą jedynie jako ilustracja abstrakcyjnych pojęć (tak jak np. w [20, 53, 92]), Z. Pawlak sugeruje cele „skromniejsze": metody i struktury analizy danych mające praktyczne zastosowania – warto przypomnieć w tym miejscu, że to właśnie aplikacje zdecydowały o światowym sukcesie teorii zbiorów przybliżonych.

Do rozwiązywania szerokiej klasy problemów nie wystarczą oczywiście „gołe” dane czy też informacja (np. sygnały dochodzące do robota). Potrzebna jest jeszcze wiedza umożliwiająca „rozumienie” świata (np. interpretację sygnałów w kontekście danego problemu), która dodatkowo musi być odpowiednio reprezentowana, zapisana i przechowywana w pamięci robota/komputera. Ponieważ celem jest automatyczne rozwiązywanie problemów, wiedza ta również powinna być odkrywana automatycznie, co w konsekwencji rozszerza tematykę reprezentacji i przetwarzania wiedzy na intensywnie rozwijające się nowe dziedziny informatyki takie jak odkrywanie wiedzy z danych KDD (*knowledge discovery in databases*) oraz eksploracja danych (*data mining*), np. [41, 39, 79, 80]. Oczywiście wszystkie wymienione terminy takie jak *wiedza*, *informacja*, *dane* nie są jednoznaczne i mają różne interpretacje w poszczególnych dziedzinach nauki. Jak zauważa Z. Pawlak [70]:

> *Chociaż na tematy te ukazuje się olbrzymia liczba publikacji* [...] *to jednakże pogląd na to co to jest wiedza i jak ją należy reprezentować nie jest sprawą zbyt jasną i brak jest jednolitych poglądów na stan, cele i metody tej dziedziny.*

Dlatego, zgodnie z metodologią „skromniejszych” celów, również terminy *dane*, *informacja* i *wiedza* będą rozumiane „skromniej”. Zazwyczaj *dane* to fakty (dotyczące danego zbioru obiektów) zapisane w postaci rekordów w bazie danych; *informacja* rozumiana jest jako *znaczenie* tych danych, które z kolei może być explicite wyrażone przez dane (np. adres czy numer dowodu osobistego), bądź uzyskiwane jest w wyniku wstępnego przetworzenia danych (np. waga pacjenta 150 kg jest etykietowana jako nadwaga i w takiej postaci dalej przetwarzana). Natomiast *wiedza* to zazwyczaj szerszy model (struktura matematyczna) – oparty na danych/informacji – pozwalający widzieć ukryte związki między danymi. Podział na dane, informację oraz wiedzę nie jest jednak jednoznaczny i te terminy używane są często zamiennie (nawet w literaturze dotyczącej zbiorów przybliżonych).

Niniejsze opracowanie dotyczy teorii zbiorów przybliżonych, a w szczególności oferowanych w niej metod reprezentacji i przetwarzania wiedzy. Teoria zbiorów przybliżonych została wprowadzona przez Z. Pawlaka w latach osiemdziesiątych [64, 65, 66] i była rozwijana przede wszystkim jako matematyczna metoda reprezentacji i przetwarzania pojęć „nieścisłych”, tj. pojęć niedefiniowalnych w kontekście danej wiedzy [67, 68, 69, 70, 72]. Z tego względu pierwotnie była badana w perspektywie teorii zbiorów rozmytych, np. [9, 10, 106, 108, 129], a później rozpatrywana jako metoda rozumowania w warunkach informacji niepewnej, np. [30, 31, 36, 60, 110, 111]. Natomiast dzisiaj teoria zbiorów przybliżonych – intensywnie rozwijana od ponad 30 lat – jest szeroko stosowaną metodologią pozwalającą informatykom na podjęcie współczesnych wyzwań związanych z reprezentacją i przetwarzaniem wiedzy, takich jak obliczenia granularne, np. [4, 37, 73, 99, 100, 101, 103, 104, 107, 109], czy też obliczenia interakcyjne, np. [24, 25, 26, 109, 124].

Punktem wyjścia teorii zbiorów przybliżonych jest system informacyjny. Samo pojęcie, choć wydaje się bardzo elementarne, ma swoją interesującą historię. W latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych prace dotyczące reprezentacji obiektów i informacji o nich były prowadzone m.in. przez E. Orłowską i Z. Pawlaka (np. [57, 58]), V. Marka i Z. Pawlaka (np. [48, 49, 50, 51]), W. Lipskiego (np. [43, 44]) oraz Z. Pawlaka [63, 65]. Nad podobną reprezentacją także w latach osiemdziesiątych pracował R. Wille, twórca formalnej analizy pojęć [125, 126] – teorii mającej bardzo bliskie pokrewieństwo z teorią zbiorów przybliżonych. Nawet dzisiaj to pojęcie jest dalej rozwijane i modyfikowane; na przykład w teorii zbiorów przybliżonych opartych na relacji dominacji (*dominance-based rough sets*) wprowadzonej przez R. Słowińskiego, np. [112, 113, 114, 115], wartości atrybutów są dodatkowo uporządkowane, co pozwala na identyfikację nieścisłości ukrytych w danych, które nie są wykrywalne w pierwotnym modelu.

System informacyjny jest to struktura $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$, gdzie:

- U jest niepustym skończonym zbiorem obiektów;
- Att jest niepustym skończonym zbiorem atrybutów;
- $Val = \bigcup_{A \in Att} Val_A$, gdzie Val_A jest zbiorem wartości A oraz $Val_A \cap Val_B = \emptyset$, dla atrybutów $A, B \in Att$, takich że $A \neq B$;
- $inf : U \times Att \to Val$ jest funkcją informacyjną, taką że dla każdego atrybutu $A \in Att$ oraz obiektu $x \in U$ zachodzi $inf(x, A) \in Val_A$.

Gdy inf jest funkcją częściową, wtedy system informacyjny jest *niezupełny*. Natomiast gdy przeciwdziedziną inf jest zbiór potęgowy $\mathscr{P}Val$ zbioru wartości atrybutów bez zbioru pustego $\emptyset$ (tj. $\mathscr{P}Val \setminus \{\emptyset\}$), wtedy taki system jest *niedeterministyczny*. Gdy z kolei w niedeterministycznym systemie funkcja inf jest częściowa, wtedy mamy do czynienia z *niezupełnym* i *niedeterministycznym* systemem informacyjnym.

Mieszkanie	**Cena**	**Pokoje**	**Garaż**	**Widok z okna**
F1	Umiarkowana	4	Tak	Ładny
F2	*	*	Tak	Brzydki
F3	*	3,4	*	Ładny
F4	*	*	*	Ładny
F5	Niska	3	Nie	Ładny

Rysunek 1.1: Niezupełny i niedeterministyczny system informacyjny

Zwykle system informacyjny reprezentowany jest w postaci tablicy danych. Rysunek 1.1 przedstawia bardzo prostą tablicę danych, mającą 5 obiektów oraz 4 atrybuty. System ten jest niezupełny (brakujące wartości oznaczone są jak zwykle przez $*$) i niedeterministyczny. Tablica jest już wstępnie przetworzona, np. ceny są pogrupowane (aby „poprawić” analizę danych, często pierwszym krokiem analizy jest wstępna dyskretyzacja liczbowych wartości atrybutów). W ogólnym przypadku, interpretacja danych (nadawanie semantyki) zawsze zakłada jakąś regułę porównywania wartości

Klasyczna Teoria Zbiorów Przybliżonych
$\Downarrow$
Reguła Nieodróżnialności
Jeżeli x oraz y są nieodróżnialne przez atrybuty warunkowe,
to x oraz y powinny być nieodróżnialne przez atrybuty decyzyjne.

Dominacyjna Teoria Zbiorów Przybliżonych
$\Downarrow$
Reguła Dominacji
Jeżeli x dominuje nad y na atrybutach warunkowych,
to x powinno dominować nad y na atrybutach decyzyjnych.

Rysunek 1.2: Reguły interpretacji oraz klasyfikacji

atrybutów. W przypadku teorii zbiorów przybliżonych ta reguła oparta jest na identyczności tych wartości. Porównując wartości atrybutów definiujemy również pewne relacje między obiektami. Podstawową relacją w teorii zbiorów przybliżonych jest relacja *nieodróżnialności*, będąca relacją równoważności:

$$E = \{(x,y) : \forall A \in Att\ (inf(x,A) = inf(y,A))\},$$

która w klasycznym przypadku jest indukowana przez zupełny i deterministyczny system informacyjny (U, Att, Val, inf). Aby podkreślić system informacyjny, który indukuje relację nieodróżnialności E, zwykle będziemy pisać $IND(\mathscr{I})$ zamiast E (lub $E = IND(\mathscr{I})$). Jeżeli założymy, że zbiór wartości każdego atrybutu $A \in Att$ jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych, wtedy możemy wprowadzić również relację dominacji D [28, 112, 113, 114, 115]:

$$D = \{(y,x) : \forall A \in Att\ (inf(x,A) \leq inf(y,A))\},$$

którą czytamy jako *y dominuje nad x*. Warto podkreślić, że mamy tutaj do czynienia z dwiema różnymi regułami interpretacji danych (Rys. 1.2).

Jeżeli w systemie informacyjnym wyróżnione są dwa rozłączne zbiory atrybutów $C \subseteq Att$ (atrybuty warunkowe) i $D \subseteq Att$ (atrybuty decyzyjne), wtedy taki system zwany jest *tablicą decyzyjną* [67]. Rysunek 1.1 mógłby przedstawiać taką tablicę decyzyjną gdyby rozważać liczbę pokoi, posiadanie garażu oraz widok z okna jako atrybuty warunkowe, a cenę mieszkania jako atrybut decyzyjny. Sumując powyższe rozważania otrzymujemy zarówno reguły interpretacji danych, jak i klasyfikacji obiektów – tak jak przedstawia to Rys. 1.2.

Ogólnie mówiąc, wiedza wiąże się z modelem pozwalającym na widzenie ukrytych związków między danymi. W teorii zbiorów przybliżonych oraz w formalnej analizie pojęć takim modelem jest pewna struktura *pojęć*, którą można w oparciu o zebrane informacje (tablicę danych) zbudować. W najprostszym przypadku taką strukturą jest zbiór; często używa się także krat oraz topologii. Natomiast *pojęcie* to zbiór obiektów, który jest domknięty ze względu na pewne operatory wiedzy. Oczywiście, operatory wiedzy muszą być zdefiniowane w oparciu o wyżej wprowadzone relacje między obiektami.

Warto teraz uporządkować terminologię, która jest tutaj używana. Upraszczając nieco zawiłości filozoficzne, *pojęcie* to znaczenie nazwy (predykatu), która z kolei jest wyrażeniem (określonej kategorii składniowej) jakiegoś języka. Niestety znaczenie terminu „znaczenie”, jak zauważa H. Putnam [86, 87], przysparza bardzo wielu trudności. W tradycyjnej teorii znaczenia rozróżnia się *intensję* oraz *ekstensję* nazwy, czyli *sens* i *odniesienie*. Ekstensja (w przeciwieństwie do intensji) nie stwarza wielkich filozoficznych kłopotów i oznacza zbiór przedmiotów, do których nazwa jest poprawnie odnoszona. Natomiast intensja jest już filozoficznie problematyczna. Dzisiaj zwykle oznacza zbiór (wspólnych) cech przedmiotów, do których nazwa się odnosi. Niemniej, w zależności od stanowiska filozoficznego, intensja może również oznaczać umysłowy odpowiednik nazwy (znaczenie jest wtedy bytem mentalnym), albo funkcję przyporządkowującą nazwie jej ekstensję we wszystkich światach możliwych – dokładniejszą analizę można znaleźć np. w [12, 86, 87]. Ogólny i tradycyjny schemat jest następujący: każda nazwa jest (semantycznie) związana z *intensją* (sensem), która określa warunki przynależności do *ekstensji* (odniesienia) tej nazwy. Zatem rozumienie nazwy (znajomość jej znaczenia) w praktyce polega na zdolności odróżnienia ekstensji od anty-ekstensji, lub – ujmując rzecz w nowszej terminologii – na zdolności klasyfikowania obiektów. Ponieważ w ostateczności i tak chodzi o ekstensję, w najprostszym podejściu znaczenie nazwy (pojęcie) to jego ekstensja. Takie stanowisko zwykle przypisywane jest, np. przez D. Chalmersa [12], J. S. Millowi [54] oraz N. Salmonowi [94]. Jak wspominaliśmy, w teorii zbiorów przybliżonych pojęciem jest

Intensja: (wspólne) cechy lub własności obiektów, do których odnosi się nazwa

znaczenie

Nazwa

znaczenie

Ekstensja: obiekty, do których nazwa się poprawnie odnosi

Rysunek 1.3: Nazwa i jej znaczenie

zbiór obiektów, czyli (w perspektywie powyższych rozważań) ekstensja. Zatem teoria zbiorów przybliżonych reprezentuje stanowisko bliskie J. S. Millowi i N. Salmonowi. Przypomnijmy również, że według Z. Pawlaka

> *wiedzę na określony temat utożsamiamy z umiejętnością klasyfikowania obiektów* [70].

Zatem, wiedzę utożsamiamy z pewną strukturą pojęć (znaczeń) rozumianych jako (redukowanych do) ekstensja(i). Warto wspomnieć, że w formalnej analizie pojęć [125, 126] bierze się pod uwagę również intensję i pojęcie, wciąż rozumiane jako znaczenie nazwy/predykatu, ma dwa komponenty: ekstensję oraz intensję, gdzie intensja to zbiór wszystkich wspólnych cech obiektów do których nazwa się odnosi – Rys. 1.3. Dodatkowo, intensja dokładnie wyznacza ekstensję (tak jak wymagane jest to w filozofii języka), ale również ekstensja dokładnie wyznacza intensję (wbrew filozofii).

Matematyzacja powyższych intuicji filozoficznych jest następująca. Parę (U,E) nazywamy *przestrzenią aproksymacyjną* indukowaną przez (deterministyczny i zupełny) system informacyjny $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$. Jak wiadomo, każda relacja równoważności E wyznacza podział U/E uniwersum U, który interpretujemy jako klasyfikację obiektów (oczywiście, każdy obiekt x należy do dokładnie jednej klasy równoważności $[x]_E$). Przypomnijmy, że w ujęciu Z. Pawlaka, *wiedzę utożsamiamy z klasyfikacją obiektów* [70]. Zatem przestrzeń aproksymacyjna wyraża wiedzę zawartą w danym systemie informacyjnym, czyli zdolność takiego systemu do klasyfikacji obiektów. Każdy podzbiór $X \subseteq U$ nazywany jest *pojęciem* w U, natomiast U/E *bazą wiedzy* o U. Pojęcia równe sumie pewnych elementów U/E nazywane będą *pojęciami definiowalnymi* (lub *dokładnymi*). zostanie bliżej omówiony w Zbiór pojęć definiowalnych (dokładnych) zwykle tworzy jakąś strukturę (np. kratę czy topologię) i dlatego dodaje się do niego także zbiór pusty $\emptyset$. Pojęcia niedefiniowalne są przybliżane (aproksymowane) przy pomocy dwóch pojęć dokładnych:

$$\underline{X} = \{x \in U : [x]_E \subseteq X\},$$

$$\overline{X} = \{x \in U : [x]_E \cap X \neq \emptyset\}.$$

$\underline{X}$ nazywamy *dolnym przybliżeniem* X, a $\overline{X}$ *górnym przybliżeniem* X. Z perspektywy topologii, $\underline{X}$ jest wnętrzem X, zaś $\overline{X}$ domknięciem tego zbioru. Oczywiście, gdy X jest pojęciem definiowalnym, wtedy $X = \underline{X} = \overline{X}$. W pierwotnym ujęciu, *zbiór przybliżony* to para $(\underline{X}, \overline{X})$; w konsekwencji zbiory dokładne są zbiorami przybliżonymi. Chociaż jest to trochę nieintuicyjne, jednak konieczne w perspektywie matematycznej – w innym wypadku zbiory przybliżone nie tworzyłyby żadnej interesującej struktury.

Przestrzeń aproksymacyjna (U,E) została uogólniona przez A. Skowrona oraz J. Stepaniuka [97] przy użyciu funkcji inkluzji przybliżonej κ. Uogólniona przestrzeń aproksymacyjna to system $AS = (U, N, \kappa)$, gdzie $N : N \to \mathscr{P}U$ to funkcja sąsiedztwa przypisująca każdemu obiektowi $x \in U$ zbiór obiektów $N(x) \subseteq U$, natomiast $\kappa : \mathscr{P}U \times \mathscr{P}U \to [0,1]$ to funkcja inkluzji przybliżonej podająca dla pary zbiorów $X, Y \subseteq U$, w jakim stopniu X zawarte jest w Y. Operatory aproksymacji są zdefiniowane dla AS jak następuje:

$$\underline{X} = \{x \in U : \kappa(N(x), X) = 1\},$$

$$\overline{X} = \{x \in U : \kappa(N(x), X) \geq 0\}.$$

Chociaż systemy informacyjne można by opisać w języku predykatów, to wygodniej jest użyć dużo prostszego formalizmu: języka deskryptorów $\mathscr{L}_{Desc}$. Zwykle język $\mathscr{L}_{Desc}$ zdefiniowany jest nad zupełnym i deterministycznym systemem informacyjnym $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$. Wyrażenia atomiczne tego języka mają postać $[A = val]$, gdzie $A \in Att$ oraz $val \in Val_A$, i czytane są następująco: *atrybut A ma wartość val*. Gramatyka jest bardzo prosta:

$$\alpha ::= [A = val] \mid \alpha \wedge \beta \mid \alpha \vee \beta$$

Zbiór atomów oznaczany jest przez Φ, natomiast $\mathscr{F}_{Desc}$ oznacza zbiór poprawnych wyrażeń języka $\mathscr{L}_{Desc}$.

Interpretacja tego języka jest zdefiniowana standardowo: strukturę (U, v) nazywamy modelem, $v : U \times \Phi \to \{0, 1\}$ jest funkcją przyporządkowującą każdej parze (x, p), gdzie $x \in U$ oraz $p \in \Phi$, wartość logiczną 1 (prawda) albo 0 (fałsz). Zwykle, dla uproszczenia notacji, piszemy $v_x(p)$ zamiast $v(x, p)$.

- $v_x([A = val]) = 1$, jeżeli $inf(x,A) = val$, oraz 0 w przeciwnym razie.

Funkcja v jest rozszerzona na dowolną formułę $\alpha \in \mathscr{F}_{Desc}$ tak jak zwykle:

- $v_x(\alpha \vee \beta) = 1$, jeżeli $v_x(\alpha) = 1$ lub $v_x(\beta) = 1$, oraz 0 w przeciwnym razie,
- $v_x(\alpha \wedge \beta) = 1$, jeżeli $v_x(\alpha) = 1$ i $v_x(\beta) = 1$, oraz 0 w przeciwnym razie.

Przez pojęcie definiowalne $X \subseteq U$ rozumie się tutaj zbiór obiektów który wyznaczony jest przez jakąś formułę α:

$$X = |\alpha| = \{x \in U : v_x(\alpha) = 1\}.$$

Oczywiście, zbiór pojęć definiowalnych w języku deskryptorów $\mathscr{L}_{Desc}$ nad danym systemem informacyjnym $\mathscr{I} = (U,Att,Val,inf)$ jest identyczny ze zbiorem pojęć definiowalnych wyznaczonym przez przestrzeń aproksymacyjną (U,E) generowaną przez ten system, tj. $\mathscr{I} = (U,Att,Val,inf)$.

Podejście językowe jest szczególnie przydatne w analizie tablic decyzyjnych. Dla uproszczenia prezentacji, poniższe omówienie oparte jest na elementarnym wprowadzeniu do teorii zbiorów przybliżonych autorstwa Z. Pawlaka [71]. Niech będzie dana taka tablica, gdzie $C = \{A_1, \ldots, A_n\}$ jest zbiorem atrybutów warunkowych, a $D = \{B_1, \ldots, B_l\}$ zbiorem atrybutów decyzyjnych. Wtedy dla każdego obiektu $x \in U$ można zdefiniować dwie formuły:

$$C(x) = [A_1 = inf(x,A_1)] \wedge [A_2 = inf(x,A_2)] \wedge \ldots \wedge [A_n = inf(x,A_n)],$$

$$D(x) = [B_1 = inf(x,B_1)] \wedge [B_2 = inf(x,B_2)] \wedge \ldots \wedge [B_l = inf(x,B_l)].$$

Wyrażenie $C(x) \to D(x)$ nazywamy *regułą decyzyjną* wyznaczoną przez obiekt x. Reguły decyzyjne reprezentują zależności pomiędzy atrybutami warunkowymi a decyzyjnymi. Co ważne, jakość tych reguł może być różna.

Dla formuły α, niech $|\alpha|$ oznacza zbiór obiektów spełniających α, a dla skończonego zbioru X niech $\#X$ oznacza liczbę elementów należących do X. Wtedy z każdą regułą decyzyjną $C(x) \to D(x)$, gdzie $|C(x)|$ oraz $|D(x)|$ są niepustymi zbiorami, w teorii zbiorów przybliżonych skojarzony jest *współczynnik pewności* oznaczony przez $cer_x(C;D)$:

$$cer_x(C;D) = \frac{\#(|C(x)| \cap |D(x)|)}{\#|C(x)|}$$

oraz *współczynnik pokrycia*

$$cov_x(C;D) = \frac{\#(|C(x)| \cap |D(x)|)}{\#|D(x)|}.$$

Jeżeli $cer_x(C;D) = 1$, wtedy regułę decyzyjną $C(x) \to D(x)$ nazywamy *pewną*; jeżeli $0 < cer_x(C;D) < 1$, wtedy reguła jest *niepewna*. Typowym zadaniem w teorii zbiorów przybliżonych jest poszukiwanie podzbiorów $C' \subseteq C$, dla których reguły decyzyjne $C'(x) \to D(x)$ mają odpowiednio wysoki współczynnik pewności $cer_x(C';D)$ oraz pokrycia $cov_x(C';D)$.

Mając wyselekcjonowane reguły decyzyjne możemy aproksymować klasy decyzyjne. Jeżeli $C(x) \to D(x)$ jest regułą decyzyjną, wtedy zbiór

$$\bigcup_{y \in |D(x)|} \{|C(y)| : |C(y)| \subseteq |D(x)|\}$$

jest dolną aproksymacją klasy decyzyjnej $|D(x)|$, a zbiór

$$\bigcup_{y \in |D(x)|} \{|C(y)| : |C(y)| \cap |D(x)| \neq \emptyset\}$$

górną aproksymacją $|D(x)|$.

Termin *intensja* explicite nie występuje w teorii zbiorów przybliżonych wprowadzonej przez Z. Pawlaka. Niemniej, ze względu na bliskie powinowactwo zbiorów przybliżonych oraz formalnej analizy pojęć [125, 126], w analogiczny sposób intensja może być także wprowadzona w teorii zbiorów przybliżonych. Formalna analiza pojęć oparta jest na strukturze podobnej do systemu informacyjnego, która jednakże ma jedynie atrybuty binarne (tj. własności obiektów). Kontekst formalny to struktura (U, G, R), gdzie U jest zbiorem obiektów, G jest zbiorem własności ($V_A = \{Tak, Nie\}$ dla każdego atrybutu $A \in G$) oraz $R \subseteq U \times G$ jest relacją binarną; napis $(x, A) \in R$ czytamy *obiekt x ma własność A*. W prosty sposób każdy system informacyjny $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ indukuje taki kontekst formalny. Mianowicie, rolę własności grają formuły atomiczne języka deskryptorów $\mathscr{L}_{Desc}$ zdefiniowanego nad tym systemem, a relacja R jest zdefiniowana jako relacja spełniania: $(x, [A = val]) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_x([A = val]) = 1$, dla każdego $x \in U$ oraz $[A = val] \in \Phi$. Takie przekształcenie tablicy danych w kontekst formalny nazywamy skalowaniem nominalnym. Oczywiście można również użyć zbioru formuł $\mathscr{F}_{Desc}$ zamiast zbioru atomów Φ.

W formalnej analizie pojęć podstawową rolę pełnią dwa operatory derywacji (notacja oparta jest na [18]):

$$R_+(X) = \{A \in G : \forall x \in X \ ((x, A) \in R)\},$$

$$R^+(\mathscr{A}) = \{x \in U : \forall A \in \mathscr{A} \ ((x, A) \in R)\},$$

gdzie $X \subseteq U$ oraz $\mathscr{A} \subseteq G$. *Formalnym pojęciem* nazywamy parę zbiorów $(X, \mathscr{A})$, taką że $X = R^+(\mathscr{A})$ oraz $\mathscr{A} = R_+(X)$; X nazywamy *ekstensją* pojęcia, natomiast $\mathscr{A}$ jego *intensją*. Oczywiście, dowolny zbiór obiektów $X \subseteq U$ wyznacza formalne pojęcie $(R^+(R_+(X)), R_+(X))$. Zatem aby w podobny sposób wprowadzić intensję do teorii zbiorów przybliżonych, trzeba wyrazić $\underline{X}$ (oraz $\overline{X}$) w terminach pewnych operatorów R_a i R_b mających podobne formalne własności do R_+ oraz R^+ (np. tworzących połączenie Galois).

Podsumowując, związki teorii zbiorów przybliżonych oraz reprezentacji i przetwarzania wiedzy rozumiane są tak jak przedstawia to Rys. 1.4.

Dane/Informacja
$\Downarrow$
Tablica Danych/ System Informacyjny
$\Downarrow$
Informacja/Wiedza
$\Downarrow$
Relacje binarne pomiędzy obiektami
Np. relacja nieodróżnialności (przestrzeń aproksymacyjna).
$\Downarrow$
Wiedza
$\Downarrow$
Operatory indukowane przez relacje binarne
$\Downarrow$
Struktury pojęć
Np. algebra Boole'a pojęć definiowalnych lub zupełna krata pojęć formalnych

Rysunek 1.4: Związki teorii zbiorów przybliżonych oraz reprezentacji i przetwarzania wiedzy

Zarówno w teorii zbiorów przybliżonych jak i w formalnej analizie pojęć kluczową rolę odgrywają relacje binarne (kodujące dane/informacje) oraz pochodne względem nich operatory aproksymacji i derywacji (kodujące wiedzę). Dlatego niniejsza rozprawa składa się z prac tematycznie skupionych na własnościach tych relacji oraz pochodnych operatorów. Operatory te i relacje zostaną omówione w kontekście połączeń Galois (sprzężeń), topologicznych przestrzeni Aleksandrowa, przestrzeni pseudometrycznych, logik modalnych i różnych struktur algebraicznych. Uzyskane wyniki pozwalają na głębsze zrozumienie metodologicznych i formalnych podstaw teorii zbiorów przybliżonych.

Przyjmujemy następującą konwencję w o mawianiu prac wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego: twierdzenia pochodzące od innych autorów są „etykietowane" nazwiskami ich twórców, natomiast (moje) oryginalne twierdzenia nie posiadają żadnej etykiety.

1.2 Połączenia Galois w analizie danych

Praca *Galois Connections in Data Analysis* (Fundamenta Informaticae 60, 401–415, 2004) związana jest z klasyczną definicją terminu *pojęcie* jako pary $(ekstensja, intensja)$ w ramach teorii zbiorów przybliżonych. Przypomnijmy, że w tej teorii *pojęcie* redukowane jest do ekstensji. Intensję można oczywiście wprowadzić na wiele różnych sposobów. W omawianej pracy, podobnie jak w formalnej analizie pojęć, podstawą definicji są połączenia Galois, lecz tym razem są to połączenia kowariantne. Przy okazji otrzymujemy matematyczny kontekst (połączenia Galois) pozwalający na badanie związków pomiędzy tymi dwiema teoriami analizy danych.

Sprzężenie funktorów (funktory sprzężone) jest jednym z najważniejszych pojęć w matematyce, w szczególności w teorii kategorii. Jak to ujął Mac Lane: *Nasze hasło to: „Funktory sprzężone pojawiają się wszędzie”* (*The slogan is: “Adjoint functors arise everywhere”*). Nie jest zatem niespodzianką, że operatory używane w analizie danych również dają się opisać przy pomocy sprzężeń. Szczególnie relewantne są tu sprzężenia pomiędzy porządkami częściowymi. Prezentowane w tym rozdziale definicje oparte są na pracy M. Erné, E. Klossowski, A. Melton, G. Strecker [18], gdzie autorzy używają terminu *połączenia Galois* na określenie tego typu sprzężeń. Ponieważ jedynie takie sprzężenia omawiane są w rozprawie, obydwa terminy, tj. sprzężenia i połączenia Galois, używane będą zamiennie.

Definicja 1 (Sprzężenie/Połączenie Galois)**.** *Niech $\mathscr{U} = (U, \leq)$ oraz $\mathscr{V} = (V, \preceq)$ będą porządkami częściowymi. Jeżeli $\pi_* : U \to V$ i $\pi^* : V \to U$ są funkcjami spełniającymi następujący warunek:*

$$\textit{dla każdych } \; x \in U, y \in V, \; x \leq \pi^*(y) \; \textit{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \; \pi_*(x) \preceq y,$$

wówczas system $\pi = (\mathscr{U}, \pi_*, \pi^*, \mathscr{V})$ nazywamy sprzężeniem *lub* połączeniem Galois*, π_* nazywany jest* lewym sprzężonym *π^*, natomiast π^* jest prawym* sprzężonym *π_*.*

Ze względu na relacyjny charakter teorii zbiorów przybliżonych, najbardziej istotne są połączenia Galois pomiędzy rodzinami podzbiorów generowane przez relacje binarne. Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru U oznaczać będziemy przez $\mathscr{P}U$.

Twierdzenie 1 (M. Erné, E. Klossowski, A. Melton, G. Strecker)**.** *Dowolna relacja $R \subseteq U \times V$ indukuje kontrawariatne połączenie Galois*

$$R_+^+ = ((\mathscr{P}U, \subseteq), R_+, R^+, (\mathscr{P}V, \subseteq)),$$

gdzie R_+ oraz R^+ są zdefiniowane jak następuje:

$$R_+(X) = \{y \in V : \forall x \in X \; ((x,y) \in R)\}$$

$$R^+(Y) = \{x \in U : \forall y \in Y \; ((x,y) \in R)\}$$

dla podzbiorów $X \subseteq U$ oraz $Y \subseteq V$.

Twierdzenie 2 (M. Erné, E. Klossowski, A. Melton, G. Strecker)**.** *Dowolna relacja $R \subseteq U \times V$ indukuje kowariatne połączenie Galois*

$$R_\exists^\forall = ((\mathscr{P}U, \subseteq), R_\exists, R^\forall, (\mathscr{P}V, \subseteq)),$$

gdzie $R_\exists$ i $R^\forall$ są zdefiniowane następująco:

$$R_\exists(X) = \{y \in V : \exists x \in U \; ((x,y) \in R \;\; \& \;\; x \in X)\},$$

$$R^\forall(Y) = \{x \in U : \forall y \in V \; ((x,y) \in R \Rightarrow y \in Y)\},$$

dla podzbiorów $X \subseteq U$ i $Y \subseteq V$.

Niech R^{-1} oznacza relację odwrotną do R, tj. $yR^{-1}x$ wtedy i tylko wtedy, gdy xRy. Sprzężenie dualne do $R_{\exists}^{\forall}$, zdefiniowane przez $R_{\forall}^{\exists} = (R^{-1})_{\exists}^{\forall}$, jest także kontrawariantnym sprzężeniem z $(\mathscr{P}V, \subseteq)$ do $(\mathscr{P}U, \subseteq)$. Dla ułatwienia notacji złożenie operatorów będziemy pisać z pominięciem nawiasów; np. $R^{+}R_{+}(X)$ zamiast $R^{+}(R_{+}(X))$.

Formalna analiza pojęć od samego początku była budowana w oparciu o kontrawariante sprzężenie R_{+}^{+} indukowane przez kontekst formalny (U,G,R) [125, 126]. Głównym tematem rozprawy są operatory aproksymacji pojęć, stanowiące podstawowe narzędzie teorii zbiorów przybliżonych [63, 64, 65, 68, 69, 70], oraz ich analiza w perspektywie kowariantnych sprzężeń generowanych przez relacje binarne.

Każda przestrzeń aproksymacyjna (U,E) może zostać przekształcona w przestrzeń topologiczną (U,τ_E) zwaną topologiczną przestrzenią aproksymacyjną – pojęcie takiej przestrzeni wprowadzone zostało przez A. Wiwegera [127] (na marginesie warto wspomnieć, że dużo wcześniej tego typu przestrzenie badał również P. Halmos [34, 35]). Jak zwykle, *Int* oraz *Cl* oznaczają operatory topologicznego wnętrza i domknięcia.

Definicja 2 (Topologiczna przestrzeń aproksymacyjna)**.** *Przestrzeń (U,τ_E), gdzie rodzina klas abstrakcji U/E relacji równoważności E stanowi bazę topologii τ_E oraz operator wnętrza Int jest zdefiniowany następująco:*

$$Int(X) = \bigcup\{[x]_E \in U/E : x \in U \ \& \ [x]_E \subseteq X\},$$

nazywamy topologiczną przestrzenią aproksymacyjną.

Każda przestrzeń topologiczna (U,τ) indukuje relację pre-porządku $\preceq$ zwaną *pre-porządkiem specjalizacyjnym* lub (po prostu) *porządkiem specjalizacyjnym* [56]:

$$x \preceq y \overset{def}{\Leftrightarrow} Cl(\{x\}) \subseteq Cl(\{y\}).$$

Z kolei dla dowolnego zbioru U z relacją pre-porządku $\preceq$ zawsze istnieje topologia τ, której pre-porządkiem specjalizacyjnym jest $\preceq$ (niestety, zwykle takich topologii jest wiele).

Definicja 3 (Przestrzeń Aleksandrowa)**.** *Przestrzeń topologiczną (U,τ) której topologia τ jest zamknięta ze względu na dowolne przecięcia nazywamy* przestrzenią Aleksandrowa.

Przestrzenie Aleksandrowa zostały wprowadzone przez rosyjskiego matematyka P. Alexandrowa jako *przetrzenie dyskretne* [1]. Ponieważ termin przestrzeń dyskretna zaczął później oznaczać przestrzeń topologiczną której topologia jest dyskretna, oryginalna nazwa musiała zostać zastąpiona. Każda przestrzeń Aleksandrowa jest w istocie największą topologią (specjalizacyjną) indukowaną przez pewien pre-porządek; co więcej, przestrzenie Aleksandrowa oraz zbiory z pre-porządkiem jako kategorie są dualnie izomorficzne i w praktyce możemy je utożsamiać. Ten izomorfizm został zauważony przez M. McCorda [52] oraz A. Steinera [116] najpierw dla przypadku zbiorów częściowo uporządkowanych oraz przestrzeni topologicznych T_0. Poźniej Naturman uogólnił go w pracy doktorskiej [56] rozważając znaną korespondencję w logikach modalnych pomiędzy **S4** oraz strukturą z pre-porządkiem. Algebraiczne i topologiczne własności przestrzeni Aleksandrowa zostały opisane przez F. Arenasa w [2]. W perspektywie teorii zbiorów przybliżonych ta wzajemna jednoznaczność pomiędzy topologią a relacją binarną jest bardzo istotna, ponieważ stanowi ona podstawę pojęcia topologicznej przestrzeni aproksymacyjnej, której topologia indukowana jest przez relację równoważności.

W przypadku przestrzeni Aleksandrowa każdy punkt $x \in U$ posiada najmniejsze otoczenie otwarte zdefiniowane jak następuję:

$$\nabla(x) = \bigcap\{X \in \tau : x \in X\}.$$

Zbiory postaci

$$\nabla'(x) = \{y \in U : x \preceq y\},$$

dla $x \in U$, tworzą podbazę tej topologii. Łatwo dowieść, że $\nabla(x) = \nabla'(x)$, dla $x \in U$.

W konsekwencji, otrzymujemy:

Twierdzenie 3. *Topologiczna przestrzeń aproksymacyjna (U, τ_E) jest przestrzenią Aleksandrowa; ponadto*

$$\underline{X} = Int(X) \ \ oraz \ \ \overline{X} = Cl(X).$$

Punktem wyjścia prezentowanych w pracy badań są następujące twierdzenia, które wiążą przestrzenie topologiczne, pre-porządki oraz sprzężenia:

Twierdzenie 4. *Dla przestrzeni aproksymacyjnej (U,E) oraz indukowanej przez nią przestrzeni topologicznej (U, τ_E) zachodzą następujące równości:*

1. $E^{\forall}E_{\exists}(X) = \nabla(A) = Cl(X) = \overline{X}$,
2. $E_{\exists}E^{\forall}(X) = Int(X) = \underline{X}$,

dla każdego zbioru $X \subseteq U$.

Twierdzenie 5. *Dla przestrzeni aproksymacyjnej (U,E) oraz indukowanej przez nią przestrzeni topologicznej (U, τ_E), system $(U, \tau_E, \in)$ jest kontekstem formalnym; ponadto zachodzą następujące równości:*

1. $\in^{\forall}\in_{\exists}(X) = \overline{X}$,
2. $\in^{\exists}\in_{\forall}(X) = \underline{X}$,

dla każdego zbioru $X \subseteq U$.

Powyższe dwa twierdzenia pozwalają zauważyć następujące interesujące fakty:

- Ponieważ formalna analiza pojęć oparta jest na kontrawariantnych sprzężeniach, podmieniając sprzężenia dla danego kontekstu formalnego (U,G,R) możemy otrzymać „przybliżeniowo-zbiorową” wersję krat pojęć.

- Dowolna topologiczna przestrzeń aproksymacyjna (U,E) indukuje kontekst formalny $(U, \in, \tau_E)$. Operatory derywacji oraz aproksymacji pojęć mogą zostać porównane zarówno dla tej przestrzeni oraz jej kontekstu formalnego. Ze względu na równoważność pomiędzy zbiorami z pre-porządkiem oraz przestrzeniami Aleksandrowa, możliwe jest uogólnienie otrzymanych wyników dla topologicznych przestrzeni Aleksandrowa oraz ich porządków specjalizacyjnych.

Praca *Galois Connections in Data Analysis* podejmuje badania związane ze wspomnianą podmianą sprzężeń. Podstawowe twierdzenie formalnej analizy pojęć głosi, że pojęcia formalne tworzą kratę, której operacje zdefiniowane są przez sprzężenie kontrawariatne.

Twierdzenie 6 (R. Wille)**.** *Dla kontekstu formalnego (U,G,R), zbiór $\mathscr{C}(U,G,R)$ wszystkich pojęć uporządkowany przez relację $\leq_{FCA}$, gdzie*

$$(X_1,Y_1) \leq_{FCA} (X_2,Y_2) \overset{def}{\Leftrightarrow} X_1 \subseteq X_2,$$

tworzy kratę zupełną. Infima i suprema są zdefiniowane następująco:

$$\bigwedge_i (X_i,Y_i) \overset{def}{=} (\bigcap_i X_i, R_+(R^+(\bigcup_i Y_i))),$$

$$\bigvee_i (X_i,Y_i) \overset{def}{=} (R^+(R_+(\bigcup_i X_i)), \bigcap_i Y_i).$$

Zastępując R_+ przez $R_\exists$ oraz R^+ przez $R^\forall$ otrzymamy nowe kraty pojęć.

Definicja 4 (Pojęcie górne)**.** Pojęciem górnym *kontekstu formalnego (U,G,R) nazywamy parę (X,Y), gdzie $X \subseteq U$ i $Y \subseteq G$, taką że $R_\exists(X) = Y$ oraz $R^\forall(Y) = X$.*

Definicja 5 (Pojęcie dolne)**.** Pojęciem dolnym *kontekstu formalnego (U,G,R) nazywamy parę (X,Y), gdzie $X \subseteq U$ i $Y \subseteq G$, taką że $R_\forall(X) = Y$ oraz $R^\exists(Y) = X$.*

W przeciwieństwie do formalnej analizy pojęć, w teorii zbiorów przybliżonych możemy wprowadzić dwa typy intensji: górną i dolną. Niemniej, obydwie pozwalają otrzymać zupełne kraty pojęć.

Twierdzenie 7. *Dla każdego kontekstu formalnego (U,G,R), zbiór $\mathscr{C}^{(U,G,R)}$ wszystkich pojęć górnych tworzy kratę zupełną. Infima i suprema są zdefiniowane następująco:*

$$\bigwedge_i (X_i,Y_i) \overset{def}{=} (\bigcap_i X_i, R_\exists(R^\forall(\bigcap_i Y_i))),$$

$$\bigvee_i (X_i,Y_i) \overset{def}{=} (R^\forall(R_\exists(\bigcup_i X_i)), \bigcup_i Y_i).$$

Twierdzenie 8. *Dla każdego kontekstu formalnego (U,G,R), zbiór $\mathscr{C}_{(U,G,R)}$ wszystkich pojęć dolnych tworzy kratę zupełną. Infima i suprema są zdefiniowane następująco:*

$$\bigwedge_i (X_i,Y_i) \overset{def}{=} (\bigcap_i X_i, R_\forall(R^\exists(\bigcap_i Y_i))),$$

$$\bigvee_i (X_i,Y_i) \overset{def}{=} (R^\exists(R_\forall(\bigcup_i X_i)), \bigcup_i Y_i).$$

W pracy *Galois Connections in Data Analysis* omówione są również sprzężenia leżące u podstaw metody JSM (*JSM-Reasoning*), indukcyjnego rozumowania inspirowanego pracami J. S. Milla oraz F. Bacona, które zostało wprowadzone przez V. Finna [21, 22]. Wspomniane sprzężenia zostały zaś wprowadzone do metody JSM przez P. Grigorieva, S. Kuznetsova, S. Obiedkova i S. Yevtushenko [29]. Ponieważ cykl prac stanowiących rozprawę habilitacyjną skupia się głownie na operatorach aproksymacji pojęć (z teorii zbiorów przybliżonych) oraz operatorach derywacji (z formalnej analizy pojęć) w perspektywie reprezentacji wiedzy (nie zaś systemów uczących się), sprzężenia z JSM-Reasoning zostaną pominięte w niniejszym omówieniu.

1.3 Kwanty informacji i operatory aproksymacji

Praca *Information Quanta and Approximation Operators: Once More Around the Track* (Transactions on Rough Sets 8, Lecture Notes in Computer Science 5084, Springer Berlin Heidelberg, 237–250, 2008) omawia sprzężenia leżące u podstaw teorii zbiorów przybliżonych i formalnej analizy pojęć w perspektywie topologicznej, tj. przestrzeni Aleksandrowa (U,τ) oraz ich porządków specjalizacyjnych. Dla uproszczenia notacji porządki specjalizacyjne oznaczać będziemy zwyczajnie przez *R*. Ponieważ zbiór obiektów w systemie informacyjnym jest skończony, w istocie badane są skończone przestrzenie topologiczne. Termin "information quanta" nawiązuje do prac P. Paglianiego i M. Chakrabortiego [61, 62], którzy w tym samym czasie pracowali nad podobną problematyką, tj. nad sprzężeniami w systemach informacyjnych oraz kontekstach formalnych (niemniej, autorzy nazywali konteksty formalne *property systems* i badali je niezależnie od formalnej analizy pojęć oraz w oderwaniu od porządku specjalizacyjnego przestrzeni Aleksandrowa). Kolejnym autorem niezależnie podejmującym podobną tematykę w tym czasie był J. Järvinen citeJarvinen. Niemniej, nie definiował on operatorów aproksymacji w terminach sprzężeń oraz ich złożeń, lecz dowodził że operator górnej i dolnej aproksymacji tworzą połączenie Galois.

Podstawowym twierdzeniem w pracy *Information Quanta and Approximation Operators: Once More Around the Track* jest:

Twierdzenie 9. *Niech (X,τ) będzie przestrzenią Aleksandrowa, $(X,\tau,\in)$ indukowanym kontekstem formalnym, oraz R porządkiem specjalizacyjnym. Wtedy*

1. $\in^{\forall}\in_{\exists}(X) = Cl(X)$,
2. $\in^{\exists}\in_{\forall}(X) = Int(X)$,
3. $\in^{+}\in_{+}(X) = \nabla(X)$,
4. $R^{\forall}R_{\exists}(X) = \nabla(X)$,
5. $R_{\forall}R^{\exists}(X) = Cl(X)$,
6. $R_{\exists}R^{\forall}(X) = Int(X)$,
7. $R^{\exists}R_{\forall}(X) = \bigcup_{x\in X}\{Cl(\{x\}) : Cl(\{x\}) \subseteq A\}$,

dla dowolnego zbioru $X \subseteq U$.

W dalszej części pracy *Information Quanta oraz Approximation Operators: Once More Around the Track*, sprzężenia omawiane są w perspektywie wyników uzyskanych przez C. Rauszer [89, 90, 91], dotyczących logiki intuicjonistycznej oraz jej dualnej wersji zwanej często logiką Brouwera.

Definicja 6 (Algebra Heytinga)**.** *Algebrę* $(U, \leq, \vee, \wedge, \overset{\wedge}{\to}, \top, \bot)$ *nazywamy* algebrą Heytinga *wtedy i tylko wtedy, gdy* $(U, \leq, \vee, \wedge, \overset{\wedge}{\to}, \top, \bot)$ *jest ograniczoną kratą dystrybutywną oraz* $\overset{\wedge}{\to}$ *jest operatorem pseudo-dopełnienia x względem z spełniającym następujący warunek:*

$$x \wedge y \leq z \;\; \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \;\; y \leq x \overset{\wedge}{\to} z,$$

dla każdych $x, y, z \in U$.

Definicja 7 (HBA)**.** Algebrą Heytinga-Brouwera *(HBA)* $(U, \leq, \vee, \wedge, \overset{\wedge}{\to}, \overset{\vee}{\to}, \top, \bot)$ *jest algebra Heytinga* $(U, \leq, \vee, \wedge, \overset{\wedge}{\to}, \top, \bot)$ *zaopatrzona w operację* koimplikacji $\overset{\vee}{\to}$*, taką że:*

$$x \vee y \geq z \;\; \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy} \;\; y \geq x \overset{\vee}{\to} z,$$

dla każdych $x, y, z \in U$

Warto podkreślić że HBA może zostać zdefiniowana również przy pomocy operacji *pseudo-różnicy* $\div$ (którą C. Rauszer używała w swoich pracach):

$$x \vee y \geq z \;\; \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \;\; y \geq z \div x,$$

dla każdych $x, y, z \in U$.

Podstawową metodą wprowadzania HBA są pre-porządki (zbiory pre-uporządkowane), a więc również przestrzenie Aleksandrowa:

Twierdzenie 10 (C. Rauszer)**.** *Niech* $\mathscr{S} = (U, \leq)$ *będzie zbiorem pre-uporządkowanym,* $(U, \tau_{\mathscr{S}})$ *indukowaną topologiczną przestrzenią Aleksandrowa oraz*

$$X \overset{\wedge}{\to} Y \overset{def}{=} \{x \in U : \forall y \geq x \; (y \in X \Rightarrow y \in Y)\},$$

$$X \overset{\vee}{\to} Y \overset{def}{=} \{x \in U : \exists y \leq x \; (y \notin X \;\;\&\;\; y \in Y)\},$$

wtedy algebra $(\tau_{\mathscr{S}}, \subseteq, \cap, \cup, \overset{\wedge}{\to}, \overset{\vee}{\to}, \emptyset, G)$ *jest HBA.*

Definicja 8 (Przestrzeń bitopologiczna)**.** Przestrzenią bitopologiczną $(U, Int, \mathtt{Cl})$ *nazywamy niepusty zbiór U zaopatrzony w topologiczną operację wnętrza Int oraz topologiczną operację domknięcia* $\mathtt{Cl}$*, taką że:*

$$Int(X) = \mathtt{Cl}(Int(X)) \text{ oraz } \mathtt{Cl}(X) = Int(\mathtt{Cl}(X)),$$

dla każdego $X \subseteq U$.

Twierdzenie 11. *Niech* (U, τ) *będzie topologiczną przestrzenią Aleksandrowa, system* $(U, \tau, \in)$ *jej kontekstem formalnym oraz R jej porządkiem specjalizacyjnym; wtedy* $(X, R_{\exists}R^{\forall}, R^{\forall}R_{\exists})$ *jest przestrzenią bitopologiczną.*

Niech $-X$ oznacza dopełnienie zbioru X.

Twierdzenie 12. *Niech (X,τ) będzie topologiczną przestrzenią Aleksandrowa, system $(U,\tau,\in)$ jej kontekstem formalnym oraz R jej porządkiem specjalizacyjnym; wtedy algebra $(\tau,\subseteq,\cup,\cap,\overset{\wedge}{\to},\overset{\vee}{\to},U,\emptyset)$, gdzie*

$$X \overset{\wedge}{\to} Y \overset{def}{=} R_{\exists}R^{\forall}(-X\cup Y),$$

$$X \overset{\vee}{\to} Y \overset{def}{=} \models^{+}\models_{+}(-X\cap Y) = R^{\forall}R_{\exists}(-X\cap Y),$$

dla $X,Y\in\tau$ stanowi HBA.

Logika Heytinga-Brouwera (*HBL*) jest zdefiniowana w języku zdaniowym $\mathscr{L}_{HB}$ którego spójnikami są $\wedge,\vee,\overset{\wedge}{\to},\overset{\vee}{\to},\top,\bot$. Aksjomatyzację *HBL* C. Rauszer podała w pracy [90]. Niemniej, wygodniejszą formę wprowadził F. Wolter w [128] i to ona stanowi podstawę dalszych rozważań.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $\overset{\wedge}{\neg}\alpha = \alpha \overset{\wedge}{\to}\bot$, $\overset{\vee}{\neg}\alpha = \alpha\overset{\vee}{\to}\top$ i zdefiniujmy:

$$H = \{\alpha \overset{\wedge}{\to} (\beta\vee(\beta\overset{\vee}{\to}\alpha)), (\beta\overset{\vee}{\to}\alpha)\overset{\wedge}{\to}\overset{\vee}{\neg}(\alpha\overset{\wedge}{\to}\beta),$$

$$(\gamma\overset{\vee}{\to}(\beta\overset{\vee}{\to}\alpha))\overset{\wedge}{\to}((\alpha\vee\beta)\overset{\vee}{\to}\alpha),$$

$$\overset{\wedge}{\neg}(\beta\overset{\vee}{\to}\alpha)\overset{\wedge}{\to}(\alpha\overset{\wedge}{\to}\beta), \overset{\wedge}{\neg}(\alpha\overset{\vee}{\to}\alpha)\}.$$

Logika *HBL* jest najmniejszą logiką zawierającą $INT\cup H$, gdzie INT jest dowolną aksjomatyzacją logiki intuicjonistycznej, zamkniętą ze względu na podstawianie, *modus ponens* oraz

$$\frac{\alpha}{\overset{\wedge}{\neg}\overset{\vee}{\neg}\alpha}\ .$$

Twierdzenie 13 (C. Rauszer)**.** *Formuła języka $\mathscr{L}_{HB}$ jest tezą HBL wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa we wszystkich algebrach Heytinga-Brouwera.*

Rozszerzona translacja Gödla t pozwala na „wydobycie” sprzężeń z semantyki HBL i ich bezpośrednie wyrażenie w logice modalnej **S4.t** [45, 93]:

$$\alpha^t = \Box_F\alpha,$$

$$\top^t = \top,$$

$$\bot^t = \bot,$$

$$(\alpha\wedge\beta)^t = \alpha^t\wedge\beta^t,$$

$$(\alpha\vee\beta)^t = \alpha^t\vee\beta^t,$$

$$(\alpha\overset{\wedge}{\to}\beta)^t = \Box_F(\alpha^t\to\beta^t),$$

$$(\alpha\overset{\vee}{\to}\beta)^t = \Diamond_P(\neg\alpha^t\wedge\beta^t).$$

Twierdzenie 14 (P. Łukowski)**.** *Dla każdej formuły α języka $\mathscr{L}_{HB}$,*

$$HBL \models \alpha \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } S4.t \models \alpha^t.$$

Wróćmy teraz do przestrzeni Aleksandrowa.

Definicja 9 (Model topologiczny)**.** *Niech (U,τ) będzie topologiczną przestrzenią Aleksandrowa, R jej porządkiem specjalizacyjnym oraz V funkcją ewaluacji ze zbioru formuł atomicznych w rodzinę $\mathscr{P}U$ podzbiorów U:*

$$V(\Box_F\alpha) = R_\exists R^\forall(V(\alpha)),$$

$$V(\Diamond_F\alpha) = R_\forall R^\exists(V(\alpha)),$$
$$V(\Box_P\alpha) = R^\exists R_\forall(V(\alpha)),$$
$$V(\Diamond_P\alpha) = R^\forall R_\exists(V(\alpha)).$$

Jak zwykle: $x \vDash \alpha \overset{def}{\Leftrightarrow} x \in V(\alpha)$. V jest rozszerzane na dowolną formułę w standardowy sposób. Trójka (X,τ,V) będzie nazywana modelem topologicznym*.*

Twierdzenie 15. *Formuła α jest tezą **S4.t** wtedy i tylko wtedy, gdy α jest prawdziwa w każdym modelu topologicznym.*

W ten sposób otrzymujemy logiczny opis zależności pomiędzy kowariantnymi i kontrawariantnymi sprzężeniami interpretowanymi w przestrzeniach topologicznych.

Podsumowując, połączenia Galois oraz operatory aproksymacji pojęć mogą być omawiane na różnych poziomach ogólności, tak jak w [40, 61, 62]. Niemniej, jak wyżej zostało dowiedzione, poziom topologicznych przestrzenie Aleksandrowa oraz porządków specjalizacyjnych pozwala na wydobycie istotnych algebraicznych założeń teorii zbiorów przybliżonych oraz na zobaczenie formalnych relacji pomiędzy teorią zbiorów przybliżonych oraz formalną analizą pojęć, które na innych poziomach są niewidoczne. W szczególności, obydwie teorie mogą być rozpatrywane razem jako jedna teoria.

1.4 Pseudometryki w przestrzeniach aproksymacyjnych

Praca *Distance Measures Induced by Finite Approximation Spaces and Approximation Operators* (Fundamenta Informaticae 85 (1), 497–512, 2008) omawia metryczne własności przestrzeni aproksymacyjnych oraz pseudometryki generowane wspólnie przez metrykę Marczewskiego-Steinhausa [47] oraz sprzężenia. Omawiane pseudometryki obliczają odległości między pojęciami w odniesieniu do topologii generowanej przez przestrzenie aproksymacyjne. Ponieważ te topologie w istocie reprezentują ekstensje atrybutów/własności, odległości te mogą być interpretowane jako semantyczny dystans między pojęciami.

Definicja 10 (Pseudometryka częściowa)**.** *Funkcję $p: U \times U \to [0,\infty)$, taką że:*

1. *$p(x,y) \geq p(x,x)$ dla $x,y \in U$,*

2. $p(x,y) = p(y,x)$,

3. $p(x,z) + p(x,x) \leq p(x,y) + p(y,z)$.

nazywamy częściową pseudometryką.

Twierdzenie 16 (A. Güldürdek, T. Richmond). *Każdy pre-porządek $\preceq$ na skończonym zbiorze $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ może zostać zdefiniowany przez następującą regułę:*

$$x_i \preceq x_j \overset{def}{\Leftrightarrow} p(x_i, x_j) \leq p(x_i, x_i),$$

gdzie $p : U \times U \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ jest częściową pseudometryką $p(x_i, x_j) = ij$ zdefiniowaną jak następuje:

$$ij = \begin{cases} ii, & \text{jeżeli} \quad x_i \preceq x_j, \\ jj, & \text{jeżeli} \quad x_j \preceq x_i, \\ max\{ii, jj\} + 1, & \text{jeżeli} \quad x_i \npreceq x_j \ \& \ x_j \npreceq x_i, \end{cases}$$

dla $ii = \#\{y \in U : x_i \prec y\}$.

W ogólnym przypadku, każda częściowa pseudometryka p na skończonym zbiorze U generuje preporządek $\preceq_p$ na U zdefiniowany przez:

$$x \preceq_p y \overset{def}{\Leftrightarrow} p(x,y) \leq p(x,x).$$

Topologia specjalizacyjna indukowana przez $\preceq_p$ pokrywa się z topologią τ generowaną przez p, to znaczy, z topologią utworzoną przez bazę kul otwartych, tj. zbiór $\{B(x,r) : x \in U \ \& \ r \in (0,\infty)\}$, gdzie $B(x,r) = \{y \in U : p(x,y) < p(x,x) + r\}$. Z drugiej strony, kiedy $x \preceq y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p(x,y) \leq p(x,x)$, wtedy $\preceq = \preceq_p$.

Definicja 11 (Pseudometryka). *Częściową pseudometrykę p na U spełniającą warunek $p(x,x) = 0$, dla każdego $x \in U$, nazywamy* pseudometryką.

Oczywiście tylko niektóre topologie są definiowane przez pseudometryki.

Twierdzenie 17 (M. Erné, K. Stege). *Dla skończonej przestrzeni topologicznej (U, τ) następujące zdania są równoważne:*

1. *(U, τ) jest pseudometryzowalna,*

2. *(U, τ) jest regularna,*

3. *porządek specjalizacyjny $\preceq$ topologii τ jest relacją równoważności.*

Zatem, skończone topologiczne przestrzenie aproksymacyjne są dokładnie skończonymi topologicznymi przestrzeniami, które są pseudometryzowalne.

Twierdzenie 18. *Pseudometryka p generowana przez relację równoważności $\preceq$ – tak jak jest to zdefiniowane w Twierdzeniu 16 – ma następującą postać:*

$$p(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli} \quad x \preceq y, \\ 1, & \text{jeżeli} \quad x \npreceq y. \end{cases}$$

Definicja 12 (Ultrapseudometryka)**.** Ultrapseudometryką *p na U nazywamy pseudometrykę, taką że* $p(x,z) \leq max\{p(x,y), p(y,z)\}$.

Twierdzenie 19. *Funkcja p zdefiniowana przez:*

$$p(x,y) = \begin{cases} 0, & \textit{jeżeli} \quad x \preceq y, \\ 1, & \textit{jeżeli} \quad x \not\preceq y, \end{cases}$$

jest ultrapseudometryką wtedy i tylko wtedy, gdy $\preceq$ *jest relacją równoważności.*

Definicja 13 (Odległość Marczewskiego-Steinhausa)**.** *Niech trójka* $(U, \boldsymbol{M}, \mu)$ *będzie* σ*-skończoną przestrzenią mierzalną z miarą* μ *oraz niech* $\boldsymbol{M}_0$ *oznacza klasę wszystkich zbiorów* $X \in \boldsymbol{M}$*, takich że* $\mu(X) < \infty$*. Dla dowolnych zbiorów* $X, Y \in \boldsymbol{M}_0$ odległość Marczewskiego-Steinhausa σ_μ *między X i Y jest zdefiniowana jak następuje:*

$$\sigma_\mu(X,Y) = \begin{cases} \frac{\mu(X \div Y)}{\mu(X \cup Y)}, & \textit{jeżeli } \mu(X \cup Y) > 0, \\ 0 & \textit{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

gdzie $(X \div Y)$ *oznacza różnicę symetryczną zbiorów.*

Twierdzenie 20 (E. Marczewski, H. Steinhaus)**.** $(\boldsymbol{M}_0, \sigma_\mu)$ *jest przestrzenią metryczną, gdy utożsamiamy ze sobą dowolne zbiory, których różnica symetryczna jest miary zero.*

W najprostszym przypadku, gdy za miarę weźmiemy liczbę elementów w zbiorze skończonym otrzymamy tzw. metrykę Marczewskiego-Steinhausa:

Definicja 14 (Metryka Marczewskiego-Steinhausa MZ)**.**

$$MZ(X,Y) = \begin{cases} \frac{\#(X \div Y)}{\#(X \cup Y)}, & \textit{jeżeli } \#(X \cup Y) > 0, \\ 0 & \textit{w przeciwnym razie,} \end{cases}$$

dla skończonych zbiorów X, Y.

W teorii zbiorów przybliżonych pojęcie utożsamione jest z ekstensją, a więc ze zbiorem obiektów. Odległość między pojęciami/zbiorami mogłaby być mierzona (w pewien sposób) w odniesieniu do pseudometryki p na U generowanej przez daną przestrzeń aproksymacyjną (U,E). Metryka Marczewskiego-Steinhausa MZ jest kolejną możliwą metryką do zastosowania, jednak trzeba ją powiązać z danym systemem informacyjnym $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ lub przestrzenią aproksymacyjną (U,E). Przypomnijmy, że $(U, \tau_E, \in)$ jest kontekstem formalnym generowanym przez system informacyjny (czy przestrzeń aproksymacyjną). Ponieważ sprzężenie składa się z pary operatorów, możliwe jest zdefiniowanie dwóch odległości generowanych przez relację $\in$.

Definicja 15 (Odległość $\overline{MZ}$)**.** *Niech* (U,E) *będzie skończoną przestrzenią aproksymacyjną oraz niech* (U, τ_E) *oznacza indukowaną topologiczną przestrzeń Aleksandrowa. Dla kontekstu formalnego* $(U, \tau_E, \in)$ *oraz dowolnej pary zbiorów* $X, Y \subseteq U$ *zdefiniujmy:*

$$\overline{MZ}(X,Y) = \begin{cases} \frac{\#(\in_\exists(X) \div \in_\exists(Y))}{\#(\in_\exists(X) \cup \in_\exists(Y))}, & \textit{jeżeli } \#(\in_\exists (X) \cup \in_\exists (Y)) > 0, \\ 0 & \textit{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Oczywiście, dla dowolnych zbiorów X, Y zachodzi:

$$\overline{MZ}(X,Y) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \overline{X} = \overline{Y}.$$

Definicja 16 (Odległość $\underline{MZ}$)**.** *Tak jak wyżej, niech (U,E) będzie skończoną przestrzenią aproksymacyjną oraz niech (U,τ_E) oznacza indukowaną topologiczną przestrzeń Aleksandrowa. Dla kontekstu formalnego $(U,\tau_E,\in)$ oraz dowolnej pary zbiorów $X,Y \subseteq U$ zdefiniujmy:*

$$\underline{MZ}(X,Y) = \begin{cases} \frac{\#(\in_\forall(X) \div \in_\forall(Y))}{\#(\in_\forall(X) \cup \in_\forall(Y))} & \textit{jeżeli } \#(\in_\forall(X) \cup \in_\forall(Y)) > 0, \\ 0 & \textit{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Oczywiście, podobnie jak w poprzednim przypadku, dla dowolnych zbiorów X oraz Y zachodzi:

$$\underline{MZ}(X,Y) = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \underline{X} = \underline{Y}.$$

Twierdzenie 21. *Obydwie odległości $\overline{MZ}$ oraz $\underline{MZ}$ są pseudometryką na $\mathscr{P}U$.*

Definicja 17 (Metryka)**.** Metryką *na zbiorze U nazywamy pseudometrykę p, taką że $p(x,y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$, dla $x,y \in U$.*

Twierdzenie 22. *$\overline{MZ}$ oraz $\underline{MZ}$ są metrykami na rodzinie wszystkich zbiorów definiowalnych w danej przestrzeni aproksymacyjnej (U,E).*

Oczywiście, korzystając z poprzednich wyników, możemy wygenerować odpowiednie pseudometryki używając operatorów $E_\exists$ oraz $E^\forall$.

Przedstawione odległości MZ są zdefiniowane na zbiorach, natomiast pseudometryka p generowana przez E jest zdefiniowana na obiektach. Traktowanie obiektu x jako zbioru $\{x\}$ pozwala zdefiniować metrykę MZ na U. Ponieważ dla przestrzeni Aleksandrowa (A,τ_R), $R^\forall R_\exists(\{x\})$ jest najmniejszym zbiorem otwartym zawierającym x, jesteśmy bardziej zainteresowani $\overline{MZ}$ niż $\underline{MZ}$.

Definicja 18 (Odległość między obiektami $\overline{MZ}_U$)**.**

$$\overline{MZ}_U(x,y) \stackrel{def}{=} \overline{MZ}(\{x\},\{y\}),$$

dla $x,y \in U$.

Twierdzenie 23. *Niech (U,τ) będzie skończoną przestrzenią topologiczną. $\overline{MZ}_U$ jest pseudometryką na U; $\overline{MZ}_U$ jest metryką, gdy (U,τ) jest przestrzenią $T1$, tzn. gdy $\{x\}$ jest zbiorem domkniętym dla każdego $x \in U$.*

Twierdzenie 24. *Dla skończonej przestrzeni aproksymacyjnej (U,E) następujące pseudometryki są równoważne:*

1. *p (generowana przez E zgodnie z Twierdzeniem 16),*
2. *$\overline{MZ}_U$.*

$$\begin{tikzcd}
\text{Przestrzeń aproksymacyjna } (U,E) & \text{Sprzężenia indukowane przez } E \\
\text{Topologiczna przestrzeń aproksymacyjna } (U,\tau_E) & \text{Sprzężenia indukowane przez } \in \arrow[d, "\text{Metryka Marczewskiego-Steinhausa}"] \\
\text{Odległość między punktami} \arrow[u, "\text{Topologia generowana przez kule otwarte}"] & \text{Odległość między zbiorami} \arrow[l, "x"', "\text{jako } \{x\}"]
\end{tikzcd}$$

Rysunek 1.5: Diagram zależności

Innymi słowy, obydwie pseudometryki generują tą samą topologię. W konsekwencji otrzymujemy diagram przedstawiony na Rysunku 1.5.

Podsumowując niniejszy rozdział, połączenia Galois pozwalają na zdefiniowanie intensji dowolnego pojęcia (rozumianego jako zbiór obiektów). Mając intensje pojęć, możemy zdefiniować semantyczne odległości między pojęciami, które liczone są nie w odniesieniu do zbioru obiektów U (jak to zwykle jest czynione), lecz w odniesieniu do zbioru atrybutów binarnych (często zwanych własnościami). Ponieważ dowolny zupełny i deterministyczny system informacyjny może zostać przekształcony w binarny system informacyjny, wprowadzone odległości mogą być również zdefiniowane w ogólnym przypadku systemów informacyjnych.

1.5 Systemy Scotta, sprzężenia i ontologie

Praca *Rough Set Theory: Ontological Systems, Entailment Relations and Approximation Operators* (Transactions on Rough Sets 10, Lecture Notes in Computer Science 5656, Springer Berlin Heidelberg, 1–14, 2009) podejmuje tematykę sprzężeń w perspektywie operacji konsekwencji i związanych z nią systemów Scotta [95, 96]. Pojęcie relacji konsekwencji (Scotta) zostało scharakteryzowane w ramach teorii zbiorów przybliżonych przez D. Vakarelova w serii publikacji [14, 121, 122, 123]. Praca *Rough Set Theory: Ontological Systems, Entailment Relations and Approximation Operators* jest kontynuacją wyników D. Vakarelova; poza sprzężeniami uwzględnia dodatkowo operację konsekwencji Tarskiego [117] oraz systemy informacyjne Scotta [95, 96].

Jak wiadomo, finalną strukturą w formalnej analizie pojęć jest zupełna krata pojęć. Analogiczną strukturą w teorii zbiorów przybliżonych jest algebra Boole'a pojęć definiowalnych w danej przestrzeni aproksymacyjnej. Ponieważ obydwie struktury zawierają pojęcia, będziemy się do nich odnosić jako *ontologii*. Zatem, w niniejszej pracy omówione zostaną ontologie z formalnej analizy pojęć oraz teorii zbiorów przybliżonych w perspektywie różnych rodzajów operacji konsekwencji.

Definicja 19 (Operacja konsekwencji)**.** Operacją konsekwencji $\vdash$ *na zbiorze U nazywamy relację pomiędzy podzbiorami U spełniającą następuje warunki:*

1. *jeżeli* $X \vdash Y$*, to* $X \cap Y \neq \emptyset$*,*

2. *jeżeli* $X \vdash Y$*,* $X \subseteq X'$ *oraz* $B \subseteq B'$*, to* $X' \vdash Y'$*,*

3. *jeżeli* $X \vdash (Y \cup \{x\})$ *oraz* $(\{x\} \cup X) \vdash Y$*, to* $X \vdash Y$*,*

4. *jeżeli* $X \vdash Y$*, to istnieją skończone podzbiory* $X' \subseteq X$ *i* $Y' \subseteq Y$*, takie że* $X' \vdash Y'$*,*

dla zbiorów $X, Y \subseteq U$ *oraz* $x \in U$*.*

Tak zdefiniowaną operację konsekwencji Scott interpretuje jako uogólnienie konsekwencji w rachunku sekwentów Gentzena. Parę $\mathscr{S} = (U, \vdash)$ nazywamy *systemem Scotta*.

Mając dany kontekst formalny (U, M, R), wprowadźmy dla uproszczenia notacji funkcję $f : U \to \mathscr{P}G$ zdefiniowaną przez warunek: $m \in f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, m) \in R$. Zatem kontekst formalny będzie reprezentowany również w postaci (U, M, f).

Twierdzenie 25 (D. Vakarelov)**.** *Niech będzie dany kontekst formalny* $\mathscr{C} = (U, M, f)$ *oraz*

$$X \vdash_{\mathscr{C}} Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \bigcap_{x \in X} f(x) \subseteq \bigcup_{y \in Y} f(y),$$

dla skończonych podzbiorów $X, Y \subseteq U$*. Wtedy* $\mathscr{S} = (U, \vdash_{\mathscr{C}})$ *jest systemem Scotta nad* $\mathscr{C} = (U, M, f)$*, zwanym również* kanonicznym systemem Scotta *nad* $\mathscr{C}$*.*

Twierdzenie 26 (D. Vakarelov)**.** *Niech* $\mathscr{S} = (S, \vdash)$ *będzie systemem Scotta. Wtedy istnieje kontekst formalny* $\mathscr{C}_{\mathscr{S}} = (U, M, f)$*, taki że* $\mathscr{S} = (U, \vdash_{\mathscr{C}_{\mathscr{S}}})$*.*

Twierdzenie 27. *Niech* $\mathscr{C} = (U, \tau_E, \in)$ *będzie kontekstem formalnym indukowanym przez przestrzeń aproksymacyjną* (U, E) *oraz*

$$X \vdash_{\mathscr{C}} Y \overset{def}{\Leftrightarrow} \in_+ (X) \subseteq \in_\exists (Y),$$

dla $X, Y \subseteq U$*. Wtedy* $\mathscr{S} = (U, \vdash_{\mathscr{C}})$ *jest kanonicznym systemem Scotta nad* $\mathscr{C}$*.*

Ponieważ funkcje tworzące sprzężenia są wzajemnie quasi-odwracalne otrzymujemy:

$$R_+ R^+ R_+(X) = R_+(\overline{X}) = R_+(X),$$
$$R_\exists R^\forall R_\exists(X) = R_\exists(\overline{X}) = R_\exists(X).$$

Twierdzenie 28. *Niech* $\mathscr{C} = (U, \tau_E, \in)$ *będzie kontekstem formalnym indukowanym przez przestrzeń aproksymacyjną* (U, E)*. Wtedy spełnione są następujące warunki:*

$$X \vdash_{\mathscr{C}} Y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \overline{X} \vdash_{\mathscr{C}} \overline{Y},$$

oraz

$$X \vdash_{\mathscr{C}} Y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \in^+ \in_+ (X) \vdash_{\mathscr{C}} \in^+ \in_+ (Y),$$

dla $X, Y \subseteq U$*.*

Jak widać, kanoniczne systemy Scotta są w rzeczywistości zdefiniowane w odniesieniu do pojęć indukowanych przez daną przestrzeń aproksymacyjną (czy też deterministyczny i zupełny system informacyjny Pawlaka). Innymi słowy, rozumowanie (operacja konsekwencji) zdefiniowane jest w terminach pozyskanej wiedzy.

Związki kanonicznych systemów Scotta ze sprzężeniami i kratami pojęć są lepiej widoczne, gdy zamienimy topologiczną przestrzeń aproksymacyjną na topologiczną przestrzeń Aleksandrowa.

Twierdzenie 29. *Niech $\mathscr{C} = (U, \tau, \in)$ będzie kontekstem formalnym indukowanym przez przestrzeń Aleksandrowa (U, τ) oraz $\vdash_{\mathscr{C}}$ będzie określona tak jak w Twierdzeniu 27. Wtedy $\mathscr{S} = (U, \vdash_{\mathscr{C}})$ jest systemem Scotta.*

Twierdzenie 30. *Niech $\mathscr{C} = (U, \tau, \in)$ będzie (topologicznym) kontekstem formalnym indukowanym przez przestrzeń Aleksandrowa (U, τ) oraz $\mathscr{S} = (U, \vdash_{\mathscr{C}})$ indukowanym systemem Scotta. Wtedy zachodzi co następuje:*

$$X \vdash_{\mathscr{C}} Y \ \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \ \in^{+}\in_{+}(X) \vdash_{\mathscr{P}} \overline{Y},$$

dla $X, Y \subseteq U$.

To co jest interesujące w tym przypadku, to fakt, że systemy Scotta wymagają jednocześnie pojęć zarówno indukowanych zgodnie z formalną analizą pojęć, jak i zgodnie z teorią zbiorów przybliżonych. Skończone przestrzenie Aleksandrowa są topologicznym modelem niezupełnych i niedeterministycznych systemów informacyjnych podobnie jak topologiczne przestrzenie aproksymacyjne są topologicznym modelem zupełnych i deterministycznych systemów informacyjnych. W drugim przypadku, wystarcza jeden zbiór pojęć, który można również uważać za (uogólnioną) ontologię (ontologie to zwykle zbiory pojęć z porządkiem taksonomicznym, a tutaj mamy kraty). W przypadku przestrzeni Aleksandrowa potrzebujemy zarówno ontologii formalnej analizy pojęć oraz ontologii teorii zbiorów przybliżonych.

Równoprawność obydwu ontologii załamuję się, gdy rozpatrujemy bardziej klasyczne relacje konsekwencji.

Definicja 20 (System Tarskiego)**.** *Niech $\mathscr{S} = (S, \vdash)$ będzie systemem Scotta; wtedy relację $\vdash$ nazywamy relacją konsekwencji Tarskiego w S oraz $\mathscr{S}$ nazywamy* systemem Tarskiego *jeżeli spełniony jest następujący warunek dla $X, Y \subseteq S$: jeżeli $X \vdash Y$, wtedy istnieją skończony podzbiór $X' \subseteq X$ oraz $y \in Y$ takie, że $X' \vdash \{y\}$.*

Twierdzenie 31. *Niech $\mathscr{S} = (U, \vdash_{\mathscr{C}})$ będzie systemem Tarskiego indukowanym przez kontekst formalny $\mathscr{C} = (U, \tau, \in)$, gdzie (U, τ) jest topologiczną przestrzenią Aleksandrowa. Wtedy dla $X, Y \subseteq U$ zachodzi:*

$$\text{jeżeli } \ X \vdash_{\mathscr{C}} Y, \ \text{ to pewien element } \ y \ \text{ zbioru } \ Y \ \text{ należy do } \ \in^{+}\in_{+}(X).$$

Zatem wyróżnioną ontologią jest tutaj ontologia formalnej analizy pojęć, tj. krata pojęć indukowana przez kontekst formalny. Niemniej, w szczególnym przypadku topologicznych przestrzeni aproksymacyjnych ontologia teorii zbiorów przybliżonych może być dalej stosowana.

Twierdzenie 32. *Niech $\mathscr{S} = (U, \vdash_{\mathscr{C}})$ będzie systemem Tarskiego indukowanym przez kontekst formalny $\mathscr{C} = (U, \tau_E, \in)$, gdzie (U, τ_E) jest topologiczną przestrzenią aproksymacyjną. Wtedy dla $X, Y \subseteq U$ zachodzi:*

$$\textit{jeżeli } X \vdash_{\mathscr{C}} Y, \ \textit{ to pewien element } y \ \textit{ zbioru } \ Y \ \textit{ należy do } \ \overline{X}.$$

Przejdźmy teraz do klasycznej relacji konsekwencji.

Definicja 21 (Standardowy system Tarskiego)**.** *Niech $\mathscr{S} = (S, \vdash)$ będzie systemem Scotta. Wtedy przez* standardowy system Tarskiego *nad $\mathscr{S}$ rozumiemy $\mathscr{T}_{\mathscr{S}} = (S, \vdash_{ST})$, gdzie relacja $\vdash_{ST} \subseteq \mathscr{P}S \times S$ jest zdefiniowana jak następuje:*

$$X \vdash_{ST} x \overset{def}{\Leftrightarrow} X \vdash \{x\},$$

dla $X \subseteq S$ oraz $x \in S$.

Standardowy system Tarskiego $\mathscr{T} = (U, \vdash_{ST})$ nad systemem Scotta $\mathscr{S} = (U, \vdash_{\mathscr{C}})$ będącym (kanonicznym) systemem nad kontekstem formalnym $\mathscr{C} = (U, M, f)$, oznaczać będziemy przez $\mathscr{T}_{\mathscr{C}}$.

Twierdzenie 33. *Niech $\mathscr{T}_{\mathscr{C}} = (U, \vdash_{ST})$ będzie standardowym systemem Tarskiego nad kontekstem formalnym $\mathscr{C} = (U, \tau, \in)$, gdzie (U, τ) jest przestrzenią Aleksandrowa. Wtedy zbiór $X \subseteq U$ jest domknięty ze względu na relację $\vdash_{ST}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \in^{+}\in_{+}(X)$.*

Jak poprzednio, w przypadku topologicznych przestrzeni aproksymacyjnych nie ma znaczenie, która ontologia jest używana.

Twierdzenie 34. *Niech $\mathscr{T}_{\mathscr{C}} = (U, \vdash_{ST})$ będzie standardowym systemem Tarskiego nad kontekstem formalnym $\mathscr{C} = (U, \tau_E, \in)$, gdzie (U, τ_E) jest topologiczną przestrzenią aproksymacyjną. Wtedy $X \subseteq U$ jest domknięty na relację $\vdash_{ST}$ pod warunkiem, że $X = \overline{X}$.*

Wróćmy teraz do prac D. Scotta, który wprowadził bardzo ogólne i ważne pojęcie systemu informacyjnego.

Definicja 22 (System informacyjny Scotta)**.** Systemem informacyjnym Scotta *nazywamy strukturę $(S, Con, \vdash)$, taką że*

- *S jest niepustym zbiorem obiektów,*
- *Con jest rodziną skończonych podzbiorów S (zwanych zbiorami niesprzecznymi) taką że $\emptyset \in Con$,*
- *$\vdash \subseteq Con \times S$ jest relację binarną (relacją wynikania),*

taką że dla $X, Y \subseteq S$ oraz $x, y, z \in S$ zachodzą następujące warunki:

- *jeżeli $X \subseteq Y$ oraz $Y \in Con$, to $X \in Con$,*
- *jeżeli $x \in S$, to $\{x\} \in Con$,*

- *jeżeli $X \vdash x$ oraz $X \in Con$, to $X \cup \{x\} \in Con$,*
- *jeżeli $x \in X$ oraz $X \in Con$, to $X \vdash x$,*
- *jeżeli dla każdego $y \in Y$ zachodzi $X \vdash y$ oraz $Y \vdash z$, to $X \vdash z$.*

Systemy Scotta są bardzo ogólnymi strukturami pozwalającymi włączyć w jedne ramy pojęciowe wiele różnych struktur matematycznych, w szczególności systemy omówione powyżej.

Twierdzenie 35. *Niech $\mathscr{T}_{\mathscr{C}} = (U, \vdash_{ST})$ będzie standardowym systemem Tarskiego nad kontekstem formalnym $\mathscr{C} = (U, \tau, \in)$, gdzie (U, τ) jest przestrzenią Aleksandrowa, a zbiór Con jest trywialny, tj. $Con = \mathscr{P}U$. Wtedy $(U, Con, \vdash_{ST})$ jest systemem informacyjnym Scotta.*

Twierdzenie 36. *Niech $\mathscr{C} = (U, \tau, \in)$ będzie kontekstem formalnym, gdzie (U, τ) jest skończoną przestrzenią Aleksandrowa oraz*

$$X \vdash_{FCA} x \overset{def}{\Leftrightarrow} x \text{ należy do } \in^{+}\in_{+}(A).$$

Wtedy $(U, Con, \vdash_{FCA})$ jest systemem informacyjnym Scotta, gdzie Con jest trywialny.

Twierdzenie 37. *Niech $\mathscr{C} = (U, \tau, \in)$ będzie topologicznym kontekstem formalnym, gdzie (U, τ) jest skończoną przestrzenią Aleksandrowa oraz*

$$X \vdash_{RST} x \overset{def}{\Leftrightarrow} x \text{ należy do } \in^{\forall}\in_{\exists}(A).$$

Wtedy $(U, Con, \vdash_{FCA})$ jest systemem informacyjnym Scotta, gdzie Con jest trywialny.

Reasumując powyższe wyniki, praca *Rough Set theory: Ontological Systems, Entailment Relations, and Approximation Operators* jest kontynuacją badań nad związkami pomiędzy teorią zbiorów przybliżonych oraz formalną analizą pojęć. Obydwie teorie oferują dwa różne zbiory pojęć definiowalnych (dokładnych) – nazwaliśmy je odpowiednio ontologią RST oraz ontologią FCA. We wcześniej prezentowanych pracach obydwie ontologie były omówione w kontekście przestrzeni topologicznych. Tym razem odpowiedzieliśmy na inne interesujące pytanie, mianowicie, jak te ontologie mogą zostać scharakteryzowane w perspektywie operacji konsekwencji Scotta i systemów Scotta.

1.6 Algebry monadyczne Halmosa

Praca *Monadic Algebras: a Standpoint on Rough Sets* (Fundamenta Informaticae 108 (3-4), 181–196, 2011) omawia operatory aproksymacji pojęć w perspektywie prac P. Halmosa [34, 35] i A. Monteiro [55]. Porusza związki operatorów aproksymacji z normalnymi logikami modalnymi **S4** i **S5** w perspektywie przestrzeni topologicznych. Poniżej omówione zostaną jedynie wyniki teoretyczne z pominięciem rozważanych w pracy zastosowań w rozumowaniach indukcyjnych.

Definicja 23 (Algebra **S4**)**.** Algebrą **S4** *nazywamy system* $(U, \vee, \wedge, -, 0, 1, C)$*, taki że* $(U, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ *jest algebrą Boole'a, gdzie* 0 *jest elementem minimalnym oraz* 1 *jest elementem maksymalnym, a operator domknięcia C spełnia następujące warunki:*

(i) $C(0) = 0$*,*

(ii) $x \leq C(x)$*,*

(iii) $C(C(x)) = C(x)$*,*

(iv) $C(x \vee y) = C(x) \vee C(y)$*,*

dla wszystkich $x, y \in U$*. Element* $x \in U$ *nazywamy* domkniętym*, gdy* $C(x) = x$*. Operator dualny* $I(x) = -C(-x)$*,* $x \in U$*, nazywany jest* operatorem wnętrza*.*

Definicja 24 (Algebra **S5**)**.** *Algebra **S4*** $(U, \vee, \wedge, -, 0, 1, C)$ *spełniająca następujące warunki:*

(i) $C(I(x)) = I(x)$*,*

(ii) $I(C(x)) = C(x)$*,*

dla $x \in U$*, nazywana jest* algebrą **S5***.*

Związki operatorów aproksymacji z algebrą **S5** były oczywiste od samych początków teorii zbiorów przybliżonych. Poniższe twierdzenie jest jedynie przypomnieniem prostego faktu należącego do folkloru tej teorii.

Twierdzenie 38. *Dla zupełnego i deterministycznego systemu informacyjnego* $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ *oraz jego aproksymacyjnej przestrzeni topologicznej* (U, τ_E)*, system*

$$(\mathscr{P}U, \cup, \cap, -, \emptyset, U, E_\forall E^\exists),$$

gdzie symbol $-$ *oznacza operację dopełnienia zbioru, jest algebrą **S5**.*

Definicja 25 (Monadyczna algebra Boole'a)**.** *System* $(U, \vee, \wedge, -, 0, 1, \exists)$ *nazywamy* monadyczną algebrą Boole'a *(MBA), gdy* $(U, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ *jest algebrą Boole'a, a* $\exists$ *jest kwantyfikatorem egzystencjalnym, który spełnia następuje warunki:*

(i) $\exists 0 = 0$*,*

(ii) $x \leq \exists x$*,*

(iii) $\exists(\exists x \wedge y) = \exists x \wedge \exists y$*.*

Związki MBA oraz algebry **S5** są bardzo silne [34, 35, 55]:

Twierdzenie 39 (P. Halmos, A. Monteiro)**.** *Każda MBA is algebrą **S5**.*

L. Iturrioz [38] zauważyła, że każda przestrzeń aproksymacyjna (U, E) jest jedynie nową reprezentacją pewnej MBA $(\mathscr{P}U, \cap, \cup, -, \emptyset, U, \overline{})$, gdzie $(\mathscr{P}U, \cap, \cup, -, \emptyset, U)$ jest algebrą Boole'a oraz $\overline{}$ jest operatorem aproksymacji górnej indukowanym przez relację E.

Twierdzenie 40 (L. Iturrioz)**.** *Niech $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ będzie zupełnym i deterministycznym systemem informacyjnym oraz niech (U, E) będzie jego przestrzenią aproksymacyjną. Wtedy $(\mathscr{P}U, \cap, \cup, -, \emptyset, U, \overline{})$, gdzie $\overline{}$ jest operatorem górnej aproksymacji, jest MBA.*

W późnych latach pięćdziesiątych XX wieku A. Monteiro [55] udowodnił że MBA oparta na operatorze górnej aproksymacji jest bardzo ważna dla teorii tych algebr (w oryginalnym brzmieniu nie ma mowy o zbiorach przybliżonych).

Twierdzenie 41 (A. Monteiro)**.** *Każda MBA jest izomorficzna z pewną MBA postaci $(\mathscr{P}U, \cap, \cup, -, \emptyset, U, \overline{})$, gdzie $\overline{}$ is operatorem górnej aproksymacji dla pewnej przestrzeni aproksymacyjnej (U, E).*

P. Halmos w pracy [34] podał istotną charakterystykę aproksymacyjnych przestrzeni topologicznych (które jednak nazywał inaczej).

Twierdzenie 42 (P. Halmos)**.** *Przestrzeń topologiczna (U, τ) jest aproksymacyjną przestrzenią topologiczną wtedy i tylko wtedy, gdy jej operator domknięcia Cl jest kwantyfikatorem egzystencjalnym (wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathscr{P}U, Cl)$ jest MBA).*

Dowolny system informacyjny $\mathscr{I}$ – niekoniecznie zupełny i deterministyczny – może być rozpatrywany jako zbiór z pewnym porządkiem R zwanym *porządkiem informacyjnym*:

$$xRy \overset{def}{\Leftrightarrow} (inf(x,A) = v \Rightarrow inf(y,A) = v),$$

dla wszystkich atrybutów A takich że wartość $inf(x,A)$ jest zdefiniowana.

Twierdzenie 43. *Dla zupełnego i deterministycznego systemu informacyjnego $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ oraz jego przestrzeni aproksymacyjnej (U, E) zachodzi: $R = E$.*

Twierdzenie 44. *Dla dowolnego systemu informacyjnego $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ i porządku informacyjnego R, system*

$$(\mathscr{P}U, \cup, \cap, -, \emptyset, U, R_\forall R^\exists)$$

*jest algebrą **S4**.*

Zatem w ogólnym przypadku mamy do czynienia z operatorem domknięcia, który w oryginalnej wersji teorii zbiorów przybliżonych był również kwantyfikatorem egzystencjalnym. W pracy *Monadic Algebras: a Standpoint on Rough Sets* omawiane są związki formalne pomiędzy tymi dwoma operatorami. Ponieważ operator aproksymacji górnej dla pewnych systemów nie jest kwantyfikatorem, można zapytać, w jaki sposób da się przywrócić utracony kwantyfikator. Pierwszym wyjściem jest użycie logiki **S4+S5** wprowadzonej przez B. Benneta [6]. Logika **S4+S5** jest najmniejszym zbiorem formuł zwierającym aksjomaty **S4** dla operatora C, aksjomaty **S5** dla kwantyfikatora $\exists$ oraz aksjomat łączący te operatory: $\forall\phi \to I\phi$; jak zwykle wymaga się aby ten zbiór był zamknięty ze względu na standardowe modalne reguły dowodzenia. Modelem tej logiki jest algebra **S4+S5**.

Definicja 26 (Algebra **S4+S5**)**.** *System $(U, \vee, \wedge, -, 0, 1, C, \exists)$ jest algebrą **S4+S5** gdy:*

(i) $(U,\vee,\wedge,-,0,1,C)$ *jest algebrą* ***S4****,*

(ii) $(U,\vee,\wedge,-,0,1,\exists)$ *jest MBA,*

(iii) $C(x) \leq \exists y$.

Twierdzenie 44 pozwala wziąć $R_{\forall}R^{\exists}$ jako operator **S4** i poszukać kwantyfikatora $\exists$ spełniającego warunki algebry **S4+S5**.

Twierdzenie 45. *Niech* $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ *będzie systemem informacyjnym oraz R jego porządkiem informacyjnym. Zdefiniujmy* $\exists$ *przez:*

$$\exists x = \begin{cases} U, & \textit{jeżeli} \quad x \neq \emptyset, \\ \emptyset & \textit{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Wtedy system $(\mathscr{P}U,\cup,\cap,-,\emptyset,U,R_{\forall}R^{\exists},\exists)$ *jest algebrą* ***S4+S5****.*

Niestety G. Bezhanishvili oraz M. Gehrke [7] dowiedli że mniej trywialny kwantyfikator nie istnieje.

Twierdzenie 46 (G. Bezhanishvili, M. Gehrke)**.** *Każda algebra* ***S4+S5*** *nad przestrzenią topologiczną* (U,τ) *jest prosta: jeżeli* $X \neq \emptyset$*, to* $\exists X = U$*, dla każdego* $X \subseteq U$*.*

Aby uniknąć trywialności potrzebujemy dwóch topologii zamiast jednej. W definicji algebry **S5** operatory C oraz I indukowane są przez jedną topologię. Gdy pominiemy ten warunek otrzymamy przestrzeń bitopologiczną.

Definicja 27 (Przestrzeń bitopologiczna)**.** *Trójkę* (U, Int_1, Cl_2) *nazywamy* przestrzenią bitopologiczną *gdy U jest niepustym zbiorem,* Int_1 *jest operatorem wnętrza,* Cl_2 *jest operatorem domknięcia oraz:*

$$Int_1(X) = Cl_2(Int_1(X)) \;\; i \;\; Cl_2(X) = Int_1(Cl_2(X)),$$

dla $X \subseteq U$*.*

Jak zwykle, operator dualny do Int_1 oznaczany jest przez Cl_1, a operator dualny do Cl_2 przez Int_2.

Twierdzenie 47. *Dla systemu informacyjnego* $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ *oraz jego porządku informacyjnego R,* $(U, R_{\exists}R^{\forall}, R^{\forall}R_{\exists})$ *jest przestrzenią bitopologiczną.*

Definicja 28 (Operator pre-domknięcia)**.** *Operatorem pre-domknięcia* $[\;]_p$ *na zbiorze U nazywamy funkcję spełniającą następujące warunki:*

(i) $[\emptyset]_p = \emptyset$,

(ii) $X \subseteq [X]_p$ *dla* $X \subseteq U$*,*

(iii) $[X \cup Y]_p = [X]_p \cup [Y]_p$ *dla* $X \subseteq U$ *oraz* $Y \subseteq U$*.*

$$
\begin{tikzcd}
\text{zbiór pre-uporządkowany } (U,R) \arrow[r] \arrow[d, "\text{E = przechodnie i symetryczne domknięcie R}"'] & \text{pre-domknięcie } p = R_{\forall}R^{\exists} \circ R^{\forall}R_{\exists} \arrow[d, "\text{topologia } \tau_p \text{ generowana przez } p"'] \\
\text{przestrzeń aproksymacyjna } (U,E) \arrow[r, "\text{aproksymacyjna przestrzeń topologiczna } \tau_p"] & \text{przestrzeń topologiczna } (U,\tau_p)
\end{tikzcd}
$$

Rysunek 1.6: Diagram zależności

Twierdzenie 48. *Dla sytemu informacyjnego $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ oraz jego przestrzeni bitopologicznej $(U, R_{\exists}R^{\forall}, R^{\forall}R_{\exists})$,*

$$R_{\forall}R^{\exists} \circ R^{\forall}R_{\exists} \text{ oraz } R^{\forall}R_{\exists} \circ R_{\forall}R^{\exists}$$

są operatorami pre-domknięcia.

Zbiór $X \subseteq U$ jest domknięty ze względu na operator pre-domknięcia $[\ ]_p$, gdy $[X]_p = X$. Zbiór $X \subseteq U$ jest otwarty ze względu na ten operator, gdy jego dopełnienie $U \setminus X$ jest zbiorem domkniętym. Jak wiadomo, rodzina zbiorów otwartych generowanych przez operator pre-domknięcia jest topologią τ_p na zbiorze U.

Twierdzenie 49. *Niech będzie dany system informacyjny $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$, jego przestrzeń bitopologiczna $(U, R_{\exists}R^{\forall}, R^{\forall}R_{\exists})$ oraz operator $[\ ]_p = R_{\forall}R^{\exists} \circ R^{\forall}R_{\exists}$. Wtedy operator domknięcia Cl_p indukowany przez przestrzeń bitopologiczną (U, τ_p) jest kwantyfikatorem.*

Tak otrzymany kwantyfikator jest nietrywialny i może mieć zastosowanie w analizie danych. W pracy *Monadic Algebras: a Standpoint on Rough Sets* omówiony jest przykład dotyczący indukcji na kategoriach, którego w niniejszym streszczeniu nie będziemy omawiać. Diagram na Rys. 1.6 ilustruje zależności pomiędzy omówionymi pojęciami.

W niniejszym rozdziale pokazaliśmy, że zaczątki teorii zbiorów przybliżonych można odnaleźć w pracach P. Halmosa oraz A. Monteiro opublikowanych w latach sześćdziesiątych poprzedniego stulecia. Głównym pomysłem było zdefiniowanie operatora górnej aproksymacji jako kwantyfikatora egzystencjalnego. Powstało w związku z tą definicją pytanie jak można zdefiniować taki kwantyfikator w przypadku niezupełnych i niedeterministycznych systemów informacyjnych. Raz jeszcze okazało się, że do rozwiązania nowego problemu potrzebujemy zarówno teorii zbiorów przybliżonych oraz formalnej analizy pojęć.

1.7 Operatory aproksymacji w języku deskryptorów

Praca *Incomplete and Nondeterministic Information Systems: Object-Directed Semantics for Descriptor Languages* (Fundamenta Informaticae 109 (3), 355–368, 2011) podejmuje tematykę operatorów aproksymacji w językach deskryptorów nad systemami informacyjnymi. Związki teorii zbiorów przybliżonych i modalnych logik normalnych są dość oczywiste i dobrze zbadane, np. [3, 130]. Omawiana tutaj praca rozszerza badania operatorów aproksymacji na logiki modalne, które nie są normalne.

Definicja 29 (Język modalny)**.** *Niech będzie dany zbiór zmiennych zdaniowych Φ, którego elementy zwykle oznaczamy p, q, r itd., oraz operator modalny $\Diamond$. Formuły są zadane przez następującą gramatykę:*

$$\alpha ::= p \mid \neg\alpha \mid \alpha \vee \beta \mid \Diamond\alpha,$$

gdzie p należy do zbioru Φ. Zbiór formuł tego języka oznaczać będziemy przez $\mathscr{F}$.

Definicja 30 (Model Kripkego)**.** Modelem Kripkego *nazywamy trójkę (W,R,v), gdzie W jest niepustym zbiorem światów, $R \subseteq W \times W$ oraz $v : W \times \Phi \to \{0,1\}$ jest funkcją przyporządkowującą każdej parze (w,p), $w \in W$ oraz $p \in \Phi$, wartość logiczną 1 (prawda) albo 0 (fałsz). Dla ułatwienia notacji, zwykle piszemy np. $v_w(p)$ zamiast $v(w,p)$. Funkcja v jest rozszerzana na dowolną formułę $\alpha \in \mathscr{F}$ w standardowy sposób:*

- *$v_w(\neg\alpha) = 1$, jeżeli $v_w(\alpha) = 0$, oraz 0 w przeciwnym razie,*
- *$v_w(\alpha \wedge \beta) = 1$, jeżeli $v_w(\alpha) = 1$ i $v_w(\beta) = 1$, oraz 0 w przeciwnym razie,*
- *$v_w(\Diamond\alpha) = 1$, jeżeli dla pewnego $w' \in W$, takiego że wRw', $v_{w'}(\alpha) = 1$, oraz 0 w przeciwnym razie,*
- *$v_w(\Box\alpha) = 1$, jeżeli dla wszystkich $w' \in W$, takich że wRw', $v_{w'}(\alpha) = 1$, oraz 0 w przeciwnym razie.*

Definicja 31 (Konsekwencja semantyczna)**.** *Niech $\Sigma \subseteq \mathscr{F}$ oraz $\alpha \in \mathscr{F}$:*

- *$\Sigma \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego modelu Kripkego (W,R,v) i każdego świata $w \in W$, jeżeli $v_w(\beta) = 1$ dla każdego $\beta \in \Sigma$, to $v_w(\alpha) = 1$;*

Zwyczajowo piszemy $\models \alpha$ zamiast $\emptyset \models \alpha$.

Dla każedego modelu Kripkego zdefiniujmy:

$$|\alpha| = \{w \in W : v_w(\alpha) = 1\}.$$

Twierdzenie 50. *Każda przestrzeń aproksymacyjna (U,E) oraz funkcja $v : \Phi \to \mathscr{P}U$ indukują model Kripkego (U,E,v) dla logiki S5, gdzie $v_w(p) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \in v(p)$, dla każdej formuły $p \in \Phi$.*

$$|\Box\alpha| = \underline{|\alpha|} \quad \textit{oraz} \quad |\Diamond\alpha| = \overline{|\alpha|}.$$

Oczywiście, modalne podejście pozwala uogólnić operatory aproksymacji przy użyciu innych dobrze znanych modalnych logik normalnych **KT**, **S4**, **K4** itp. [3, 130].

Jednym z głównych celów pracy *Incomplete and Nondeterministic Information Systems: Object-Directed Semantics for Descriptor Languages* było jednak znalezienie związków pomiędzy teorią zbiorów przybliżonych a logikami modalnymi, które nie są normalne. Punktem wyjścia dla badań była następująca obserwacja.

Twierdzenie 51. *Niech $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ będzie zupełnym i deterministycznym systemem informacyjnym oraz (U, E, v) indukowanym modelem Kripkego. Wtedy dla języka deskryptorów $\mathscr{L}_{Desc}$ nad $\mathscr{I}$ otrzymujemy:*

$$|\Box\alpha| = \underline{|\alpha|} = |\alpha| \quad \textit{oraz} \quad |\Diamond\alpha| = \overline{|\alpha|} = |\alpha|,$$

dla $\alpha \in \mathscr{F}_{Desc}$.

Twierdzenie wyraża dość oczywisty fakt, że zbiory definiowalne w $\mathscr{L}_{Desc}$ to zbiory definiowalne w systemie informacyjnym $\mathscr{I}$.

Definicja 32 (Niestandardowy model Kripkego)**.** Niestandardowym modelem Kripkego *nazywamy model Kripkego w którym wyróżniony jest zbiór światów normalnych $N \subseteq W$, tj. (W, N, R, v). Jeżeli $w \in W$ lecz $w \notin N$, wtedy w nazywamy światem* niestandardowym.

Ze względów językowych używać będziemy podziału na światy normalne i niestandardowe (lub na światy standardowe i niestandardowe).

Semantyka zwykłych spójników się nie zmienia; semantyka operatorów modalnych $\Box$ oraz $\Diamond$ dla światów normalnych również pozostaje bez zmian. Jeżeli w jest światem niestandardowym, wtedy $v_w(\Box\alpha) = 0$ oraz $v_w(\Diamond\alpha) = 1$, dla $\alpha \in \mathscr{F}$.

Definicja 33 (Niestandardowa konsekwencja semantyczna)**.** *Niech będzie dany zbiór formuł $\Sigma \subseteq \mathscr{F}$ oraz $\alpha \in \mathscr{F}$:*

- *$\Sigma \models \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niestandardowego modelu Kripkego (W, N, R, v) i każdego świata $w \in N$ zachodzi: dla każdego $\beta \in \Sigma$, jeżeli $v_w(\beta) = 1$ to $v_w(\alpha) = 1$;*

Jak zwykle piszemy $\models \alpha$ zamiast $\emptyset \models \alpha$.

Niestandardowe światy zostały wprowadzone przez S. Kripkego [42] w celu otrzymania modeli dla słabych systemów Lewisa. Kiedy R jest relacją zwrotną, wtedy otrzymujemy model logiki **S2**; dla pre-porządku mamy logikę **S3**, a dla relacji równoważności system **S3.5** (który nie był wprowadzony przez Lewisa).

Gdy prawdziwość zdefiniujemy dla dowolnych światów otrzymamy odpowiednio następujące logiki: **E2** (jako sub-logikę **S2**), **E3** (jako sub-logikę **S3**) oraz **E3.5** (jako sub-logikę **S3.5**) [82].

Twierdzenie 51 zachodzi jedynie dla zupełnych i deterministycznych systemów informacyjnych. W ogólnym przypadku operatory modalne w języku deskryptorów nie będą się tak trywializowały.

Dla systemów informacyjnych, które są zupełne i niedeterministyczne E. Orłowska i Z. Pawlak wprowadzili logiki typu *NIL* [59]. Później D. Vakarelov [118, 119, 120] rozszerzył je na systemy niezupełne. W tym podejściu wartościowanie v zdefiniowane jest w bardzo naturalny sposób:

$$v_x([A = val]) = 1, \text{ jeżeli } val \in inf(x, A), \text{ oraz } 0 \text{ w przeciwnym razie.} \tag{1.1}$$

Logiki *NIL* pozwalają wprowadzić następujące relacje [59]:

Podobieństwo: $x\ Sim\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $inf(x,A) \cap inf(y,A) \neq \emptyset$ dla każdego $A \in Att$.

Inkluzja: $x\ Incl\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $inf(x,A) \subseteq inf(y,A)$ dla każdego $A \in Att$.

Relację odwrotną do $Incl$ oznaczamy jak zwykle przez $Incl^{-1}$. Język deskryptorów $\mathscr{L}_{Desc}$ można teraz wzbogacić o operatory modalne $\Box_{Sim}$, $\Box_{Incl}$, $\Box_{Incl^{-1}}$. Tak wzbogacony język oznaczać będziemy przez $\mathscr{L}_{DescNIL}$; semantyka jest standardowa. Jeżeli system informacyjny jest zupełny i deterministyczny, wtedy $Sim = Incl = Incl^{-1} = E$, gdzie E jak zwykle oznacza relację nieodróżnialności w $\mathscr{I}$, i otrzymujemy model dla **S5**. Niestety, obiekty z niezupełnym opisem powodują poważne problemy.

Twierdzenie 52. *Obiekt $x \in U$ z niezupełnym opisem należący do niezupełnego i niedeterministycznego systemu informacyjnego (U, Att, Val, inf) jest tzw. martwym punktem (ang. dead end) dla Sim, tzn. nie jest w relacji Sim z żadnym światem.*

Właśnie dlatego NIL był wprowadzony dla systemów zupełnych. Dla systemów niezupełnych D. Vakarelov używał innej relacji niż *Sim* [118, 119, 120]. Semantyka dla $\Box_{Sim}$, $\Diamond_{Sim}$, oraz martwego świata $x \in U$ jest następująca:

S : $v_x(\Box_{Sim}\alpha) = 1$ oraz $v_x(\Diamond_{Sim}\alpha) = 0$, dla każdego $\alpha \in \mathscr{L}_{DescNIL}$.

Łatwo zauważyć podobieństwo pomiędzy światami niestandardowymi a punktami martwymi: światy niestandardowe są jakby odwrotnością punktów martwych. Łatwo również zauważyć że *Sim* jest relacją quasi-zwrotną: jeżeli $x \in U$ nie martwym punktem, to $x\ Sim\ x$. Rozpatrzmy zatem zwrotne domknięcie *Sim*, oznaczone przez Sim^R, oraz potraktujmy każdy martwy punkt x dla *Sim* jako świat niestandardowy. Wtedy otrzymamy:

N : $v_x(\Box_{Sim^R}\alpha) = 0$ oraz $v_x(\Diamond_{Sim^R}\alpha) = 1$, dla każdego $\alpha \in \mathscr{L}_{DescNIL}$.

Porównując warunki **S** oraz **N** zauważymy, że **S** jest „odwrotnością” **N**.

Definicja 34 (Interpretacja niestandardowa)**.** *Niech $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ będzie niezupełnym i niedeterministycznym systemem informacyjnym. Przez* niestandardową interpretację *systemu $\mathscr{I}$ rozumiemy niestandardowy model Kripkego (U, N, Sim^R, v), gdzie N zbiorem obiektów z zupełnym opisem oraz v jest zdefiniowane przez (1.1).*

Jeżeli prawdziwość zdefiniujemy w terminach światów normalnych, wtedy otrzymamy niestandardowe logiki typu NIL. Jeżeli zrobimy to w terminach dowolnych światów, wtedy otrzymamy E-wariant logik typu NIL. Wadą takiego rozwiązania problemu rozumowań w systemach niezupełnych i niedeterministycznych jest absolutny charakter niestandardowości światów: jeżeli świat jest niestandardowy, to jest taki dla każdej formuły. Jednak w perspektywie klasycznych wartości logicznych, dla formuły $[A = val]$ relewantne są jedynie te obiekty $x \in U$, którym funkcja inf przyporządkowuje dokładnie jedną wartość. Wyrazimy ten fakt używając relacji $Sing \subseteq \Phi \times U$ (dla ułatwienia notacji używać będziemy formy prefiksowej).

$Sing([A = val], x)$, jeżeli inf przyporządkowuje (x,A) dokładnie jedną wartość $val \in Val_A$, tj. $inf(x,A) = \{val\}$.

W porównaniu do wcześniejszego podejścia, tym razem oprócz obiektów posiadających niezupełny opis, do światów niestandardowych zaliczymy również obiekty, których opis jest niedeterministyczny. Następną różnicą jest względność statusu świata/obiektu (normalność lub niestandardowość) w stosunku do danej formuły atomicznej. Tak zdefiniowany status można rozszerzyć na dowolną formułę:

> $Sing(\alpha, x)$, jeżeli dla każdej atomicznej formuły $[A = val]$ występującej w α, inf przyporządkowuje (x, A) dokładnie jedną wartość $val \in Val_A$.

Nazwijmy świat x *normalnym* dla formuły α, gdy $Sing(\alpha, x)$. Zatem – podkreślmy jeszcze raz – w przeciwieństwie do poprzedniego podejścia, światy są normalne relatywnie do danej formuły. Światy, które są normalne dla każdej formuły nazywać będziemy *światami absolutnie normalnymi*.

Naśladując logiki typu *NIL*, możemy wprowadzić różne relacje pomiędzy obiektami:

- Podobieństwo normalne: $x\ Nsim\ y$ wtedy i tylko wtedy gdy $inf(x,A) = inf(y,A)$ dla każdego $A \in Att$, takiego że $Sing([A = val], x)$ oraz $Sing([A = val], y)$.

Oczywiście *Nsim* jest relacją zwrotną i symetryczną. Dla światów absolutnie normalnych wprowadźmy relację równoważności.

- Nieodróżnialność: $x\ Ind\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $inf(x,A) = inf(y,A)$ dla każdego $A \in Att$.

Aby zbudować model Kripkego potrzebujemy jednej relacji. Ponieważ światy absolutnie normalne dadzą się podzielić na rozłączne klasy abstrakcji relacji *Ind*, tak jak w oryginalnej wersji teorii zbiorów przybliżonych, one będą stanowiły podstawę nowego modelu. Dla absolutnie normalnego świata x, jego klasa abstrakcji będzie nazywana normalną. Jeżeli jakiś obiekt z (który nie jest absolutnie normalny) jest w relacji *Nsim* do n elementów z różnych normalnych klas abstrakcji $[x_i]_{Ind}$, wtedy z zastąpimy n kopiami etykietowanym przez te klasy z_{x_i} i traktować będziemy jako różne obiekty. Jeżeli z nie jest w relacji *Nsim* z żadnym elementem z klasy normalnej, wtedy usuwamy go z systemu. Jeżeli dodamy z_{x_i} do $[x_i]_{Ind}$, to w rezultacie otrzymamy podział (partycję). Powtarzając ten proces dla wszystkich światów, które nie są absolutnie normalne otrzymamy podział finalny. Relację równoważności odpowiadającą temu podziałowi oznaczać będziemy przez Q. W konsekwencji takiego procesu otrzymamy przestrzeń aproksymacyjną (U_Q, Q), gdzie U_Q oznacza końcowy zbiór otrzymany w wyniku duplikowania i usuwania obiektów, które nie są absolutnie normalne.

Mając do dyspozycji przestrzeń aproksymacyjną (U_Q, Q), oczywiście można by w tym miejscu użyć poprzednich rozwiązań. Niemniej, w przypadku kopiowania obiektów końcowy rezultat nie jest wcale intuicyjny. J. Małuszyński, A. Szałas oraz A. Vitòria do analizy informacyjnych systemów Pawlaka użyli podejścia opartego na logikach wielowartościowych [46]. Jak wykazali w swojej pracy, rozwiązanie oparte na logice 4-wartościowej daje wyniki bardziej intuicyjne niż podejście klasyczne. Oczywiście można użyć innej logiki niż 4-wartościowa; my użyjemy najprostszej logiki 3-wartościowej, mianowicie słabej logiki Kleeniego.

Niech będzie dany model Kripkego (U_Q, Q, v) generowany jak wyżej przez niezupełny i niedeterministyczny system informacyjny (U, Att, Val, inf). Zdefiniujmy teraz wartościowanie dla języka $\mathscr{L}_{Desc}$ poszerzonego o operatory modalne; wartościowanie v będzie oparte na słabej logice Kleenego.

$$v_x([A = val]) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } inf(x,A) = val, \\ 0, & \text{if } Sing([A = val],x) \text{ oraz } inf(x,A) \neq val, \\ 2 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Wartościowanie jest rozszerzone na dowolne formuły w sposób następujący:

$$v_x(\neg\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } Sing(\alpha,x) \text{ oraz } v_x(\alpha) \neq 1, \\ 0, & \text{jeżeli } Sing(\alpha,x) \text{ oraz } v_x(\alpha) \neq 0, \\ 2 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$v_x(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } v_x(\alpha) = 1 \text{ oraz } v_x(\beta) = 1, \\ 0, & \text{jeżeli } Sing(\alpha,x),\ Sing(\beta,x), \text{ oraz } v_x(\alpha) = 0 \text{ lub } v_x(\beta) = 0, \\ 2 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$v_x(\Diamond\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } Sing(\alpha,x) \text{ i dla pewnego } y \in U, \text{ takiego że } x\,Q\,y,\ v_y(\alpha) = 1, \\ 0, & \text{jeżeli } Sing(\alpha,x) \text{ i dla każdego } y \in U, \text{ takiego że } x\,Q\,y,\ v_y(\alpha) = 0, \\ 2 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Na koniec możemy dodać globalny operator aproksymacji dolnej $\Box$:

$$v_x(\Box\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli dla każdego } y \in U, \text{ takiego że } x\,Q\,y,\ v_y(\alpha) = 1, \\ 0, & \text{jeżeli dla pewnego } y \in U, \text{ takiego że } x\,Q\,y,\ v_y(\alpha) = 0, \\ 2 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{1.6}$$

W rzeczywistości, jak łatwo wykazać, otrzymamy model równoważny semantyce logiki $\mathscr{Q}$ [83, 84, 85], tj. modelowi Priora.

Definicja 35 (Model Priora)**.** Modelem Priora *nazywamy parę* (W, v)*, gdzie* W *jest niepustym zbiorem światów oraz* $v : W \times \Phi \to \{0,1,2\}$ *jest wartościowaniem, które każdej parze* (w, p) *przyporządkowuje wartość logiczną ze zbioru* $\{0,1,2\}$*. Funkcja* v *jest rozszerzana na dowolną formułę następująco (jak zwykle, dla uproszczenia notacji piszemy* $v_w(\alpha)$*):*

- $v_w(\alpha) = 2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej formuły atomicznej* $p \in \Phi$ *występującej w* α*,* $v_w(p) = 2$*,*

- *jeżeli* $v_w(\alpha) \neq 2$ *oraz* $v_w(\beta) \neq 2$*, wtedy*

$$v_w(\neg\alpha) = \begin{cases} 1, & \textit{jeżeli } v_w(\alpha) \neq 1, \\ 0 & \textit{w przeciwnym razie,} \end{cases} \tag{1.7}$$

$$v_w(\alpha \wedge \beta) = \begin{cases} 1, & \textit{jeżeli } v_w(\alpha) = 1 \textit{ oraz } v_w(\beta) = 1, \\ 0 & \textit{w przeciwnym razie,} \end{cases} \tag{1.8}$$

$$v_w(\Diamond\alpha) = \begin{cases} 1, & \textit{jeżeli dla pewnego } w' \in W,\ v_{w'}(\alpha) = 1, \\ 0, & \textit{jeżeli dla każdego } w' \in W,\ v_{w'}(\alpha) = 0, \\ 2 & \textit{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{1.9}$$

Ponieważ w pracy jesteśmy zainteresowani operatorami modalnymi, które mogą służyć jako operatory aproksymacji wygodnie będzie dodać jeszcze silną konieczność.

$$v_w(\Box\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli dla każdego } w' \in W,\ v_{w'}(\alpha) = 1, \\ 0, & \text{jeżeli dla pewnego } w' \in W,\ v_{w'}(\alpha) = 1, \\ 2 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{1.10}$$

W latach pięćdziesiątych minionego wieku A. Prior [83, 84, 85] wprowadził wielowartościową logikę modalną $\mathscr{Q}$ do opisu bytów kontyngentnych. Proponował aby do zwykłych obiektów dodać tzw. *possibilia*. W naszym przypadku tego typu possibiliami byłyby obiekty, które nie są absolutnie normalne. Zauważmy, że obiekty, które takie nie są mogą mieć kilka kopii, i w tym sensie ich istnienie w systemie informacyjnym jest inne niż istnienie obiektów standardowych.

1.8 Percepcja i kategoryzacja

Praca *Perception and Classification. A Note on Near Sets and Rough Sets* (Fundamenta Informaticae 101 (1-2), 143–155, 2010) omawia operatory aproksymacji w odniesieniu do przestrzeni ilorazowych indukowanych przez przestrzenie aproksymacyjne. Przestrzenie ilorazowe są szczególnie ważne w obliczeniach granularnych, gdzie z zasady obliczenia (operacje) nie są wykonywane na obiektach, ale na zbiorach obiektów [4, 37, 73, 99, 100, 101, 103, 104, 107, 109]. Punktem wyjścia badań jest następująca obserwacja:

Definicja 36 (Topologia ilorazowa)**.** Topologią ilorazową *na zbiorze V (generowaną przez funkcję $f : U \to V$ oraz topologię τ na U) jest rodzina $\tau_f = \{Y \subseteq V : f^{-1}(Y) \in \tau\}$ podzbiorów zbioru V, których przeciwobrazy są otwarte w U.*

Twierdzenie 53. *Topologiczna przestrzeń aproksymacyjna (U, τ_E) indukuje dyskretną topologię ilorazową na zbiorze U/E, gdzie funkcją generującą jest naturalna projekcja $p : U \to U/E$ przyporządkowująca każdemu elementowi $x \in U$ jego klasę abstrakcji $[x]_E \in U/E$.*

W konsekwencji otrzymujemy:

Twierdzenie 54. *Niech (U, τ_E) będzie topologiczną przestrzenią aproksymacyjną; wtedy*

$$\overline{X} = p^{-1}(p(X)),$$

dla każdego $X \subseteq U$.

Zatem operator górnej aproksymacji może być zdefiniowany w oparciu o dyskretną topologię na przestrzeni aproksymacyjnej. Naturalne jest pytanie, czy istnieją inne topologie na zbiorze ilorazowym U/E, które mogą być przydatne w analizie danych do zdefiniowania operatorów aproksymacji innych niż operatory operatory wprowadzone przez Z. Pawlaka. Warto podkreślić, że cała wiedza zakodowana w relacji równoważności E została „pochłonięta" przez klasy abstrakcji (tj. punkty przestrzeni U/E) i nie może być dalej użyta do zdefiniowania innej topologii niż dyskretna. Potrzebna jest zatem jakaś dodatkowa struktura, kodująca nowe informacje względem E. W pracy *Perception oraz Classification. A Note on Near Sets oraz Rough Sets* rolę takiej struktury odegrały systemy percepcyjne z teorii zbiorów bliskich.

Teoria zbiorów bliskich została wprowadzona przez J. Petersa [74] do analizy podobieństwa obrazów. W związku z tym większość pojęć zdefiniowana jest przy pomocy terminu "percepcja". Z punktu widzenia czystej matematyki (topologii) teoria zbiorów bliskich może być rozpatrywana jako uogólnienie teorii zbiorów przybliżonych; niemniej poza kontekstem matematycznym, uzasadniona jest również perspektywa odwrotna. Złożone zależności pomiędzy tymi teoriami opisałem w pracy *Toward Foundations of Near Sets: (Pre-)Sheaf Theoretic Approach* (Mathematics in Computer Science 7 (1), 125–136, 2013). Algebraiczne własności zbiorów bliskich omówione zostały przez J. Petersa oraz P. Wasilewskiego w [76].

Definicja 37 (System percepcyjny)**.** Systemem percepcyjnym *jest para* $(U, \mathbb{F})$*, gdzie* U *jest niepustym zbiorem obiektów oraz* $\mathbb{F}$ *przeliczalnym zbiorem funkcji rzeczywistych* $\phi_i : U \to \mathbb{R}$*, zwanych funkcjami próbkującymi.*

Funkcje próbkujące reprezentują pomiary sensoryczne, które dostarczają danych o świecie. W oparciu o te pomiary można wprowadzić kilka relacji pomiędzy obiektami. W poniższych definicjach $abs(\varepsilon)$ oznacza wartość bezwzględną liczby $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Definicja 38 (Relacja percepcyjnej nieodróżnialności)**.** *Niech* $(U, \mathbb{F})$ *będzie systemem percepcyjnym. Dla każdego* $\mathscr{B} \subseteq \mathbb{F}$*,* relacja percepcyjnej nieodróżnialności $\sim_{\mathscr{B}}$ *jest zdefiniowana następująco:*

$$\sim_{\mathscr{B}} = \{(x,y) \in U \times U : \forall \phi_i \in \mathscr{B} \ \ (\phi_i(x) - \phi_i(y) = 0)\}.$$

Jak łatwo zauważyć, ta relacja jest odpowiednikiem relacji nieodróżnialności w teorii zbiorów przybliżonych. Teoria zbiorów bliskich jednak skupiona jest na znacznie słabszych relacjach.

Definicja 39 (Relacja słabej percepcyjnej nieodróżnialności)**.** *Dla systemu percepcyjnego* $(U, \mathbb{F})$ *oraz zbioru* $\mathscr{B} \subseteq \mathbb{F}$ *funkcji próbkujących,* relacja słabej percepcyjnej nieodróżnialności $\simeq_{\mathscr{B}}$ *jest zdefiniowana jak następuje:*

$$\simeq_{\mathscr{B}} = \{(x,y) \in U \times U : \exists \phi_i \in \mathscr{B} \ (\phi_i(x) - \phi_i(y) = 0)\}.$$

Definicja 40 (Percepcyjna relacja tolerancji)**.** *Przy założeniach jak wyżej,* percepcyjna relacja tolerancji $\cong_{\mathscr{B},\varepsilon}$ *jest zdefiniowana przez:*

$$\cong_{\mathscr{B},\varepsilon} = \{(x,y) \in U \times U : \forall \phi_i \in \mathscr{B} \ (abs(\phi_i(x) - \phi_i(y)) \leq \varepsilon)\}.$$

Dla uproszczenia notacji, gdy kontekst jest jednoznaczny, używane będzie oznaczenie $\cong_{\mathscr{B}}$ zamiast $\cong_{\mathscr{B},\varepsilon}$.

Często zamiast obrazu punktu x wyznaczonego przez relację R, tj. $\{y \in U : xRy\}$, wygodniej jest użyć klas i pre-klas relacji tolerancji R.

Definicja 41 (Pre-klasa i klasa)**.** *Zbiór $X \subseteq U$ nazywamy* pre-klasą *relacji $\cong_{\mathscr{B}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich punktów $x, y \in X$, zachodzi $x \cong_{\mathscr{B}} y$. Pre-klasa X nazywana jest* klasą*, jeżeli jest pre-klasą maksymalną względem inkluzji.*

Rozpatrzmy prosty przykład atrybutu „gorączka” (F):

$$F : U \mapsto \{niska, umiarkowana, wysoka, bardzo-wysoka\},$$

przy standardowej interpretacji podanej na Rys. 1.7. Dla tego atrybutu istnieje natural-

	°C	°F
niska	$[38, 39)$	$[100.4, 102.2)$
umiarkowana	$[39, 40)$	$[102.2, 104.0)$
wysoka	$[40, 41.1)$	$[104.0, 106.0)$
bardzo wysoka	≥ 41.1	≥ 106.0

Rysunek 1.7:

ny sensor, mianowicie termometr $t_F : U \to \mathbb{R}$. Funkcja próbkująca t_F generuje relację tolerancji:

$$\cong_{t_F,\varepsilon} = \{(x,y) \in U \times U : abs(t_F(x) - t_F(y)) \leq \varepsilon\}.$$

Rozważmy medyczny system informacyjny $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ oraz dwóch pacjentów x i y mających dokładnie takie same wartości dla wszystkich atrybutów z Att z wyjątkiem gorączki: $t_F(x) = 38.8°C$ oraz $t_F(y) = 39.1°C$. Kiedy ε ustawimy na wartość 0.5, wtedy $x \cong_{t_F,\varepsilon} y$. Zatem x oraz y są percepcyjnie bliskie, niemniej tworzą odrębne klasy abstrakcji $[x]_E$ oraz $[y]_E$ (gdzie E jest relacją nieodróżnialności) używane dalej w klasyfikacji obiektów. Praca *Perception and Classification. A Note on Near Sets and Rough Sets* odpowiada na pytanie, jak można użyć tego typu nowej informacji w aproksymacji pojęć zachowując jednak pierwotną granulację obiektów. Tak jak w przypadku atrybutu „gorączka”, mając dany system informacyjny $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$, możemy rozpatrzeć zbiór funkcji próbkujących $\phi_A : U \to \mathbb{R}$ reprezentujących sensory dla atrybutów z Att. Zatem dla każdego systemu $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ możemy zbudować odpowiadający system percepcyjny $(U, \mathbb{F})$, gdzie $\mathbb{F} = \{\phi_A : A \in Att\}$. Jak wcześniej, taki system percepcyjny indukuje relację tolerancji $\cong_{\mathbb{F}}$:

$$\cong_{\mathbb{F}} = \{(x,y) \in U \times U : \forall \phi_A \in \mathbb{F}\ (abs(\phi_A(x) - \phi_A(y)) \leq \varepsilon)\}.$$

Relacja tolerancji $\cong_{\mathbb{F}}$ może być dalej przeniesiona na przestrzeń ilorazową U/E w bardzo prosty sposób.

Definicja 42 (Ilorazowa relacja tolerancji)**.** *Niech $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ będzie systemem informacyjnym, $(U, \mathbb{F})$ jego systemem percepcyjnym, $E = IND(\mathscr{I})$ oraz $p : U \to$*

U/E. Percepcyjna relacja tolerancji $\cong_{\mathbb{F}}$ indukuje ilorazową relację tolerancji $\cong$ *na zbiorze U/E jak następuje:*

$$\boldsymbol{x} \cong \boldsymbol{y} \ \Leftrightarrow\ \exists x \in U\ \exists y \in U\ \ (p(x) = \boldsymbol{x}\ \&\ p(y) = \boldsymbol{y}\ \&\ x \cong_{\mathbb{F}} y),$$

dla każdych $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in U/E$.

Najprostszą metodą zastosowania nowej sensorycznej informacji płynącej z $\mathbb{F}$ do klasyfikacji (wiedzy) zakodowanej przez relację nieodróżnialności E, jest bezpośrednie użycie relacji $\cong$:

$$\underline{\mathbf{X}}_{\cong} = \{\mathbf{x} \in U/E : [\mathbf{x}]_{\cong} \subseteq \mathbf{X}\},$$

$$\overline{\mathbf{X}}^{\cong} = \{\mathbf{x} \in U/E : [\mathbf{x}]_{\cong} \cap \mathbf{X} \neq \emptyset\},$$

gdzie $[\mathbf{x}]_{\cong} = \{\mathbf{y} \in U/E : \mathbf{x} \cong \mathbf{y}\}$ dla każdego $\mathbf{X} \subseteq U/E$.

Twierdzenie 55. $\overline{}^{\cong} : \mathscr{P}U/E \to \mathscr{P}U/E$ *przyporządkowujący każdemu $\boldsymbol{X} \subseteq U/E$ zbiór $\overline{\boldsymbol{X}}^{\cong}$ jest operatorem pre-domknięcia.*

Jak zwykle, mając do dyspozycji dowolny operator pre-domknięcia $\lceil\ \rceil$, w tym wypadku $\overline{}^{\cong} : \mathscr{P}U/E \to \mathscr{P}U/E$, możemy zdefiniować topologię $\tau_{\lceil\ \rceil}$ w standardowy sposób: $\mathbf{X} \in \tau_{\lceil\ \rceil}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lceil U/E \setminus \mathbf{X}\rceil = U/E \setminus \mathbf{X}$. Jednakże taka topologia zwykle generuje zbyt duże aproksymacje (domknięcia) i lepszym wyjściem jest użycie pierwotnego operatora pre-domknięcia $\lceil\ \rceil$. Para $(U/E, \overline{}^{\cong})$, gdzie $\overline{}^{\cong}$ jest operatorem pre-domknięcia zdefiniowanym powyżej, nazywana będzie *percepcyjną pre-topologią ilorazową*.

Używając kanonicznej projekcji $p : U \to U/E$ możemy dla każdego $X \subseteq U$ zdefiniować oprócz klasycznej aproksymacji górnej $\overline{X}$ również aproksymacje percepcyjne, które biorą pod uwagę nowe pomiary.

Definicja 43 (Prosta aproksymacja percepcyjna)**.** *Niech $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ oznacza system informacyjny, $(U, \mathbb{F})$ będzie jego przestrzenią aproksymacyjną oraz $p : U \to U/E$. Zbiór $\underline{p^{-1}(p(X))}_{\cong_{\mathbb{F}}}$ nazywamy* prostą dolną aproksymacją percepcyjną *X, a zbiór $\overline{p^{-1}(p(X))}^{\cong_{\mathbb{F}}}$ nazywamy* prostą górną aproksymacją percepcyjną *X.*

W przypadku prostych aproksymacji, nowa informacja użyta jest bezpośrednio na uniwersum obiektów. Najpierw tworzona jest klasyczna górna aproksymacja $\overline{X}$ zbioru $X \subseteq U$, a potem dodawane są obiekty bliskie jakiemuś elementowi $\overline{X}$. Z drugiej strony, nową informację możemy zastosować do przestrzeni ilorazowej U/E tak, aby zachować pierwotną granulację obiektów.

Definicja 44 (Aproksymacje percepcyjne)**.** *Przy założeniach opisanych powyżej, zbiór $p^{-1}(\overline{p(X)}^{\cong})$ nazywamy* górną aproksymacją percepcyjną *X.* Dolna aproksymacja percepcyjna *jest zdefiniowana jako aproksymacja dualna do górnej aproksymacji percepcyjnej.*

Zauważmy, że żadna z aproksymacji percepcyjnych nie jest idempotentna (a zatem, żadna z nich nie jest topologicznym operatorem domknięcia jak operator górnej aproksymacji).

Twierdzenie 56. *Dla systemu informacyjnego $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ oraz jego systemu percepcyjnego $(U, \mathbb{F})$, zarówno operator prostej górnej aproksymacji percepcyjnej $\overline{}^{\cong_{\mathbb{F}}} : \mathscr{P}U \to \mathscr{P}U$ przyporządkowujący zbiorowi $X \subseteq U$ zbiór $\overline{p^{-1}(p(X))}^{\cong_{\mathbb{F}}}$ oraz operator górnej aproksymacji percepcyjnej $\overline{}^{\cong} : \mathscr{P}U \to \mathscr{P}U$ przyporządkowujący zbiorowi $X \subseteq U$ zbiór $p^{-1}(\overline{p(X)}^{\cong})$ są operatorami pre-domknięcia.*

Twierdzenie 57. *Dla każdego zbioru $X \subseteq U$,*

$$\overline{p^{-1}(p(X))}^{\cong_{\mathbb{F}}} \subseteq p^{-1}(\overline{p(X)}^{\cong}).$$

Operator prostej górnej aproksymacji percepcyjnej $\overline{}^{\cong_{\mathbb{F}}} : \mathscr{P}U \to \mathscr{P}U$ może jednakże zwrócić zbiór niedefiniowalny w $\mathscr{I}$ i dlatego jest mniej interesujący niż operator górnej aproksymacji percepcyjnej $\overline{}^{\cong} : \mathscr{P}U \to \mathscr{P}U$.

Inną metodą otrzymania topologii jest omawiana już wcześniej korespondencja pomiędzy pre-porządkami i topologiami Aleksandrowa [56]. Jednakże, najpierw relacja tolerancji $\cong$ musi zostać przekształcona w pre-porządek.

Definicja 45 (Percepcyjny porządek specjalizacyjny)**.** *Niech $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ będzie systemem informacyjnym, E relacją nieodróżnialności w $\mathscr{I}$ oraz $(U, \mathbb{F})$ systemem percepcyjnym dla $\mathscr{I}$. Relacja $\leq_{\mathbb{F}} \subseteq U/E \times U/E$, zdefiniowana przez*

$$\boldsymbol{x} \leq_{\mathbb{F}} \boldsymbol{y} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } [\boldsymbol{y}]_{\cong} \subseteq [\boldsymbol{x}]_{\cong},$$

dla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U/E$, nazywana będzie percepcyjnym porządkiem specjalizacyjnym.

Zdefiniujmy:

$$\nabla_{\leq_{\mathbb{F}}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in U/E : \mathbf{x} \leq_{\mathbb{F}} \mathbf{y}\},$$
$$\triangle_{\leq_{\mathbb{F}}}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in U/E : \mathbf{y} \leq_{\mathbb{F}} \mathbf{x}\},$$

dla $\mathbf{x} \in U/E$. Zbiory $\nabla_{\leq_{\mathbb{F}}}(\mathbf{x})$ tworzą bazę topologii $\tau_{\mathbb{F}}$, którą nazywać będziemy *percepcyjną topologią ilorazową*, a jej operator domknięcia oznaczać będziemy przez $Cl_{\mathbb{F}}$. Oczywiście, zachodzi następująca równość:

$$Cl_{\mathbb{F}}(\mathbf{X}) = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \triangle_{\leq_{\mathbb{F}}}(\mathbf{x}).$$

Dualny operator wnętrza oznaczany będzie przez $Int_{\mathbb{F}}$.

Jak poprzednio, używając przeciwobrazu wyznaczonego przez naturalną projekcję p możemy zdefiniować topologiczne aproksymacje percepcyjne.

Definicja 46 (Topologiczne aproksymacje percepcyjne)**.** *Dla systemu informacyjnego $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$, relacji nieodróżnialności E, systemu percepcyjnego $(U, \mathbb{F})$ oraz naturalnej projekcji $p : U \to U/E$ zdefiniujmy* topologiczną górną aproksymację percepcyjną *jako $p^{-1}(Cl_{\mathbb{F}}(p(X)))$, dla $X \subseteq U$.*

Jak wcześniej, *topologiczna dolna aproksymacja percepcyjna* jest zdefiniowana dualnie do górnej.

Twierdzenie 58. *Dla każdego $\mathbf{X} \subseteq U/E$ oraz $X \subseteq U$ zachodzą następujące zależności:*

$$Cl_{\mathbb{F}}(\mathbf{X}) \subseteq \overline{\mathbf{X}}^{\cong},$$

$$Acc_{\mathbb{F}}(X) = \frac{\#(U \setminus p^{-1}(Cl_{\mathbb{F}}(p(U \setminus X)))}{\#(p^{-1}(Cl_{\mathbb{F}}(p(X))))} \quad \geq \quad Acc_{\cong}(X) = \frac{\#(U \setminus p^{-1}(\overline{p(U \setminus X)}^{\cong}))}{\#(p^{-1}(\overline{p(X)}^{\cong})}.$$

Zatem, spośród przedstawionych metod budowania topologii na zbiorze ilorazowym U/E i generowania aproksymacji podzbiorów $X \subseteq U$ najlepiej wypada metoda używająca korespondencji pomiędzy pre-porządkami a przestrzeniami Aleksandrowa. Pozwala ona na aktualizację aproksymacji danego pojęcia $X \subseteq U$ po otrzymaniu nowych wyników pomiarów z sensorów i, co najważniejsze w teorii obliczeń granularnych, na zachowanie pierwotnej granulacji obiektów.

Podsumowując ten rozdział, przypomnijmy, że operator górnej aproksymacji może być zdefiniowany w odniesieniu do dyskretnej topologi na przestrzeni ilorazowej U/E generowanej przez relację nieodróżnialności E. Ta perspektywa pozwala na uogólnienie tego operatora poprzez zdefiniowanie innych (mniej trywialnych) topologii na U/E. Chociaż można to zrobić na wiele sposobów, to okazuje się, że dobrze znana metoda otrzymywania topologii Aleksandrowa w oparciu o zbiory pre-uporządkowane zastosowana do U/E przynosi najlepsze wyniki.

1.9 Zbiory przybliżone i bliskie w obliczeniach granularnych

Praca *Granular Computing: Topological and Categorical Aspects of Near and Rough Set Approaches to Granulation of Knowledge* (Transactions on Rough Sets 16, Lecture Notes in Computer Science 7736, Springer Berlin Heidelberg, 34–52, 2013) jest kontynuacją badań nad topologiami generowanymi na przestrzeniach ilorazowych (które były prezentowane we wcześniejszym rozdziale). Poprzednio na system percepcyjny oraz system informacyjny nie były nałożone żadne dodatkowe warunki. Tym razem chcemy, aby generowana relacja tolerancji była „komplementarna” do relacji nieodróżnialności tak, aby topologia na obiektach oraz topologia na przestrzeni ilorazowej były matematycznie bliskie.

Dla dowolnej funkcji rzeczywistej $\phi : U \to \mathbb{R}$, przyporządkowanie $d_\phi : U \times U \to \mathbb{R}$ zdefiniowane przez

$$d_\phi(x,y) = abs(\phi(x) - \phi(y))$$

jest pseudometryką. W literaturze, e.g. [15], używana jest ponadto francuska nazwa „écart” oraz angielska „gauge”; odpowiednio też nazywane są przestrzenie indukowane przez rodziny pseudometryk: „écart spaces” i „gauge spaces”– przy czym druga nazwa jest bardziej powszechna. Jednakże ze względów językowych, w niniejszej pracy „gauge spaces” będą tłumaczone jako „przestrzenie écart”. Zatem termin *przetrzeń pseudometryczna* oznaczać będzie przestrzeń topologiczną indukowaną przez pseudometrykę, natomiast w przypadku rodziny pseudometryk używać będziemy terminów *przestrzeń pre-écart* i *przestrzeń écart*.

Definicja 47 (Topologia generowana przez rodzinę pseudometryk)**.** *Niech $\mathscr{D} = \{d_i : i \in \omega\}$ będzie zbiorem pseudometryk na U. Topologię $\tau(\mathscr{D})$ generowaną przez podbazę kul otwartych*

$$\mathscr{B}(\mathscr{D}) = \{B(x, d_i, \varepsilon) : x \in U \ \& \ d_i \in \mathscr{D} \ \& \ \varepsilon > 0\},\ B(x, d_i, \varepsilon) = \{y : d(x,y) < \varepsilon\}$$

nazywamy topologią generowaną przez rodzinę pseudometryk $\mathscr{D}$.

Definicja 48 (Separowanie punktów)**.** *Mówimy, że rodzina $\mathscr{D} = \{d_i : i \in \omega\}$ pre-metryk na U* separuje punkty*, jeżeli dla dowolnych $x \neq y$ istnieje $d_i \in \mathscr{D}$, taka że $d_i(x,y) \neq 0$.*

Definicja 49 (Przestrzeń écart)**.** *Jeżeli rodzina pseudometryk $\mathscr{D} = \{d_i : i \in \omega\}$ separuje punkty, to $\mathscr{D}$ nazywamy a* strukturą écart*. Przestrzeń topologiczną (U, τ) generowaną przez strukturę écart, gdzie $\tau = \tau(\mathscr{D})$, nazywamy* przestrzenią écart.

Dla dowolnego systemu percepcyjnego $(U, \mathbb{F})$ oraz indukowanego zbioru pseudometryk $\mathscr{D}(\mathbb{F}) = \{d_{\phi_i} : \phi_i \in \mathbb{F}\}$, dwa punkty $x \neq y$ nie są separowalne o ile dla wszystkich $\phi_i \in \mathbb{F}$ zachodzi $d_{\phi_i}(x,y) = 0$. W konsekwencji otrzymujemy, że:

Twierdzenie 59. *Dla systemu percepcyjnego $(U, \mathbb{F})$, rodzina $\mathscr{D}(\mathbb{F}) = \{d_{\phi_i} : \phi_i \in \mathbb{F}\}$ pseudometryk na U nie odróżnia dwóch obiektów $x \neq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \sim_{\mathbb{F}} y$.*

Jak wiadomo, każda relacja równoważności E generuje pseudometrykę d_E:

$$d_E(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } xEy, \\ 1 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Ponadto, dowolna pseudometryka d generuje relację równoważności E_d:

$$E_d = \{(x,y) : \ d(x,y) = 0\}.$$

Dla E_{d_E} zachodzi równość $E_{d_E} = E$, natomiast w przypadku d_{E_d} zazwyczaj otrzymamy inną pseudometrykę niż d, tj. $d_{E_d} \neq d$. Zatem każdy system percepcyjny, jak i przestrzeń aproksymacyjna mogą być traktowane jako zbiory pseudometryk, które niekoniecznie tworzą strukturę écart. W pracy *Perception oraz Classification. A Note on Near Sets oraz Rough Sets* rozpatrywany był system informacyjny $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$, jego przestrzeń aproksymacyjna (U, E) oraz system percepcyjny $(U, \mathbb{F})$ dostarczający nowych informacji względem $\mathscr{I}$. W idealnym przypadku, gdyby system percepcyjny maksymalnie poszerzył wiedzę (klasyfikację) o obiektach z U, tj. każdy obiekt byłby odróżnialny od innych, wówczas otrzymalibyśmy $E \cap \sim_{\mathbb{F}} = id$ (gdzie id jest relacją identyczności) oraz para pseudometryk $\{d_E, d_{\sim_{\mathbb{F}}}\}$ tworzyłaby strukturę écart. Niemniej, dla skończonego zbioru U, topologia $\tau(\mathscr{D})$ na U generowana przez strukturę écart $\mathscr{D}$ jest dyskretna i dlatego będą nas interesować dwie inne topologie: (a) topologia generowana przez rodzinę D pseudometryk (czy też relacji równoważności) skojarzonych z danym systemem informacyjnym oraz (b) topologia generowana przez nową pseudometrykę d (relację równoważności) otrzymaną z systemu percepcyjnego, taką że rodzina $\mathscr{D} \cup \{d\}$ tworzy strukturę écart. W praktyce jednak bardzo trudno jest zbudować dla danego systemu informacyjnego odpowiedni i nietrywialny system percepcyjny, którego percepcyjna relacja nieodróżnialności byłaby w takim stopniu komplementarna z $\mathscr{D}$. Znacznie łatwiej jest podać system, którego percepcyjna relacja tolerancji $\cong_{\mathbb{F}}$ spełnia ten warunek, tj. $E \cap \cong_{\mathbb{F}} = id$. Praca *Granular Computing: Topological* *and Categorical Aspects of Near and Rough Set Approaches to Granulation of Knowledge* bada topologiczne i teorio kategoryjne zależności pomiędzy nieodróżnialnością E w systemie informacyjnym oraz percepcyjną relacją tolerancji $\cong_{\mathbb{F}}$ spełniającą powyższy warunek. Oczywiście, relacja równoważności jest szczególnym przypadkiem relacji tolerancji, zatem topologie (a) oraz (b) są szczególnym przypadkiem topologii opisanych poniżej. Ponieważ każda przestrzeń topologiczna indukuje operatory wnętrza oraz domknięcia, omawiana w tym rozdziale praca opisuje również zależności pomiędzy operatorami aproksymacji zdefiniowanymi na obiektach oraz operatorami aproksymacji zdefiniowanymi na przestrzeni ilorazowej U/E.

Dla ułatwienia notacji, w dalszej części pracy E zawsze oznaczać będzie relację nieodróżnialności danego zupełnego i deterministycznego systemu informacyjnego $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ oraz $\cong_{\mathbb{F}}$ będzie percepcyjną relacją tolerancji (indukowaną przez system percepcyjny $(U, \mathbb{F})$, którego funkcje próbkujące grają rolę sensorów dla atrybutów z Att), taką że $E \cap \cong_{\mathbb{F}} = id$.

Przypomnijmy, że mając do dyspozycji relację równoważności E na U, zainteresowani jesteśmy kanoniczną projekcją $p : U \to U/E$ przyporządkowującą każdemu elementowi $x \in U$ jego klasę abstrakcji $[x]_E$.

Twierdzenie 60. *Dla każdej klasy X percepcyjnej relacji tolerancji $\cong_{\mathbb{F}}$, obcięcie kanonicznej projekcji $p : U \to U/E$ do X, oznaczane przez $p|_X$, jest funkcją różnowartościową na zbiór E/U.*

Twierdzenie 61. *Niech X będzie klasą relacji $\cong_{\mathbb{F}}$. Zdefiniujmy porządek $\leq$ na uniwersum U: $x \leq y \Leftrightarrow \cong_{\mathbb{F}}(x) \subseteq \cong_{\mathbb{F}}(y)$. Relacja $\leq$ jest pre-porządkiem, a klasa X może być zdefiniowana następująco:*

$$X = \{y \in U : \exists x \in X \ (x \leq y)\}.$$

Mając do dyspozycji pre-porządek $\leq$ na U, możemy zbudować topologiczną przestrzeń Aleksandrowa $(U, \tau_{\leq})$.

Twierdzenie 62. *Każda klasa X relacji $\cong_{\mathbb{F}}$ jest zbiorem otwartym w topologii Aleksandrowa $\tau_{\leq}$ indukowanej przez $\leq$.*

Mając topologię $\tau_{\leq}$ na U oraz kanoniczną projekcję $p : U \to U/E$, możemy zbudować topologię ilorazową na U/E w standardowy sposób (omówiony wcześniej).

Twierdzenie 63. *Dla każdej klasy X relacji $\cong_{\mathbb{F}}$, $p(X) \in \tau_p$, gdzie τ_p jest topologią ilorazową na U/E indukowaną przez $\tau_{\leq}$ oraz kanoniczną projekcję $p : U \to U/E$.*

Definicja 50 (Homeomorfizm lokalny)**.** *Funkcja $f : U \to W$ z przestrzeni topologicznej (U, τ_1) w przestrzeń topologiczną (W, τ_2) jest* homeomorfizmem lokalnym, *jeżeli każdy punkt $x \in U$ posiada sąsiedztwo $Y \in \tau_1$, takie że f jest homeomorfizmem pomiędzy Y i otwartą podprzestrzenią $f(Y)$ przestrzeni W.*

Twierdzenie 64. *Przy założeniach jak wyżej, $p : U \to U/E$ jest lokalnym homeomorfizmem.*

Jak łatwo zauważyć, otwarte sąsiedztwo jest klasą percepcyjnej relacji tolerancji $\cong_{\mathbb{F}}$. Zatem informacja zakodowana przez topologię $\tau_{\leq}$ nad zbiorze obiektów oraz informacja zakodowana przez topologię τ_p na przestrzeni ilorazowej są lokalnie takie same.

Odnieśmy teraz uzyskane wyniki do innych prac związanych z teorią zbiorów przybliżonych. Konstrukcja opisana wyżej opiera się na dwóch relacjach: relacji równoważności E oraz relacji tolerancji $\cong_{\mathbb{F}}$. W ich miejsce można oczywiście wstawić dowolne relacje równoważności i tolerancji, np. $\sim_{\mathbb{F}}$. Idea rozpatrywania dwóch relacji zamiast jednej nie jest nowa w teorii zbiorów przybliżonych. Oprócz relacji nieodróżnialności (czy podobieństwa) rozpatrywano również dodatkowo relację odróżnialności (czy niepodobieństwa): A. Gomolińska [27] rozszerzyła model, w którym występowała relacja podobieństwa o relację niepodobieństwa, a G. Cattaneo [11] wprowadził przeciwzwrotną i symetryczną relację odróżnialności.

Niech E będzie relacją nieodróżnialności generowaną przez system informacyjny $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ oraz niech P, tak jak w modelu G. Cattaneo [11], będzie dodatkowo zadaną relacją odróżnialności. Oznaczmy przez R dopełnienie relacji P i zdefiniujmy:

$$C = \{(x,y) : x,y \in U \ \& \ [x]_{\sim_{\mathbb{F}}} \neq [y]_{\sim_{\mathbb{F}}} \ \& \ xRy\} \tag{1.11}$$

Niech R^c będzie zwrotnym domknięciem C, tzn. $R^c = C \cup \{(x,x) : x \in U\}$.

Twierdzenie 65. $E \cap R^c = id$.

Zdefiniujmy porządek $\leq$ tak jak zwykle: $x \leq y \Leftrightarrow R^c(x) \subseteq R^c(y)$. Dalej, niech $(U, \tau_{\leq})$ będzie topologiczną przestrzeń Aleksandrowa indukowaną przez $\leq$.

Definicja 51 (Ogólne operatory aproksymacji)**.** *Niech $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ będzie systemem informacyjnym oraz niech P będzie relacją odróżnialności; zdefiniujmy*

$$\overline{\overline{X}} = p^{-1}(Cl(p(X))),$$

dla $X \subseteq U$, gdzie Cl jest operatorem ilorazowej topologii na U/E indukowanej przez topologiczną przestrzeń Aleksandrowa $(U, \tau_{\leq})$ oraz projekcję $p : U \to U/E$.

Twierdzenie 66. *Niech $\mathscr{I} = (U, Att, Val, inf)$ będzie systemem informacyjnym oraz niech P będzie totalną relacją odróżnialności $P = \{(x,y) : x,y \in U \ \& \ x \neq y\}$. Wtedy $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$ dla $X \subseteq U$.*

Zatem klasyczne operatory aproksymacji wprowadzone przez Z. Pawlaka są szczególnym przypadkiem ogólnych operatorów zdefiniowanych powyżej.

Podsumowując ten rozdział, przypomnijmy, że każdy zupełny i deterministyczny system informacyjny indukuje relację nieodróżnialności E. Ta relacja pozwala na zdefiniowania granulacji obiektów w postaci przestrzeni Aleksandrowa. Każda przestrzeń aproksymacyjna (U, E) może być również traktowana jako przestrzeń pre-écart, która zwykle nie separuje punktów. W poprzednim rozdziale rozpatrywaliśmy topologie na przestrzenie ilorazowej U/E nie nakładając na nie żadnych dodatkowych warunków. Tym razem, głównym pomysłem było rozpatrzenie topologii indukowanej przez relację tolerancji T, która razem z E separowałaby punkty. Okazuje się, że tak otrzymana topologia jest blisko spokrewniona z topologią na U generowaną przez E: obydwie topologie są lokalnie homeomorficzne. Mamy zatem podobny związek jak pomiędzy mapą świata a Kulą Ziemską. Pozwala on na lokalne przenoszenie informacji pomiędzy różnymi wymiarami – w naszym wypadku nie są to wymiary topologiczne, ale różne poziomy granulacji.

Rozdział 2

Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

2.1 Lista publikacji nienależących do rozprawy (po uzyskaniu stopnia doktora)

Redakcja numerów specjalnych pism

- **Marcin Wolski**, Mihir K. Chakraborty, Wei-Zhi Wu (Eds.): Transactions on Rough Sets 10. Lecture Notes in Computer Science 5656, Springer (2009)
- Pawan Lingras, **Marcin Wolski**, Chris Cornelis, Sushmita Mitra, Piotr Wasilewski (Eds.): Rough Sets and Knowledge Technology - 8th International Conference, RSKT 2013, Halifax, NS, Canada, October 11-14, 2013, Proceedings. Lecture Notes in Artificial Intelligence 8171, Springer (2013)
- Som Naimpally, James Peters, **Marcin Wolski** (Eds.): Near Set Theory and Applications. Mathematics in Computer Science 7 (1), Springer (2013)

Artykuły w (recenzowanych) pismach naukowych

Z części A wykazu czasopism naukowych MNiSW posiadających współczynnik wpływu Impact Factor (IF), znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (JCR):

- Marcin Wolski: Formal concept analysis and rough set theory from the perspective of finite topological approximations. Transactions on Rough Sets 3. Lecture Notes in Computer Science 3400, Springer, 230–243 (2005)
- Marcin Wolski: Complete orders, categories and lattices of approximations. Fundamenta Informaticae 72, 421–435 (2006)

- Marcin Wolski: Approximation spaces and nearness type structures. Fundamenta Informaticae 72, 567–577 (2007)
- Anna Gomolińska, Marcin Wolski: On graded nearness of sets. Fundamenta Informaticae 119 (3-4), 301–317 (2012)
- Marcin Wolski, Anna Gomolińska: Concept formation: rough sets and Scott systems. Fundamenta Informaticae 127 (1-4), 17–33 (2013)
- Marcin Wolski, Anna Gomolińska: An Incidence Algebra Approach to Knowledge Granulation in Pawlak Information Systems. Fundamenta Informaticae 128, 223–238 (2013)

Z części B wykazu czasopism naukowych MNiSW nieposiadających współczynnika wpływu Impact Factor (IF):

- Marcin Wolski: Category-based rough induction. In: Kryszkiewicz, M., Peters, J., Rybiński, H., Skowron, A. (Eds.): Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms, International Conference, RSEISP 2007. Lecture Notes in Artificial Inteligence 4585, Springer, 192–201 (2007)
- Marcin Wolski: Category-based inductive reasoning: rough set theoretic approach. Transactions on Rough Sets 9. Lecture Notes in Computer Science 5390, Springer, 428–443 (2008)
- Marcin Wolski: Rough set theory: ontological systems, entailment relations and approximation operators. Transactions on Rough Sets 10. Lecture Notes in Computer Science 5656, Springer, 1–14 (2009)
- Marcin Wolski: Rough sets in terms of discrete dynamical systems. In: Szczuka, M., Kryszkiewicz, M., Ramanna, S., Jansen, R., Hu, Q. (Eds.): Rough Sets and Current Trends in Computing – 7th International Conference, RSCTC 2010. Lecture Notes in Computer Science 6086, Springer, 237–246 (2010)

Lista pozostałych publikacji uwzględnionych przez DBLP Computer Science Bibliography:

- Marcin Wolski: Gauges, pregauges and completions: some theoretical aspects of near and rough set approaches to data. In: Yao, J., Ramanna, S., Wang, G., Suraj, Z. (Eds.): Rough Sets and Knowledge Technology - 6th International Conference, RSKT 2011. Lecture Notes in Computer Science 6954, Springer, 559–568 (2011)
- Marcin Wolski: Toward foundations of near sets: (pre-)sheaf theoretic approach. Mathematics in Computer Science 7 (1), 125–136 (2013)
- Marcin Wolski: Science and semantics: a note on rough sets and vagueness. In: Skowron, A., Suraj, Z. (Eds.): Rough Sets and Intelligent Systems - Professor Zdzisław Pawlak in Memoriam. Intelligent Systems Reference Library, Vol. 42, Springer, 623–643 (2013)

2.2 Referaty na międzynarodowych i krajowych konferencjach naukowych (po uzyskaniu stopnia doktora)

- European Joint Conferences on Theory and Practise of Software, Formal Approaches to Multi-Agent Systems, 12 April 2003, Warsaw, Poland.
- 12th International Congress of Logic Methodology and Philosphy of Science, 7 – 13 August 2003, Oviedo, Spain.
- Concurrency, Specification and Programming CS&P 200'3, 25 – 27 September 2003, Czarna, Poland.
- Trends in Logic III, International Conference in memoriam Andrzej Mostowski, Helena Rasiowa, Cecylia Rauszer, 23 September 2005, Warsaw, Poland; 24 – 25 September 2005, Ruciane-Nida, Poland.
- Concurrency, Specification and Programming CS&P'2005, 28 – 30 September 2005, Ruciane-Nida, Poland.
- Concurrency, Specification and Programming CS&P'2006, 27 – 29 September 2006, Wandlitz, Germany.
- Rough Sets and Emerging Intelligent Systems Paradigms - In Memoriam Zdzisław Pawlak, 28 – 30 June 2007, Warsaw, Poland.
- Concurrency, Specification and Programming, 27 – 29 September 2007, Łagów, Poland.
- Rough Sets: Foundations and Applications, 26 – 27 June 2007, Warsaw, Poland.
- The First International Workshop on Rough Set Theory, 25 – 27 May 2009, Milano, Italy.
- International Conference on Man-Machine Interactions, 25 – 27 September 2009, The Beskids - Kocierz Pass, Poland.
- Concurrency Specification and Programming CS&P'2009, 28-30 September 2009, Cracow, Poland.
- The Fourth Podlasie Conference on Mathematics, 9 – 11 April 2010, Białystok, Poland.
- Rough Sets: Future Research Directions, International Workshop, 26-27 June 2010, Warsaw, Poland.
- The Seventh International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC'2010), 28 – 30 June 2010, Warsaw, Poland.
- Concurrency Specification and Programming CS&P'2010, 26 – 29 September 2010, Helenenau, Germany .

- Concurrency, Specification, and Programming CS&P'2011, 28 – 30 September 2011, Pułtusk, Poland.
- The Fifth Podlasie Conference on Mathematics, 25 – 28 June 2012, Białystok, Poland.
- Concurrency, Specification and Programming CS&P'2012, 26 – 28 September 2012, Berlin, Germany.
- The Fourth International Workshop on Rough Set Theory, 10 October 2013, Halifax, Canada.
- Joint Rough Set Symposium, 11 – 14 October 2013, Halifax, Canada.

2.3 Udział w komitetach redakcyjnych i programowych

Członek komitetu redakcyjnego:

- LNCS Transactions on Rough Sets (2010-2014).

Członek komitetu organizacyjnego (konferencji międzynarodowej):

- Publicity Chair of the Sixth International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, 9 – 12 October 2011, Banff, Canada.
- Co-Chair (with Christopher Henry) of the special session *Near Sets: Foundations and Applications* (the Sixth International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology 2011).
- Co-Chair (with JingTao Yao) of the Fourth Rough Set Theory Workshop, 10 October 2013, Halifax, Canada.

Członek komitetu programowego (konferencji międzynarodowej):

- The Third International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, 16 – 19 May 2008, Chengdu, China.
- The Fourth International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, 14 – 16 July 2009, Gold Coast, Australia.
- The Seventh International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing, June 28 – 30, 2010, Warsaw, Poland.
- The Fifth International Conference on Rough Set and Knowledge Technology, October 15 – 17, 2010, Beijing Jiaotong University, Beijing, China.
- The Second Rough Set Theory Workshop, 19 – 21 October 2010, Zhejiang Ocean University Zhoushan, Zhejiang, China.

- The Third Rough Set Theory Workshop, 14 – 16 September 2011, Milan, Italy.
- International Symposium on Information and Communication Technology - SoICT, 13 – 14 October 2011, Hanoi, Vietnam.
- The Sixth International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, 9 – 12 October 2011, Banff, Canada.
- The First International Conference on Advanced Machine Learning Technologies and Applications (AMLTA12), 8 – 10 December 2012, Cairo, Egypt.
- Joint Rough Set Symposium, 17 – 20 August 2012, Chengdu, China.
- The Third International Symposium on Information and Communication Technology - SoICT, 23 – 24 August 2012, Ha Long, Vietnam.
- The Fourth International Symposium on Information and Communication Technology - SoICT, 5 – 6 December 2013, Da Nang, Vietnam.

Marcin Wolski

Bibliografia

[1] Alexandrov, P.: Diskrete Räume. Mat. Sb. (N.S.) (in German) 2, 501–518 (1937)

[2] Arenas, F. G.: Alexandroff spaces. Acta Math. Univ. Comenianae 68 (1), 17–25 (1999)

[3] Banerjee, M., Khan, M.A.: Propositional logics from rough set theory. Transactions on Rough Sets 6. Lecture Notes in Computer Science 4374, 1–25 (2007)

[4] Bargiela, A., Pedrycz, W.: Granular Computing: An Introduction. Kluwer, Dordrecht (2003)

[5] Bazan, J.: Hierarchical classifiers for complex spatio-temporal concepts. Transactions on Rough Sets 9. Lecture Notes in Computer Science 5390, 474–750 (2008)

[6] Bennett, B.: Modal logics for qualitative spatial reasoning. Journal IGPL, 4 (1), 23–45 (1996)

[7] Bezhanishvili, G., Gehrke, M.: Completeness of S4 with respect to the real line: revisited. Ann. Pure Appl. Logic, 131, No.1–3, 287–301 (2005)

[8] Bonikowski, Z., Bryniarski, E., Wybraniec-Skardowska, U.: Extensions and intentions in rough set theory. Inf. Sci. 107 (1-4), 149–167 (1998)

[9] Bonikowski, Z., Wybraniec-Skardowska, U.: Rough sets and vague sets. In: Kryszkiewicz, M., Peters, J., Rybiński, H., Skowron, A. (Eds.): Rough Sets and Intelligent Systems Paradigms, International Conference, RSEISP 2007, 122–132 (2007)

[10] Bonikowski, Z., Wybraniec-Skardowska, U.: Vagueness and roughness. Transactions on Rough Sets 9. Lecture Notes in Computer Science 5390, 1–13 (2008)

[11] Cattaneo, G., Ciucci, D.: A quantitative analysis of preclusivity vs. similarity based rough approximations. In: Alpigini, J., Peters, J., Skowron, A., Zhong, N. (Eds.) Rough Sets and Current Trends in Computing, RSCTC 2002, Lecture Notes in Computer Science 2475, 69–76, Springer, Heidelberg (2002)

[12] Chalmers. D. J.: On sense and intention. Philosophical Perspectives 16: Language and Mind, Blackwell, 135 – 182 (2002)

[13] De Groot, J.: Non archimedian metrics in topology. Proc. Amer. Math. Soc. 9, 948–953 (1956)

[14] Dimov, G., Vakarelov, D.: On Scott consequence systems. Fundamenta Informaticae 33(1), 43–70 (1998)

[15] Dugundji, J.: Topology. Allyn and Bacon, Boston (1996)

[16] Düntch, I., Gediga, G.: Modal-style operators in qualitative data analysis. In: Proc. of the 2002 IEEE Conference on Data Mining (ICDM'2002), 155–162 (2002)

[17] Düntch, I., Gediga, G.: Approximation operators in qualitative data analysis. In: Swart, H. et al. (Eds.), Theory and Applications of Relational Structures as Knowledge Instruments, 216–233 (2003)

[18] Erné, M., Stege, K.: Counting finite posets and topologies. Order 8, 247–265 (1991)

[19] Erné, M., Klossowski, E., Melton, A., Strecker, G. E.: A primer on Galois connections. In: Proceedings of the 1991 Summer Conference on General Topology and Applications in Honour of Mary Elen Rudin and Her Work, Annales of the New York Academy of Sciences, Vol. 704, 103–125 (1993)

[20] Fagin, R., Halpern, J.Y., Moses, Y., Vardi, M.Y.: Reasoning About Knowledge. The MIT Press, Cambridge, MA (1995)

[21] Finn, V. K.: On axiomatization of many-valued logics associated with formalization of plausible reasoning. Studia Logica 42(4), 423–447 (1989)

[22] Finn, V. K.: On the synthesis of cognitive procedures and the problem of induction. NTI Series 1-2, 8–45 (1999)

[23] Fayyad, U.M., Piatetsky-Shapiro, G., Smyth, P., Uthurusamy, R. (Eds.): Advances in Knowledge Discovery and Data Mining. The AAAI Press/The MIT Press, Cambridge (1996)

[24] Goldin, D.Q.: Persistent Turing Machines as a model of interactive computation. Lecture Notes in Computer Science 1762, 116–135 (2000)

[25] Goldin, D.Q, Smolka, S., Attie, P., Sonderegger, E.: Turing Machines, Transition Systems, and Interaction. J. Information and Computation 194 (2), 101–128 (2004)

[26] Goldin, D.Q., Smolka, S., Wegner, P. (Eds.): Interactive Computation: the New Paradigm, Springer-Verlag (2006)

[27] Gomolińska, A.: Approximation spaces based on relations of similarity and dissimilarity of objects. Fundamenta Informaticae 79, 319–333 (2007)

[28] Greco, S., Matarazzo, B., Słowiński, R.: Rough sets theory for multicriteria decision analysis. European Journal of Operational Research 129 (1), 1–47 (2001)

[29] Grigoriev, P., Kuznetsov, S., Obiedkov, S., Yevtushenko, S.: On a version of Mill's method of difference. In: Proceedings of the 15th Conference on Artificial Intelligence (ECAI'2002), 26–31 (2002)

[30] Grzymała-Busse, J.W.: Knowledge acquisition under uncertainty - a rough set approach. Journal of Intelligent & Robotic Systems 1 (1), 3–16 (1988)

[31] Grzymała-Busse J.W.: Managing Uncertainty in Expert Systems. Kluwer Academic Publishers, Boston, London, Dordrecht (1991)

[32] Güldürdek, A., Richmond, T.: Every finite topology is generated by a partial pseudometric. Order 4, Vol. 22, 415–421 (2005)

[33] Góra, G., Kruczek, P., Skowron, A., Bazan, J., Bazan-Socha, S., Pietrzyk, J.: Case-based planning of treatment of infants with respiratory failure. Fundamenta Informaticae 85 (1-4), 155–172 (2008)

[34] Halmos P.: Algebraic logic I. Monadic Boolean algebras. Compositio Mathematica 12, 217–249 (1955)

[35] Halmos P.: The representation of monadic Boolean algebras. Duke Mathematical Journal 26, 447–454 (1959)

[36] Halpern, J.Y.: Reasoning about Uncertainty. MIT Press, Cambridge, Mass. (2003)

[37] Inuiguchi, M., Hirano, S., Tsumoto, S. (Eds.): Rough Set Theory and Granular Computing. Springer-V., Berlin Heidelberg (2003)

[38] Iturrioz, L.: Two representation theorems of three-valued structures by means of binary relations. CoRR abs/0710.100 (2007) `http://arxiv.org/abs/0710.1007`

[39] Lin, T. Y., Cercone, N.: Rough Sets and Data Mining. Analysis of Imprecise Data. Kluwer Academic Publishers, Boston (1997)

[40] Järvinen, J.: Lattice Theory for Rough Sets. Transactions on Rough Sets 6. Lecture Notes in Computer Science 4374, Springer, 400–498 (2007)

[41] Komorowski, J., Zytkow, J. (Eds.): The First European Symposium on Principles of Data Mining and Knowledge Discovery (PKDD'97). Lecture Notes in Artificial Intelligence 1263, Springer (1997)

[42] Kripke, S.: Semantical analysis of modal logic, II: Non-normal modal propositional calculi. In: Addison, J.W., Henkin, L., Tarski, A. (Eds.): The Theory of Models, Amsterdam: North-Holland, 202–220 (1965)

[43] Lipski, W.: Combinatorial aspects of information storage and retrieval. MFCS 1974, 313–326 (1974)

[44] Lipski, W.: Information storage and retrieval - mathematical foundations II (combinatorial problems). Theoretical Computer Science 3(2), 183–211 (1976)

[45] Łukowski, P.: Modal interpretation of Heyting-Brouwer logic. Bulletin of the Section of Logic 25 (2), 80–83 (1996)

[46] Małuszyński, J., Szałas, A., Vitòria, A.: A four-valued logic for rough set-like approximate reasoning. Transactions on Rough Sets 6. Lecture Notes in Computer Science 4374, 176–190 (2007)

[47] Marczewski, E., Steinhaus, H.: On a certain distance of sets and the corresponding distance of functions. Colloquium Mathematicum, Vol. 6, 319-327 (1958)

[48] Marek, W., Pawlak, Z.: Mathematical foundations of information storage and retrieval. Part 1. In: CC PAS Reports 135(73), Computation Center Polish Academy of Sciences (CC PAS), Warsaw, 1–10 (1973)

[49] Marek, W., Pawlak, Z.: Mathematical foundations of information storage and retrieval. Part 2. In: CC PAS Reports 136(73), Computation Center Polish Academy of Sciences (CC PAS), Warsaw, 1–11 (1973)

[50] Marek, W., Pawlak, Z.: Mathematical foundations of information storage and retrieval. Part 3. In: CC PAS Reports 137(73), Computation Center Polish Academy of Sciences (CC PAS), Warsaw, 1–8 (1973)

[51] Marek, W., Pawlak, Z.: Information storage and retrieval systems, mathematical foundations. Theoretical Computer Science 1(4), 331–354 (1976)

[52] McCord, M. C.: Singular homology and homotopy groups of finite topological spaces. Duke Mathematical Journal 33 (3), 465–474 (1966)

[53] Meyer J.Ch., Wieringa, R.J. (Eds.): Deontic Logic in Computer Science– Normative System Specification. John Wiley & Sons (1993)

[54] Mill, J. S.: System of Logic. London: Longman, Green, Reader, and Dyer (1872)

[55] Monteiro A.: Algebras Monádicas. Atlas do Segundo Colóquio Brasileiro de Matemática, Brasil, 33–52 (1959)

[56] Naturman, C. A.: Interior Algebras and Topology, Ph.D. thesis, University of Cape Town, Department of Mathematics (1991)

[57] Orłowska, E., Pawlak, Z.: Representation of nondeterministic information. In: ICS PAS Reports 450(81), Institute of Computer Science Polish Academy of Sciences (ICS PAS), Warsaw, 1–24 (1981)

[58] Orłowska, E., Pawlak, Z.: Expressive power of knowledge representation systems. In: ICS PAS Reports 432(81), Institute of Computer Science Polish Academy of Sciences (ICS PAS), Warsaw, 1–31 (1981)

[59] Orłowska, E., Pawlak, Z.: Representation of nondeterministic information. Theoretical Computer Science 90, 27–39 (1984)

[60] Orłowska, E. (Ed.): Incomplete Information, Rough Set Analysis. Advances in Fuzziness and Soft Computing, Vol. 13 (1998)

[61] Pagliani, P., Chakraborty, M.: Information quanta and approximation spaces. I: Non-classical approximation operators. In: Hu, X., Liu, Q., Skowron, A., Lin, T. S., Yager, R. R., Zhang, E. B. (Eds.), Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing, Vol. 2, IEEE, 605–610 (2005)

[62] Pagliani, P., Chakraborty, M.: Information quanta and approximation spaces. II: Generalised approximation space. In: Hu, X., Liu, Q., Skowron, A., Lin, T. S., Yager, R. R., Zhang, E. B. (Eds.), Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing, Vol. 2, IEEE, 611–616 (2005)

[63] Pawlak, Z.: Mathematical foundations of information retrieval. In: CC PAS Reports 101(73), Computation Center Polish Academy of Sciences (CC PAS), Warsaw, 1–8 (1973)

[64] Pawlak, Z.: Rough sets. Basic notions. In: ICS PAS Reports 431(81), Institute of Computer Science Polish Academy of Sciences (ICS PAS), 1–12 (1981)

[65] Pawlak, Z.: Classification of Objects by Means of Attributes. Institute of Computer Science, Polish Academy of Sciences PAS 429 (1981)

[66] Pawlak, Z.: Rough sets. Int. J. Computer and Information Sci. 11, 341–356 (1982)

[67] Pawlak, Z.: Rough sets and decision tables. Lecture Notes in Computer Science 208, 186–196 (1985)

[68] Pawlak, Z.: Rough logic. Bull. Polish Acad. Sc. (Tech. Sc.) 35(5-6), 253–258 (1987)

[69] Pawlak, Z.: Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publisher (1991)

[70] Pawlak, Z.: Wiedza z Perspektywy Zbiorów Przybliżonych. Institute of Computer Science Report 23 (1992)

[71] Pawlak, Z.: Rough set theory and its applications. Journal of Telecommunications and Information Technology, Vol. 3, 7–10 (2002)

[72] Pawlak, Z.: A treatise on rough sets. Transactions on Rough Sets 4. Lecture Notes in Computer Science 3700, 1–17 (2005)

[73] Pedrycz, W., Skowron, A., and Kreinovich, V. (Eds.): Handbook of Granular Computing. John Wiley & Sons, Chichester (2008)

[74] Peters, J. F.: Near sets. Special theory about nearness of objects. Fundamenta Informaticae 75, 407–433 (2007)

[75] Peters, J. F., Skowron, A., Stepaniuk, J.: Nearness of objects: extension of approximation space model. Fundamenta Informaticae 79, 497–512 (2007)

[76] Peters, J. F., Wasilewski, P.: Foundations of near sets. Information Sciences 179, 3091–3109 (2009)

[77] Polkowski, L., Skowron, A: Rough mereological approach to knowledge-based distributed AI. In: Lee, J.K., Liebowitz, J., Chae, J.M. (Eds.), Proceedings of the 3rd World Congress on Expert Systems, 774–781 (1996)

[78] Polkowski, L., Skowron, A: Rough mereology: A new paradigm for approximate reasoning. International Journal of Approximate Reasoning 15(4), 333–365 (1996)

[79] Polkowski, L., Skowron, A. (Eds.): Rough Sets in Knowledge Discovery 1: Methodology and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing 17. Physica-Verlag, Heidelberg (1998)

[80] Polkowski, L., Skowron, A. (Eds.): Rough Sets in Knowledge Discovery 2: Applications, Case Studies and Software Systems. Studies in Fuzziness and Soft Computing 18. Physica-Verlag, Heidelberg (1998)

[81] Polkowski, L.: Rough Sets: Mathematical Foundations. Advances in Fuzziness and Soft Computing. Physica-Verlag, Heidelberg (2002)

[82] Priest, G.: An Introduction to Non-Classical Logic. Cambridge University Press (2001)

[83] Prior, A.: Time and Modality. Oxford: Clarendon (1957)

[84] Prior, A.: Past, Present, and Future. Oxford: Clarendon (1967)

[85] Prior, A.: Papers on Time and Tense. Oxford: Clarendon (1968)

[86] Putnam H.: Meaning and reference. The Journal of Philosophy, Vol. 70, No. 19, Seventieth Annual Meeting of the American Philosophical Association Eastern Division, 699–711 (1973)

[87] Putnam, H.: The meaning of 'meaning'. Language, Mind and Knowledge. Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. 7, 131–193 (1975)

[88] Rasiowa, H.: Algebraic Models of Logics. University of Warsaw (2001)

[89] Rauszer, C.: Representation theorem for semi-Boolean algebras I. Bulletin de l'Académie Polonaise des Scienses, Vol. XIX, No. 10, 881–887 (1971)

[90] Rauszer, C.: Semi-Boolean algebras and their applications to intuitionistic logic with dual operations. Fundamenta Mathematicae 83, 81–87 (1974)

[91] Rauszer, C.: An algebraic and Kripke-style approach to a certain extensions of intuitionistic logic. Dissertationes Mathematicae, Vol. CLXVII (1980)

[92] Reiter, R.: Knowledge in Action. The MIT Press, Cambridge, MA (2001)

[93] Restall, G.: Extending intuitionistic logic with subtraction (1997) `www.phil.mq.edu.au/staff/grestall/files/extendingj.ps`

[94] Salmon, N.: Frege's Puzzle. Cambridge, MA: MIT Press (1986)

[95] Scott, D.: Completeness and axiomatizability. In: Proceedings of the Tarski Symposium, 411–435 (1974)

[96] Scott, D.: Domains for denotational semantics. ICALP 1982, 577–613 (1982)

[97] Skowron, A., Stepaniuk, J.: Generalized approximation spaces. In: Lin, T. Y. (Ed.), Proc. 3rd Int. Workshop on Rough Sets and Soft Computing, San Jose, CA, November 1994, 156–163 (1994)

[98] Skowron, A., Stepaniuk, J.: Tolerance approximation spaces. Fundamenta Informaticae 27, 245–253 (1996)

[99] Skowron, A., Stepaniuk, J.: Information granules and approximation spaces. In: Gevers, M. (Ed.), Proc. 7th Int. Conf. on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU'98), Paris, France, July 1998, 354–361, Paris, La Sorbonne (1998)

[100] Skowron, A., Stepaniuk, J.: Information granules in distributed environment. Lecture Notes in Artificial Intelligence 1711, 357–365 (1999)

[101] Skowron, A., Stepaniuk, J.: Towards discovery of information granules. Lecture Notes in Artificial Intelligence 1704, 542–547 (1999)

[102] Skowron, A.: Toward intelligent systems: Calculi of information granules. Lecture Notes in Artificial Intelligence 2253, 251–260 (2001)

[103] Skowron, A., Stepaniuk, J.: Information granule decomposition. Fundamenta Informaticae 47 (3–4), 337–350 (2001)

[104] Skowron, A., Stepaniuk, J.: Information granules: Towards foundations of granular computing. Int. J. Intelligent Systems, 16(1), 57–86, (2001)

[105] Skowron, A., Synak, P.: Complex patterns. Fundamenta Informaticae, 60(1–4), 351–366 (2004)

[106] Skowron, A.: Rough sets and vague concepts. Fundamenta Informaticae 64 (1-4), 417-431 (2005)

[107] Skowron, A., Swiniarski, R., Synak, P.: Approximation spaces and information granulation. Transactions on Rough Sets 3. Lecture Notes in Computer Science 3400, 175–189 (2005)

[108] Skowron, A., Swiniarski R.: Rough sets and higher order vagueness. In Ślęzak D., et al. (Eds.) Proceedings of the 10th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing (RSFDGrC 2005), Regina, Canada, Lecture Notes in Computer Science 3641, 33-42, Berlin, Springer-Verlag (2005)

[109] Skowron, A., Szczuka, M.: Toward interactive computations: a rough-granular approach. In: Koronacki, J., Raś, Z., Wierzchoń, S., Kacprzyk, J. (Eds.), Advances in Machine Learning II, Studies in Computational Intelligence, Vol. 263, 23–42 (2010)

[110] Słowiński, R., Stefanowski, J.: Handling various types of uncertainty in the rough set approach. In: W. Ziarko (Ed.), Rough Sets and Knowledge Discovery. Springer-Verlag, Workshops in Computing Series, Berlin, 366–376 (1994)

[111] Słowiński, R., Stefanowski J.: Rough-set reasoning about uncertain data. Fundamenta Informaticae 27, 229–243 (1996)

[112] Słowinski, R., Vanderpooten, D.: Similarity relation as a basis for rough approximations. In: Wang, P.P. (Ed.), Advances in Machine Intelligence and Soft Computing, Vol. 4, 7–33 (1997)

[113] Słowinski, R., Greco, S., Matarazzo, B.: Dominance-based rough set approach to reasoning about ordinal data. Lecture Notes in Artificial Intelligence 4585, 5–11 (2007)

[114] Słowiński, R., Greco, S., Matarazzo, B.: Rough sets in decision making. In: Meyer R. (Ed.), Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, NY, 7753–7786 (2009)

[115] Słowiński, R.: New applications and theoretical foundations of the dominance-based rough set approach. Lecture Notes in Artificial Intelligence 6086, 2–3 (2010)

[116] Steiner, A. K.: The Lattice of topologies: structure and complementation. Transactions of the American Mathematical Society 122 (2), 379–398 (1966)

[117] Tarski, A.: Logic, Semantics, Metamathematics. Oxford University Press (1983)

[118] Vakarelov, D.: Abstract characterization of some knowledge representation systems and the logic NIL of nondeterministic information. In: Jorrand, P., Sgurev, V. (Eds.), Artificial Intelligence II, 255–260 (1987)

[119] Vakarelov, D.: A modal logic for similarity relations in Pawlak knowledge representation systems. Fundamenta Informaticae 15, 61–79 (1991)

[120] Vakarelov, D.: Modal logics for knowledge representation systems. Theoretical Computer Science 90, 433–456 (1991)

[121] Vakarelov, D.: Consequence relations and information systems. In: R. Słowiński (Ed.), Intelligent Decision Support, Handbook of Applications and Advances in Rough Sets Theory, 391-400 (1992)

[122] Vakarelov, D.: A duality between Pawlak's knowledge representation systems and bi-consequence systems. Studia Logica 55(1), 205–228 (1995)

[123] Vakarelov, D.: Information systems, similarity and modal logics. In: E. Orłowska (Ed.), Incomplete Information: Rough Set Analysis, 492–550 (1998)

[124] Wegner, P.: Interactive foundations of computing. Theoretical Computer Science 192, 315–351 (1998)

[125] Wille, R.: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: Rival I. (Ed.), Ordered Sets, Reidel, Dordrecht-Boston, 445–470 (1982)

[126] Wille, R.: Concept lattices and conceptual knowledge systems. Computers & Mathematics with Applications 23, 493–515 (1992)

[127] Wiweger, A.: On topological rough sets. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Mathematics 37, 89–93 (1989)

[128] Wolter, F.: On logics with coimplication. Journal of Philosophical Logic 27, 353–387 (1998)

[129] Wybraniec-Skardowska, U.: A Logical explication of the concepts of incomplete and uncertain Information. SOFTEKS Workshop on Incompleteness and Uncertainty in Information Systems, 180–188 (1993)

[130] Yao, Y.Y., Lin, T.Y.: Generalization of rough sets using modal logic. Intelligent Automation and Soft Computing, Vol. 2, No. 2, 103–120 (1996)