AUTOREFERAT

MARIUSZ BIENIEK

Spis treści

Informacje o autorze

1. Imię i nazwisko: Mariusz Bieniek
2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:
    - Doktor nauk matematycznych
      rozprawa: Analityczne i asymptptyczne właściwości wartości rekordowych i uogólnionych statystyk porządkowych
      promotor: prof. dr hab. Dominik Szynal
      recenzenci: prof. dr hab. Lesław Gajek i prof. dr hab. Jacek Wesołowski
      Uniwersytet Marii Curie–Skłodowskiej, Lublin, 2004.
    - Magister matematyki
      Uniwersytet Marii Curie–Skłodowskiej, Lublin, 1999.
    - Studia magisterskie z matematyki, wyróżnienie,
      Wydział Matematyki i Fizyki UMCS, 1994–1999.
3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:
    - Instytut Matematyki
      Uniwersytet Marii Curie–Skłodowskiej, Lublin,
      asystent-stażysta od 1 października 1998 do 30 czerwca 1999,
      asystent od 1 października 1999 do 30 września 2004,
      adiunkt od 1 października 2004.
    - Instytut Matematyczny,
      Polska Akademia Nauk, Warszawa,
      adiunkt od 1 października 2004 do 31 marca 2005.
    - Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa im. Szymona Szymonowica w Zamościu,
      wykładowca od 1 października 2008 do 31 lipca 2014 (drugi etat).

Moje główne osiągnięcie naukowe (w rozumieniu art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki) to jednotematyczny cykl ośmiu publikacji habilitacyjnych pod tytułem

Optymalne oszacowania wybranych funkcjonałów uogólnionych statystyk porządkowych

[A1] M. Bieniek, *Variation diminishing property of densities of uniform generalized order statistics*, Metrika, 65 (2007), pp. 297–309.
[A2] M. Bieniek, *Projection bounds on expectations of generalized order statistics from DD and DDA families*, J. Statist. Plann. Inference, 138 (2008), pp. 971–981.
[A3] M. Bieniek, *Projection bounds on expectations of generalized order statistics from DFR and DFRA families*, Statistics, 40 (2006), pp. 339–351.
[A4] M. Bieniek, *On families of distributions for which optimal bounds on expectations of GOS can be derived*, Comm. Statist. Theory Methods, 37 (2008), pp. 1997–2009.
[A5] M. Bieniek, *Bounds for expectations of differences of generalized order statistics based on general and life distributions*, Comm. Statist. Theory Methods, 36 (2007), pp. 59–72.
[A6] M. Bieniek, *Projection bounds on expectations of spacings of generalized order statistics from DD and DDA families*, Comm. Statist. Theory Methods, 36 (2007), pp. 1343–1357.
[A7] M. Bieniek, *Projection bounds on expectations of spacings of generalized order statistics from DFR and DFRA families*, Statistics, 42 (2008), pp. 231–243.
[A8] M. Bieniek, *Optimal bounds on the bias of quasimidranges*, Statistics, 49 (2015), pp. 1382–1399.

W następnych sześciu rozdziałach przedstawię omówienie wyników powyższych prac.

1. Wstęp

1.1. Uogólnione statystyki porządkowe. Model uogólnionych statystyk porządkowych został zdefiniowany przez Kampsa [34, 35] w następujący sposób. Niech $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{m} = (m_1, \dots, m_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $k > 0$, będą parametrami takimi, że dla $1 \leqslant j \leqslant n-1$ zachodzą nierówności

$$\gamma_j = k + n - j + \sum_{i=j}^{n-1} m_i > 0.$$

Mówimy, że zmienne losowe $U_*^{(r)}$, $1 \leqslant r \leqslant n$ są uogólnionymi statystykami porządkowymi z rozkładu jednostajnego, jeżeli ich łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa jest

$$f^{U_*^{(1)},\dots,U_*^{(n)}}(u_1, \dots, u_n) = c_{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} (1-u_i)^{m_i} \right) \Big(1 - u_n\Big)^{k-1},$$

dla $0 < u_1 \leqslant \dots \leqslant u_n < 1$, gdzie

$$c_{r-1} = \prod_{i=1}^{r} \gamma_i, \quad 1 \leqslant r \leqslant n. \tag{1.1}$$

Uogólnione statystyki porządkowe z dowolnego rozkładu F są określone przy pomocy transformacji kwantylowej $X_*^{(r)} = F^{-1}\Big(U_*^{(r)}\Big)$, $1 \leqslant r \leqslant n$, gdzie F^{-1} oznacza funkcję kwantylową rozkładu F zdefiniowaną jako $F^{-1}(u) = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leqslant u\}$ dla $u \in [0, 1)$. Cramer i Kamps [13] podali równoważną definicję uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładu jednostajnego przy użyciu iloczynów niezależnych zmiennych losowych o odpowiednich rozkładach beta.

Model uogólnionych statystyk porządkowych zawiera wiele znanych modeli uporządkowanych danych statystycznych, ważnych ze względu na ich praktyczne zastosowania. Podamy teraz krótkie omówienie wybranych modeli, podkreślając ich zastosowania zwłaszcza w teorii niezawodności.

1. **Statystyki porządkowe** oznaczane przez $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ powstają przez ustawienie wartości obserwacji w próbie losowej $(X_1, \ldots, X_n)$ w porządku niemalejącym. Ich rozliczne zastosowania we wnioskowaniu statystycznym są opisane m.in. w monografiach [1] oraz [23]. Jeżeli obserwacje w próbie $X_1, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie zadanym dystrybuantą F, to statystyki porządkowe $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ są uogólnionymi statystykami porządkowymi z rozkładu F z parametrami $m_i = 0$ oraz $k = 1$, lub równoważnie $\gamma_i = n-i+1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. W teorii niezawodności r-ta statystyka porządkowa $X_{r:n}$ służy do opisu czasu r-tej awarii w systemie złożonym z n składników. Może być również stosowana do modelowania czasu pracy systemu, który funkcjonuje dopóki działa jeszcze przynajmniej $n - r + 1$ elementów (tzw. układ $(n - r + 1)$-spośród-n). Inne liczne zastosowania statystyk porządkowych w teorii niezawodności omówione są np. w monografii Barlowa i Proschana [8].
2. **Statystyki porządkowe progresywnie cenzurowane** są obserwowane w eksperymentach dotyczących długości czasu pracy (lub czasu życia, itp.). Na początku eksperymentu mamy do dyspozycji N obiektów oraz ustalamy liczbę $n \leqslant N$ awarii, które chcemy zaobserwować. Następnie z powodów ekonomicznych lub etycznych, dla $r = 1, \ldots, n$ po r-tej awarii w eksperymencie, usuwamy z niego z góry ustaloną liczbę R_r obiektów spośród tych, które jeszcze funkcjonują. Oczywiście liczby $R_1, \ldots, R_n$ są ustalane na początku doświadczenia w taki sposób, że zachodzi równość $N = n + R_1 + \ldots + R_n$. Czasy kolejnych awarii $X_{1:n,N}, \ldots, X_{n:n,N}$ nazywamy statystykami porządkowymi progresywnie cenzurowanymi (typu II). Model ten jest szczegółowo omówiony w monografiach [4, 5]. Balakrishnan i in. [6] zauważyli, że jeżeli czasy pracy badanych elementów są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie F, to $X_{1:n,N}, \ldots, X_{n:n,N}$ tworzą uogólnione statystyki porządkowe z rozkładu F z parametrami
$$\gamma_j = n - j + 1 + R_j + \ldots + R_n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$
W szczególności parametry te spełniają nierówność $N = \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n \geqslant 1$.
3. **Sekwencyjne statystyki porządkowe** opisują czasy kolejnych awarii w sekwencyjnych układach typu k-spośród-n. Załóżmy, że danych jest n dystrybuant $F_1, \ldots, F_n$ oraz, że na początku eksperymentu obserwujemy czasy uszkodzeń n elementów, których czasy pracy są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie opisanym dystrybuantą F_1. Po pierwszej awarii w chwili $X^*_{1:n} = x_1$ pozostałe $n-1$ elementów zostaje zastąpione przez nowe, których czasy życia są również niezależne i o jednakowym rozkładzie, ale opisanym rozkładem F_2 uciętym lewostronnie w punkcie x_1. Procedura ta jest kontynuowana, a więc po i-tym uszkodzeniu w chwili $X^*_{i:n} = x_i$, pozostałe $n - i$ elementów jest zastąpionych nowymi, których rozkład czasu życia jest opisany przez dystrybuantę F_{i+1} uciętą w punkcie x_i. Otrzymane w ten sposób czasy awarii $X^*_{1:n}, \ldots, X^*_{n:n}$ nazywamy sekwencyjnymi statystykami porządkowymi. Formalną definicję tego modelu można znaleźć w pracach [13], [34] lub [35], a jego zastosowania w teorii niezawodności omówione są np. w pracy [42]. Jeżeli przyjmiemy $F_j(x) = 1-(1-F(x))^{\alpha_j}$ dla $1 \leqslant j \leqslant n$ oraz pewnej ustalonej dystrybuanty F, to sekwencyjne statystyki porządkowe $X^*_{1:n}, \ldots, X^*_{n:n}$ są uogólnionymi statystykami porządkowymi z rozkładu F z parametrami $\gamma_i = (n - i + 1)\alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
4. **Wartości rekordowe** ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie zostały zdefiniowane przez Chandlera [11]. Pierwsza obserwacja w ciągu jest pierwszą wartością rekordową R_1, a następnie czekamy na pierwszą obserwację R_2 w ciągu, której wartość przekracza R_1. Ogólnie, n-tą wartością rekordową R_n jest pierwsza z kolei obserwacja, której wartość przekracza poprzednią wartość rekordową R_{n-1}. Formalną definicję oraz liczne własności i zastosowania wartości rekordowych zostały omówione m.in. w monografiach [2] i [43]. Jeżeli wspólnym rozkładem obserwacji w ciągu jest

dystrybuanta F, to wartości rekordowe $R_1, \ldots, R_n$ tworzą uogólnione statystyki porządkowe z rozkładu F z parametrami $m_i = -1$ oraz $k = 1$, lub równoważnie $\gamma_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Wartości rekordowe mogą być stosowane na przykład w matematyce ubezpieczeniowej jako model kolejnych maksymalnych roszczeń, w meteorologii jako model rekordowych danych powodziowych lub rekordowych temperatur. Są one również stosowane w teorii niezawodności do opisu tzw. modeli szoku, w których pewien system techniczny jest poddawany kolejnym naciskom zewnętrznym, przy czym nacisk o natężeniu większym niż wszystkie poprzednie powoduje uszkodzenie (lub nawet zniszczenie) całego systemu. Jednakże, obserwując wartości rekordowe musimy brać pod uwagę fakt, że pojawiają się one dość rzadko, więc wnioskowanie statystyczne oparte na wartościach rekordowych jest utrudnione z uwagi na niewielką liczbę danych. Aby ominąć tę niedogodność można obserwować tzw. wartości rekordowe k-tego rzędu (w skrócie najczęściej mówimy k-te wartości rekordowe), omówione w następnym podpunkcie.

5. **k-te wartości rekordowe** zostały wprowadzone przez Dziubdzielę i Kopocińskiego [24] następująco. Dla ustalonej liczby $k \in \mathbb{N}$ oraz ciągu obserwacji $\{X_n,\, n \geqslant 1\}$ określamy ciąg k-tych czasów rekordowych jako $U_k(1) = 1$ oraz

$$U_k(n+1) = \min\left\{ j \geqslant U_k(n) : X_{j:j+k-1} > X_{U_k(n):U_k(n)+k-1} \right\},$$

a ciąg k-tych wartości rekordowych jako $Y_n^{(k)} = X_{U_k(n):U_k(n)+k-1}$, $n \geqslant 1$. Oczywiście dla $k = 1$ otrzymujemy zwykłe wartości rekordowe omówione powyżej. Jeżeli kolejne obserwacje tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie zadanym dystrybuantą F, to k-te wartości rekordowe $Y_1^{(k)}, \ldots, Y_n^{(k)}$ są uogólnionymi statystykami porządkowymi z rozkładu F z parametrami $m_i = -1$ oraz $k \in \mathbb{N}$, lub równoważnie $\gamma_i = k$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

6. **Wartości rekordowe Pfeifera** występują w sytuacji, gdy obserwujemy wartości rekordowe, ale po zaobserwowaniu n-tego w kolejności rekordu, który oznaczamy przez $X_{\Delta_n}^{(n)}$, $n \geqslant 1$, zmieniamy wspólny rozkład następnych obserwacji na F_{n+1}. Formalną definicję tego modelu wprowadził Pfeifer [46]. Jeżeli kolejne rozkłady obserwacji $F_1, F_2, \ldots$ są postaci $F_j(x) = 1 - (1 - F(x))^{\beta_j}$, $j \geqslant 1$, to $X_{\Delta_1}^{(1)}, \ldots, X_{\Delta_n}^{(n)}$ są uogólnionymi statystykami porządkowymi z rozkładu F z parametrami $\gamma_i = \beta_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Wartości rekordowe Pfeifera są stosowane jako model szoku, przy czym każdy ekstremalny nacisk może mieć wpływ na wielkość kolejnych obserwacji.

Model uogólnionych statystyk porządkowych służy jako narzędzie unifikacji badań nad własnościami rozkładów w modelach uporządkowanych zmiennych losowych. Jeżeli pewna własność zachodzi np. dla modelu zwykłych statystyk porządkowych, to zamiast dowodzić jej odpowiednik oddzielnie dla każdego modelu, można spróbować udowodnić ją dla modelu uogólnionych statystyk porządkowych. Jeżeli zachodzi ona dla modelu ogólnego, to w sposób oczywisty spełniają ją również modele będące szczególnymi przypadkami.

Oprócz badania pojedynczych uogólnionych statystyk porządkowych $X_*^{(r)}$, $r \geqslant 1$, często interesujące jest badanie ich prostych funkcji, w szczególności różnic uogólnionych statystyk porządkowych, oznaczanych przez

$$D_{r,s} = X_*^{(s)} - X_*^{(r)}, \quad 1 \leqslant r < s,$$

oraz tzw. *spacji*, czyli różnic pomiędzy *kolejnymi* uogólnionymi statystykami porządkowymi

$$D_*^{(r)} = X_*^{(r+1)} - X_*^{(r)}, \quad r \geqslant 2.$$

W kontekście modeli stosowanych w teorii niezawodności, różnica $D_{r,s}$ opisuje czas pomiędzy r-tym i s-tym uszkodzeniem w systemie, a spacja opisuje czas do kolejnej awarii mierzony od momentu ostatniej zaobserwowanej awarii. W kontekście modeli wartości rekordowych, różnica $D_{r,s}$ opisuje przyrost pomiędzy dwoma wybranymi rekordami, a spacje opisują przyrost do kolejnego rekordu. W związku z tym ważna jest znajomość oszacowań na wartości oczekiwane uogólnionych statystyk porządkowych oraz ich różnic i spacji, zwłaszcza oszacowań optymalnych w różnych wybranych klasach rozkładów obserwacji bazowych.

1.2. **Przegląd znanych wyników.** Podamy teraz krótkie omówienie znanych w literaturze wyników dotyczących optymalnych oszacowań na wartości oczekiwane w różnych modelach uporządkowanych zmiennych losowych.

Gumbel [31] oraz Hartley i David [32] stosując nierówność Schwarza wyznaczyli optymalne oszacowania w jednostkach wariancji dla $EX_{n:n}$, tzn. oszacowania na $E(X_{n:n}-\mu)/\sigma$. Moriguti [40] wprowadził metodę największych wypukłych minorant, dzięki której wyznaczył optymalne oszacowania dla średniej pozostałych statystyk porządkowych $EX_{r:n}$, $2 \leqslant r < n$. W celu wyznaczenia oszacowań dla $EX_{r:n}$ w jednostkach drugiego momentu dla rozkładów czasu życia z malejącą gęstością lub intensywnością awarii, Gajek oraz Rychlik [29] wprowadzili metodę projekcji. Wyniki te zostały poprawione przez Danielak [17], gdzie uzyskano analogiczne oszacowania w terminach wariancji dla średnich uciętych. Optymalne oszacowania dla wartości oczekiwanych k-tych wartości rekordowych zostały wyznaczone w pracach Nagaraja [41] w przypadku gdy $k = 1$ oraz Raqab [48] dla $k \geqslant 2$. Gajek i Okolewski [27] wyznaczyli oszacowania dla $EY_n^{(k)}$ w klasie rozkładów z malejącą gęstością lub intensywnością awarii. Większość z wyżej wspomnianych wyników została podsumowana i szczegółowo opisana w monografii Rychlika [52].

Dla pozostałych modeli uporządkowanych zmiennych losowych wyniki dotyczące optymalnych oszacowań dla wartości oczekiwanych są raczej nieliczne. Należy tu jednak wspomnieć prace Balakrishnana i in. [6], gdzie rozważane są statystyki porządkowe progresywnie cenzurowane oraz Cramera i in. [15], gdzie podane są oszacowania dla $EX_*^{(r)}$ wyrażone w jednostkach p-tych momentów absolutnych.

Równie intensywnie są badane optymalne oszacowania dla różnic i spacji, zwłaszcza w kontekście statystyk porządkowych i wartości rekordowych. Moriguti [40] podał oszacowania na wartości oczekiwane spacji $X_{r:n} - X_{r-1:n}$, $2 \leqslant r \leqslant n$, optymalne w klasie wszystkich rozkładów ze skończona wariancją. Wynik ten został uogólniony przez Danielak [18], która podała wyprowadzenie oszacowań średniej dla dowolnych różnic statystyk porządkowych $X_{s:n} - X_{r:n}$, $1 \leqslant r < s \leqslant n$, wyrażone w jednostkach p-tych momentów absolutnych. Papadatos [44] podał oszacowania dla $E(X_{s:n} - X_{r:n})$, $1 \leqslant r < s \leqslant n$, w klasie rozkładów ze skończoną średnią. Danielak i Rychlik [22] przedstawili oszacowania dla średniej spacji $E(X_{r:n} - X_{r-1:n})$, dla rozkładów z malejącą gęstością lub intensywnością awarii. Oszacowania dla wartości oczekiwanej przyrostów rekordów $Y_s^{(k)} - Y_r^{(k)}$, $1 \leqslant r < s$, zostały wyznaczone przez Danielak oraz Raqaba [19]. Przypadek spacji k-tych rekordów był rozważony przez Raqaba [49]. Oszacowania dla spacji k-tych rekordów dla rozkładów z malejącą gęstością lub intensywnością awarii zostały omówione w pracach Rychlika [50] dla $k = 1$, oraz Danielak i Rychlika [20] dla dowolnego $k \geqslant 2$.

1.3. **Cel naukowy.** Głównym celem rozprawy jest rozszerzenie wyników omówionych w poprzednim podpunkcie do modelu uogólnionych statystyk porządkowych bez nakładania żadnych ograniczeń na parametry $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Ściśle mówiąc wyznaczymy górne oszacowania dla następujących wielkości

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma}, \quad \frac{ED_{r,s}}{\sigma}, \quad \frac{ED_*^{(r)}}{\sigma}, \tag{1.2}$$

optymalne w różnych klasach rozkładów ze skończoną średnią μ i wariancją σ^2.

Najbardziej efektywną metodą stosowaną podczas wyznaczania optymalnych oszacowań dla funkcjonałów uogólnionych statystyk porządkowych jest tzw. metoda projekcji wprowadzona przez Gajka i Rychlika w pracy [29]. Jej szczegółowe omówienie oraz liczne zastosowania przedstawione są w monografii Rychlika [52]. W metodzie tej wykorzystuje się operatory rzutowania na domknięte stożki wypukłe w odpowiednio wybranych przestrzeniach Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem. Aby podać przykład efektywności tej metody omówimy krótko problem wyznaczenia oszacowań optymalnych dla wartości oczekiwanej pojedynczej uogólnionej statystyki porządkowej $X_*^{(r)}$ z rozkładów ze skończoną wariancją (zob. np. [15]). Mianowicie, niech $\mathcal{L}^2$ oznacza standardową przestrzeń Hilberta funkcji całkowalnych z kwadratem na przedziale $[0, 1]$ z iloczynem skalarnym (f, g) określonym jako całka iloczynu funkcji f i g. Wtedy średnia i wariancja rozkładu F mogą być wyrażone przy użyciu funkcji kwantylowej F^{-1} w postaci $\mu = (F^{-1}, \mathbf{1})$ oraz $\sigma = \|F^{-1} - \mu\|$. Ponadto różnica pomiędzy wartością oczekiwaną r-tej uogólnionej statystyki porządkowej $X_*^{(r)}$ oraz średnią μ może być przedstawiona w postaci

$$EX_*^{(r)} - \mu = (F^{-1} - \mu, f_{*,r} - 1). \tag{1.3}$$

Stosując nierówność Schwarza otrzymujemy nierówność

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma} \leqslant \|f_{*,r} - 1\|,$$

która w ogólnym przypadku nie jest optymalna. Dzieje się tak dlatego, że równość w nierówności Schwarza zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy obydwie funkcje podcałkowe po prawej stronie równości (1.3) są proporcjonalne. Jednakże, w większości przypadków jest to niemożliwe, gdyż funkcje kwantylowe są niemalejące, podczas gdy funkcje $f_{*,r}$ są zwykle ściśle jednomodalne (tzn. najpierw rosnące, a potem malejące). Z drugiej strony, funkcje kwantylowe są elementami domkniętego stożka wypukłego $\mathcal{C}$ wszystkich funkcji niemalejących należących do przestrzeni $\mathcal{L}^2$. Niech $P : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{C}$ oznacza operator rzutowania na stożek $\mathcal{C}$. Wtedy

$$(F^{-1} - \mu, f_{*,r} - 1) \leqslant \big(F^{-1} - \mu, P(f_{*,r} - 1)\big)$$

oraz równość zachodzi dla rozkładu F takiego, że $F^{-1} - \mu = c\,P(f_{*,r} - 1)$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$. Łącząc tę nierówność z nierównością Schwarza otrzymujemy więc optymalne oszacowanie

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma} \leqslant \|P(f_{*,r} - 1)\|.$$

W ogólnym przypadku, metoda projekcji może być zastosowana efektywnie, o ile znany jest dokładny przebieg zmienności rzutowanej funkcji. Dokładniej mówiąc, wystarczy w tym celu znajomość przedziałów monotoniczności, a w niektórych przypadkach również przedziałów wypukłości, rzutowanej funkcji. W przypadku statystyk porządkowych rzutowane funkcje oraz ich dwie pierwsze pochodne są liniowymi kombinacjami funkcji gęstości statystyk porządkowych z rozkładu jednostajnego, oznaczanych przez $f_{1:n}, \ldots, f_{n:n}$, gdzie dla $1 \leqslant r \leqslant n$

$$f_{r:n}(u) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} u^{r-1}(1-u)^{n-r}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

oznacza funkcję gęstości r-tej statystyki porządkowej z próby losowej prostej rozmiaru n z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Dlatego kluczowym wynikiem pomocniczym, umożliwiającym badanie zmian znaku dwu pierwszych pochodnych jest tzw. *własność zmniejszającej się zmienności* (ang. variation diminishing property, w skrócie VDP), którą posiadają funkcje $f_{1:n}, \ldots, f_{n:n}$. Mówi o tym następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1 ([53, 29]). *(a) Liczba miejsc zerowych w przedziale* $(0,1)$ *dowolnej kombinacji liniowej* $\sum_{j=1}^{n} a_j f_{j:n}$ *nie przekracza liczby zmian znaku w ciągu współczynników* $(a_1,\ldots,a_n)$.

(b) Pierwszy i ostatni znak kombinacji $\sum_{j=1}^{n} a_j f_{j:n}$ *są takie same jak odpowiednio pierwszy i ostatni znak w ciągu współczynników* $(a_1,\ldots,a_n)$.

Heurystycznie tezę twierdzenia można wyrazić następująco: zmienność znaku kombinacji liniowej jest mniejsza lub w najgorszym razie taka sama jak zmienność znaku w ciągu współczynników. Tłumaczy to nazwę "własność zmniejszającej się zmienności".

Dowód Twierdzenia 1.1(a) został podany przez Schoenberga [53], a dowód Twierdzenia 1.1(b) został podany w pracy [29]. Rezultaty przedstawione w Twierdzeniu 1.1 są co prawda oryginalnie sformułowane dla wielomianów Bernsteina $B_{i,n}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, ale skoro $f_{r:n} = nB_{r-1,n-1}$, to obydwa sformułowania są w sposób oczywisty równoważne.

W przypadku k-tych wartości rekordowych, przy wyznaczaniu oszacowań należy wyznaczyć przebieg zmienności rzutowanych funkcji, które są liniowymi kombinacjami funkcji $f_1^{(k)},\ldots,f_n^{(k)}$, gdzie

$$f_r^{(k)}(u) = \frac{k^n}{(r-1)!}(1-u)^{k-1}\left(-\log(1-u)\right)^{r-1}, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$$

oznacza funkcję gęstości wartości rekordowej $Y_r^{(k)}$ z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0,1)$. Różniczkowanie takich kombinacji daje w wyniku inne kombinacje liniowe funkcji $f_1^{(k)},\ldots,f_n^{(k)}$, a następnie potrzebny jest wynik będący odpowiednikiem Twierdzenia 1.1 dla gęstości k-tych wartości rekordowych z rozkładu jednostajnego. Wynik taki został sformułowany i udowodniony w pracy Gajka i Okolewskiego [27].

Skoro zatem naszym celem jest znalezienie optymalnych oszacowań funkcjonałów uogólnionych statystyk porządkowych, to należy spodziewać się, że staniemy przed podobnym problemem wyznaczenia przebiegu zmienności różnych kombinacji liniowych funkcji gęstości $f_{*,1},\ldots,f_{*,n}$ uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładu jednostajnego. W związku z tym kluczowym problemem jest sformułowanie i udowodnienie odpowiednika własności VDP dla funkcji $f_{*,1},\ldots,f_{*,n}$, co jest głównym tematem pracy [A1]. Omówienie wyników tej pracy przedstawimy w następnym rozdziale. W rozdziałach 3, 4 oraz 5, w których omawiamy wyniki prac [A2]–[A7], zastosujemy uogólnienie własności VDP w celu wyznaczenia oszacowań wielkości (1.2), optymalnych w różnych wybranych klasach rozkładów.

W rozdziale 6, w którym przedstawimy wyniki pracy [A8], rozważamy podobny problem, ale z nieco innego punktu widzenia. Zawężamy nasze rozważania do modelu zwykłych statystyk porządkowych i wyznaczymy optymalne górne i dolne oszacowania dla ilorazu

$$\frac{E(M_{r,s:n}-\mu)}{\sigma},$$

gdzie $M_{r,s:n} = \frac{1}{2}\left(X_{r:n} + X_{s:n}\right)$ jest tzw. quasi-rozstępem z próby rozmiaru n. Są to oszacowania obciążenia estymacji nieznanej średniej μ rozkładu obserwacji przy użyciu quasi-rozstępów. Praktyczne zastosowanie takich estymatorów może być dyskusyjne, ale wyniki przedstawione w rozdziale 6 (oraz w pracy [A8]) mają duże znaczenie teoretyczne. Jest to spowodowane tym, że dla danej funkcji rzutowanej oraz danego stożka wypukłego, nie są znane ogólne metody wyznaczenia rzutu funkcji na stożek. Rzutując na stożek funkcji niemalejących, stosuje się zwykle metodę największych wypukłych minorant wprowadzoną przez Morigutiego [40] oraz Rychlika [52, Ex. 3]. Podejście to daje efektywne wyniki w przypadku rzutowania funkcji jednomodalnych (tzn. mających tylko jedno maksimum lokalne), ale już dla funkcji dwumodalnych jest ono zbyt ogólne. Aby wyznaczyć dokładną postać rzutu funkcji dwumodalnych na stożek funkcji niemalejących w pracy [A8] wprowadzone zostały dwie funkcje pomocnicze, których odpowiednio wybrane własności wyznaczają jednoznacznie szukaną postać rzutu. Podejście to zostało wykorzystane przy wyznaczaniu oszacowań obciążenia innych L-statystyk (czyli liniowych kombinacji statystyk porządkowych próby), co zostanie omówione w podrozdziale 7.6. Wyniki te są ważne również z uwagi na fakt, że stanowią one wstępny krok do wyznaczenia rzutu funkcji dwumodalnych na stożek funkcji niemalejących i wypukłych, co będzie jednym z przyszłych kierunków prowadzonych przeze mnie badań.

2. Własność VDP dla gęstości uogólnionych statystyk porządkowych

W tym rozdziale omówimy wyniki zawarte w pracy [A1]. Dla ustalonego $r \geqslant 1$ oraz wektora współczynników $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ będziemy rozważać kombinację liniową

$$H_{\boldsymbol{a}}(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j f_{*,j}(x), \quad x \in [0,1],$$

gęstości uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładu jednostajnego. Naszym celem jest wyznaczenie liczby miejsc zerowych funkcji $H_{\boldsymbol{a}}$ w przedziale otwartym $(0,1)$. Główną przeszkodą jest fakt, że w ogólności funkcja $f_{*,r}$ jest wyrażona przez dość skomplikowane funkcje specjalne.

Cramer i Kamps [13] pokazali, że gęstość $f_{*,r}$, $r \geqslant 1$, może być zapisana w postaci

$$f_{*,r}(x) = c_{r-1} \mathsf{G}^{r,0}_{r,r}\left(1 - x \,\middle|\, \begin{matrix} \gamma_1, \ldots, \gamma_r \\ \gamma_1 - 1, \ldots, \gamma_r - 1 \end{matrix}\right), \quad x \in (0,1), \tag{2.1}$$

gdzie stała c_{r-1} jest określona wzorem (1.1) oraz

$$\mathsf{G}^{r,0}_{r,r}\left(s \,\middle|\, \begin{matrix} \gamma_1, \ldots, \gamma_r \\ \gamma_1 - 1, \ldots, \gamma_r - 1 \end{matrix}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{s^z}{\prod_{i=1}^r (\gamma_j - 1 - z)}\, dz \tag{2.2}$$

oznacza szczególną G-funkcję Meijera, a L jest odpowiednio dobranym konturem całkowania. Zatem w dalszych rozważaniach szczególną rolę odgrywać będą różne własności G-funkcji. Różne definicje i liczne własności G-funkcji są przedstawione np. w monografiach Luke [38] oraz Mathai [39].

Oczywiście, biorąc pod uwagę fakt, że statystyki porządkowe oraz k-te wartości rekordowe są szczególnymi przypadkami uogólnionych statystyk porządkowych, otrzymujemy równości

$$f_{*,r}(x \mid n, n-1, \ldots, n-r+1) = f_{r:n}(x),$$

oraz

$$f_{*,r}(x \mid \underbrace{k, \ldots, k}_{r \text{ razy}}) = f_r^{(k)}(x).$$

Można to również udowodnić bezpośrednio, obliczając całkę konturową we wzorze (2.2) przy użyciu twierdzenia o residuach.

Pierwszym krokiem w dowodzie własności VDP dla funkcji $f_{*,1}, \ldots, f_{*,r}$ jest badanie pierwszego znaku kombinacji liniowej $H_{\boldsymbol{a}}$.

Twierdzenie 2.1 ([A1], Thm. 1)**.** *Dla dowolnego $r \geqslant 1$ i dla wszystkich $\gamma_1, \ldots, \gamma_r > 0$ oraz $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^r$, pierwszy znak funkcji $H_{\boldsymbol{a}}$ pokrywa się ze znakiem pierwszej niezerowej współrzędnej wektora $\boldsymbol{a}$.*

Następnie, dla dowolnej funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ przez $Z(f)$ będziemy oznaczać liczbę jej miejsc zerowych w przedziale otwartym $(0,1)$. Ponadto dla ustalonego wektora $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^r$ przez $S^-(\boldsymbol{a}) = S^-(a_1, \ldots, a_r)$ oznaczamy liczbę zmian znaku w ciągu $(a_1, \ldots, a_r)$ po usunięciu zer. Następne twierdzenie jest daleko idącym uogólnieniem Twierdzenia 2.2 oraz odpowiedniego rezultatu Gajka i Okolewskiego [27].

Twierdzenie 2.2 ([A1], Thm. 2). *Dla dowolnego $r \geqslant 1$ oraz wszystkich $\gamma_1, \dots, \gamma_r > 0$ i $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^r$ zachodzi nierówność*

$$Z(H_{\boldsymbol{a}}) \leqslant S^-(\boldsymbol{a}).$$

Zaskakujący jest fakt, że pomijając zastosowanie skomplikowanych funkcji specjalnych dowód tego stwierdzenia jest relatywnie prosty. Głównym pomysłem w dowodzie jest rozważenie pomocniczej funkcji

$$L_{\boldsymbol{a}}(x) = (1-x)^{\gamma_1} \frac{d}{dx} \left[(1-x)^{1-\gamma_1} H_{\boldsymbol{a}}(x) \right].$$

Stosując odpowiednie własności G-funkcji można pokazać, że $L_{\boldsymbol{a}}$ jest również kombinacją liniową, ale $r-1$ funkcji gęstości

$$f_{*,1}(x \mid \gamma_2), f_{*,2}(x \mid \gamma_2, \gamma_3), \dots, f_{*,r-1}(x \mid \gamma_2, \dots, \gamma_r)$$

ze współczynnikami $a_2, \dots, a_r$. Zatem w rzeczywistości funkcja $L_{\boldsymbol{a}}$ nie zależy ani od wartości a_1, ani od γ_1. Teza Twierdzenia 2.2 wynika z rozumowania indukcyjnego w połączeniu z Twierdzeniem 2.1 oraz klasycznym twierdzeniem Rolle'a.

Okazuje się również, że dowód Twierdzenia 2.2 jest nieco podobny do dowodów tzw. reguły znaków Kartezjusza przedstawionych przez Wanga [55] i Komornika [37]. Autorzy ci również stosowali twierdzenie Rolle'a do badania liczby zer danej funkcji, znając liczbę zer jej pochodnej. Jednakże należy podkreślić, że dowód Twierdzenia 2.2 zamieszczony w pracy [A1] został odkryty niezależnie od prac [55] i [37]. Pierwsza wersja artykułu [A1] została przesłana do druku pod koniec roku 2004, kiedy to wyżej wspomniane artykuły jeszcze nie ukazały się w druku.

Aby sformułować pełny odpowiednik Twierdzenia 1.1 należy jeszcze zbadać ostatni znak kombinacji liniowej $H_{\boldsymbol{a}}$. Wymaga to znacznie bardziej wyrafinowanych rozważań niż w przypadku wielomianów Bernsteina. Ustalmy więc $r \geqslant 2$ oraz parametry $\gamma_1, \dots, \gamma_r > 0$. Przez $\gamma_{1:r}$ będziemy oznaczać najmniejszy z parametrów $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ oraz określmy

$$\ell = \max\{1 \leqslant j \leqslant r : \gamma_j = \gamma_{1:r}\}.$$

Innymi słowy, współrzędna γ_ℓ jest ostatnim powtórzeniem wartości $\gamma_{1:r}$ w ciągu parametrów. Ponadto, bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że ostatni element wektora $\boldsymbol{a}$ jest różny od zera. Ostatni znak funkcji $H_{\boldsymbol{a}}$ jest wyznaczony w następnym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.3 ([A1], Thm. 3). *Niech a_k, dla pewnego $1 \leqslant k \leqslant r$, będzie pierwszym niezerowym elementem wektora $\boldsymbol{a}$. Wówczas ostatni znak funkcji $H_{\boldsymbol{a}}$ pokrywa się ze znakiem liczby*

$$A_r(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{a}) = a_r + \sum_{j=\max(k,\ell)}^{r-1} a_j \prod_{i=j+1}^{r} (\gamma_i - \gamma_\ell),$$

przy założeniu, że $A_r(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{a}) \neq 0$.

Jeżeli $A_r(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{a}) = 0$, to kombinacja liniowa $H_{\boldsymbol{a}}$ może być zastąpiona przez inną kombinację liniową funkcji $f_{*,1}, \dots, f_{*,r-1}$ z parametrami $(\gamma_1, \dots, \gamma_{\ell-1}, \gamma_{\ell+1}, \dots, \gamma_r)$. Ta nowa kombinacja może być ponownie badana przy zastosowaniu Twierdzenia 2.3. Jednakże, jeżeli parametry $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ spełniają prosty warunek $\gamma_1 \geqslant \dots \geqslant \gamma_r > 0$, to łatwo sprawdzić, że $\ell = r$ oraz $A_r(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{a}) = a_r$, co implikuje następujący wniosek.

Wniosek 2.4. *Jeżeli $\gamma_1 \geqslant \dots \geqslant \gamma_r > 0$, to dla dowolnego wektora $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^r$, ostatni znak funkcji $H_{\boldsymbol{a}}$ jest taki sam jak znak ostatniego niezerowego elementu wektora $\boldsymbol{a}$.*

W kolejnych rozdziałach będziemy czasami potrzebować nieznacznego uogólnienia własności VDP. Dla dowolnej dystrybuanty $W : [a, d) \to \mathbb{R}$, gdzie $-\infty < a < d \leqslant +\infty$, określamy $\hat{f}_{*,r} = f_{*,r}W$, $r \geqslant 1$, oraz

$$\hat{H}_{\boldsymbol{a}}(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j \hat{f}_{*,j}(x), \quad x \in [a, d).$$

Wniosek 2.5. *Dla dowolnego wektora $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, liczba zer funkcji $\hat{H}_{\boldsymbol{a}}$ w przedziale otwartym (a, d) nie przekracza liczby $S^-(\boldsymbol{a})$ zmian znaku w ciągu współczynników $(a_1, \ldots, a_r)$ po usunięciu zer.*

Jako pierwsze zastosowanie uogólnionej własności VDP, zbadamy przebieg zmienności gęstości uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładu jednostajnego. Cramer i in. [16] pokazali, że każda z funkcji $f_{*,r}$ jest jednomodalna, bez względu na wartości parametrów $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. Oznacza to, że funkcja $f_{*,r}$ jest albo monotoniczna na przedziale $(0, 1)$, albo rosnąca–malejąca, ale nie daje to żadnej informacji na temat jej przedziałów wypukłości. Rozważamy pojedynczą funkcję $f_{*,r}$, a więc na mocy wzoru (2.2) możemy założyć, że $\gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_r > 0$. W ogólnym przypadku, gdy parametry $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ nie są uporządkowane malejąco, warunki na γ_r oraz γ_{r-1} stają się warunkami na dwa najmniejsze elementy $\gamma_{1:r}$ oraz $\gamma_{2:r}$ wektora parametrów.

Stosując własności rekurencyjne dla pochodnych G-funkcji można udowodnić, że dla $r \geqslant 1$ zachodzi wzór

$$f'_{*,r}(x) = \frac{1}{1-x}\Big(\gamma_r f_{*,r-1}(x) - (\gamma_r - 1) f_{*,r}(x)\Big). \tag{2.3}$$

który łatwo implikuje równość

$$f''_{*,r}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}\Big[\alpha_{r-2} f_{*,r-2}(x) + \alpha_{r-1} f_{*,r-1}(x) + \alpha_r f_{*,r}(x)\Big], \tag{2.4}$$

gdzie $\alpha_{r-2} = \gamma_r\gamma_{r-1}$, $\alpha_{r-1} = -\gamma_r(\gamma_r + \gamma_{r-1} - 3)$ oraz $\alpha_r = (\gamma_r - 1)(\gamma_r - 2)$. Stosujemy tutaj konwencję $f_{*,j} \equiv 0$ dla $j = 0, -1, -2, \ldots$. Analizując zmiany znaku pochodnych $f'_{*,r}$ oraz $f''_{*,r}$ przy zastosowaniu własności VDP dowodzimy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.6 ([A1], Thm. 4)**.** *Załóżmy, że $r \geqslant 3$ oraz $\gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_r > 0$. W zależności od wartości parametrów γ_{r-1} oraz γ_r przebieg zmienności funkcji $f_{*,r}$ jest następujący.*

- *Jeżeli $\gamma_r \leqslant 1$ oraz $\gamma_{r-1} + \gamma_r \leqslant 3$, to $f_{*,r}$ jest funkcją rosnącą i wypukłą.*
- *Jeżeli $\gamma_r < 1$ oraz $\gamma_{r-1} + \gamma_r > 3$, to funkcja $f_{*,r}$ jest rosnąca oraz albo wypukła, albo wypukła-wklęsła-wypukła.*
- *Jeżeli $\gamma_r = 1$ oraz $\gamma_{r-1} > 2$, to $f_{*,r}$ jest funkcją rosnącą, najpierw wypukłą, a potem wklęsłą.*
- *Jeżeli $1 < \gamma_r \leqslant 2$, to $f_{*,r}$ jest najpierw funkcją rosnącą wypukłą, następnie rosnącą wklęsłą, a ostatecznie malejącą wklęsłą.*
- *Jeżeli $\gamma_r > 2$, to $f_{*,r}$ jest najpierw funkcją rosnącą wypukłą, następnie rosnącą wklęsłą, potem malejącą malejącą wklęsłą, a ostatecznie malejącą wypukłą.*

W Twierdzeniu 4 pracy [A1] rozważono również szczegółowo przypadki $r = 1$ i $r = 2$. Zauważmy jednakże, że powyższa metoda nie pozwala na wyznaczenie analityczne miejsc zerowych pierwszej i drugiej pochodnej funkcji $f_{*,r}$. W praktyce muszą być one wyznaczone numerycznie przy użyciu programów algebry komputerowej.

W kolejnych rozdziałach będziemy wielokrotnie stosować Twierdzenia 2.1, 2.2 i 2.3, oraz Wnioski 2.4 i 2.5, do wyznaczania przebiegu zmienności różnych innych rzutowanych funkcji, oraz do badania zmian znaku funkcji pomocniczych wyznaczających szukane projekcje.

3. Oszacowania dla pojedynczych uogólnionych statystyk porządkowych z wybranych klas rozkładów

W tym rozdziale omówimy wyniki zawarte w artykułach [A2], [A3] oraz [A4]. Będziemy rozważać oszacowania średnio-wariancyjne dla wartości oczekiwanej pojedynczej uogólnionej statystyki porządkowej $X_*^{(r)}$, tzn. górne oszacowania ilorazu

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma}, \tag{3.1}$$

gdzie $X_*^{(r)}$ pochodzi z rozkładu F ze skończoną średnią μ oraz wariancją σ^2. Oszacowania optymalne w klasie wszystkich takich rozkładów zostały wyznaczone w pracy [16]. Naszym pierwszym celem w tym rozdziale jest wyznaczenie oszacowań optymalnych w rodzinach rozkładów z malejącą gęstością (lub nieco ogólniej — klasy DD) lub malejącą intensywnością awarii (ogólniej — klasy DFR). Drugim celem będzie wyznaczenie innych ograniczonych rodzin rozkładów, w których możliwe jest wyznaczenie optymalnych oszacowań przy użyciu metody projekcji.

Uwaga 1. W tym rozdziale bez zmniejszania ogólności rozważań będziemy zakładać, że parametry uogólnionych statystyk porządkowych spełniają warunek $\gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_r > 0$.

Wspomniane wyżej rodziny rozkładów zdefiniowane są w terminach porządku wypukłego dystrybuant zdefiniowanego następująco. Dla dwu dystrybuant F oraz G piszemy $F \succ_c G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F^{-1}G$ jest funkcją wypukłą na nośniku rozkładu G. Wówczas będziemy pisać $F \in \mathrm{DD}$ jeśli $F \succ_c U$, gdzie $U(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, 1)$. Ponadto piszemy $F \in \mathrm{DFR}$ jeśli $F \succ_c V$, gdzie $V(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, $x \geqslant 0$, oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu wykładniczego. Oznaczenia DD i DFR są skrótami od angielskich wyrażeń *decreasing density* (czyli malejąca gęstość) oraz *decreasing failure rate* (czyli malejąca intensywność awarii). Terminologia ta związana jest z faktem, że jeśli dodatkowo założymy, że rozkład F jest typu absolutnie ciągłego z funkcją gęstości f, to warunek $F \succ_c U$ jest równoważny temu, że f jest funkcją nierosnącą na nośniku rozkładu F. Ponadto, jeżeli

$$r_F(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} \tag{3.2}$$

oznacza funkcję intensywności awarii rozkładu F, to warunek $F \succ_c V$ jest równoważny temu, że r_F jest funkcją nierosnącą. Rodziny rozkładów DD, a zwłaszcza DFR odgrywają ważną rolę w teorii niezawodności (zob. np. [8]).

Analogicznie jak zdefiniowaliśmy klasy DD i DFR, dla dowolnie ustalonej dystrybuanty W określamy rodzinę

$$\mathcal{F}_W = \{F : F \succ_c W\} \tag{3.3}$$

rozkładów, które następują po W w porządku wypukłym. W podrozdziałach 3.1 i 3.2 wyznaczymy oszacowania dla (3.1) optymalne w klasach $\mathcal{F}_W$ dla $W = U, V$. W ostatnim podrozdziale będziemy rozważać bardziej ogólną postać rozkładu W.

Przypomnimy teraz krótko główne wyniki dotyczące metody projekcji, które będą używane w tym rozdziale. Cramer i in. [16] udowodnili, że wartość oczekiwana r-tej statystyki porządkowej z rozkładu F może być zapisana w postaci

$$EX_*^{(r)} = \int_0^1 F^{-1}(x) f_{*,r}(x)\, dx,$$

gdzie $f_{*,r}$ oznacza gęstość uogólnionej statystyki porządkowej z rozkładu jednostajnego U (daną powyżej wzorem (2.1)). Aby zastosować metodę projekcji dla ustalonej dystrybuanty $W : [a, d) \mapsto \mathbb{R}$, rozważamy przestrzeń Hilberta $\mathcal{L}_W^2$, funkcji rzeczywistych określonych na przedziale $[a, d)$, które są całkowalne z kwadratem z wagą $w = W'$. Ponadto załóżmy, że

$$\int_a^d x^2 w(x)\, dx < \infty, \tag{3.4}$$

co zapewnia, że funkcje liniowe są elementami przestrzeni $\mathcal{L}^2_W$. Niech

$$\|g\|_W = \left(\int_a^d (g(x))^2 w(x)\, dx\right)^{1/2}$$

oznacza normę w przestrzeni $\mathcal{L}^2_W$. Wtedy zbiór

$$\mathcal{C}_W = \left\{g \in \mathcal{L}^2_W : g \text{ jest funkcją niemalejącą i wypukłą}\right\} \tag{3.5}$$

jest domkniętym stożkiem wypukłym w $\mathcal{L}^2_W$. Oznacza to, że $\mathcal{C}_W \subset \mathcal{L}^2_W$ jest podzbiorem domkniętym i takim, że jeżeli $f, g \in \mathcal{C}_W$ oraz $a, b \geqslant 0$, to $af + bg \in \mathcal{C}_W$.

Niech $P_W : \mathcal{L}^2_W \mapsto \mathcal{C}_W$ oznacza operator rzutowania na stożek $\mathcal{C}_W$ (zob. [3], Wniosek 1.4.2). Określmy $\hat{f}_{*,r} = f_{*,r}W$ oraz $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$. Na mocy metody projekcji oszacowanie

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma} \leqslant B_{r,W}(\boldsymbol{\gamma}) = \left(\left\|P_W \hat{f}_{*,r}\right\|_W^2 - 1\right)^{1/2}, \tag{3.6}$$

jest optymalne w klasie $\mathcal{F}_W$. Dokładniej, równość w nierówności (3.6) jest osiągnięta dla rozkładu $F \in \mathcal{F}_W$ takiego, że

$$\frac{F^{-1}W(x) - \mu}{\sigma} = \frac{P_W \hat{f}_{*,r}(x) - 1}{B_{r,W}(\boldsymbol{\gamma})}. \tag{3.7}$$

Uwaga 2. Warunek (3.7) pozwala wyznaczyć dokładną analityczną postać rozkładu F, dla którego oszacowanie jest osiągnięte. W dalszym ciągu będziemy w większości przypadków pomijać precyzyjne wyrażenie dla takiego F, aby nie przysłaniać ogólnej prezentacji technicznie skomplikowanymi wzorami.

Aby obliczyć wartość oszacowania $B_{r,W}(\boldsymbol{\gamma})$ w nierówności (3.6), konieczna jest znajomość projekcji $P_W \hat{f}_{*,r}$. Aby ją wyznaczyć zastosujemy znane wyniki uzyskane przez Danielak [17] (zob. także [29]). Projekcja $P_W h$ może być efektywnie wyznaczona dla funkcji $h \in \mathcal{L}^2_W$ spełniającej następujący zbiór warunków:

(A) funkcja $h : [a, d) \mapsto \mathbb{R}$ jest nieujemna, ograniczona, dwukrotnie różniczkowalna i taka, że $h(a) = 0$ oraz istnieją punkty b i c takie, że $a \leqslant b < c \leqslant d$ oraz h jest funkcją rosnącą i wypukłą na przedziale (a, b), rosnącą i wklęsłą na przedziale (b, c), oraz malejącą na przedziale (c, d). Ponadto zakładamy, że $\int_a^d h(x)w(x)\, dx = 1$.

Dla funkcji h spełniającej warunki (A) określamy funkcję pomocniczą

$$\lambda_*(y) = \frac{\int_y^d (x - y)(h(x) - h(y))w(x)\, dx}{\int_y^d (x - y)^2 w(x)\, dx}. \tag{3.8}$$

Wtedy kształt rzutu $P_W h$ zależy od zachowania funkcji K_W oraz L_W zdefiniowanych wzorami

$$K_W(y) = \lambda_*(y) - h'(y), \quad a \leqslant y \leqslant b, \tag{3.9}$$

oraz

$$L_W(y) = \int_y^d \left[h(x) - h(y) - \lambda_*(y)(x - y)\right] w(x)\, dx, \quad a \leqslant y \leqslant d. \tag{3.10}$$

Zależność ta jest opisana w następującym twierdzeniu zaczerpniętym z pracy [17].

Stwierdzenie 3.1. *Niech* $\mathcal{K} = \{a \leqslant y \leqslant b : K_W(y) \geqslant 0$ *oraz* $L_W(y) = 0\}$. *Jeżeli* $\mathcal{K} \neq \varnothing$ *oraz* $y^* = \sup \mathcal{K}$, *to*

$$P_W h(x) = \begin{cases} h(x), & \textit{dla } x \leqslant y^*, \\ h(y^*) + \lambda_*(y^*)(x - y^*), & \textit{dla } x > y^*. \end{cases}$$

W przeciwnym razie, projekcja $P_W h$ *jest jednoznacznie wyznaczoną funkcja liniową, albo stałą równą 1, albo ściśle rosnącą na przedziale* (a, d).

Następny lemat jest również pomocny w analizie zachowania funkcji L_W. Niech

$$\mathcal{K}^+ = \{y \in (0, b] : K_W(y) > 0\}.$$

Lemat 3.2. *Jeżeli* $\mathcal{K}^+ = (0, v)$ *oraz funkcja* L_W *ma skończoną liczbę zer, to* L_W *ma na zbiorze* $\mathcal{K}^+$ *wartości albo tylko dodatnie, albo tylko ujemne, albo najpierw ujemne, a potem dodatnie.*

Stwierdzenie 3.1 oraz Lemat 3.2 pokazują, że problem wyznaczenia zer oraz zmian znaku funkcji K_W i L_W ma także duże znaczenie. Problem ten jest również rozwiązywany przy zastosowaniu wyników pracy [A1] omówionych w rozdziale 2.

3.1. **Rozkłady klasy DD.** Aby wyznaczyć oszacowanie dla wielkości (3.1) optymalne w klasie rozkładów DD, zastosujemy Stwierdzenie 3.1 podstawiając $W = U$.

Na mocy Twierdzenia 2.6 stwierdzamy, że funkcja $f_{*,r}$ spełnia warunki (A) jeżeli $r \geqslant 2$ i $\gamma_r > 1$ lub $\gamma_r = 1$ i $\gamma_{r-1} > 2$. Dla pozostałych wartości parametrów $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ optymalne oszacowania są opisane w Lemacie 8 pracy [A2].

Następnie określamy pomocnicze współczynniki

$$\pi_{j,r} = \prod_{i=j}^{r} \frac{\gamma_i}{\gamma_i + 1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r.$$

Wtedy szczegółowe i pracochłonne obliczenia pokazują, że funkcje λ_*, K_U oraz L_U mogą być przedstawione jako kombinacje liniowe gęstości $f_{*,1}, \ldots, f_{*,r}$ ze współczynnikami zależnymi jedynie od wartości $\pi_{1,r}, \ldots, \pi_{r,r}$ oraz samych parametrów $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. W szczególności, zmiany znaku funkcji K_U i L_U mogą być analizowane przy użyciu własności VDP, a więc Twierdzeń 2.1 i 2.2 oraz Wniosku 2.4. To z kolei umożliwia zastosowanie Lematu 3.2, co prowadzi do głównego wyniku tego podrozdziału.

Twierdzenie 3.3 ([A2], Thm. 9). *Ustalmy* $r \geqslant 2$ *oraz parametry* $\gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_r > 0$ *takie, że* $\gamma_r > 1$ *lub* $\gamma_r = 1$ *i* $\gamma_{r-1} > 2$. *Niech* $X_*^{(r)}$ *będzie* r*-tą uogólnioną statystyką porządkową z parametrami* $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ *z rozkładu* $F \in \mathrm{DD}$, *o średniej* $\mu \in \mathbb{R}$ *i skończonej wariancji* σ^2.

Jeżeli $\pi_{1,r} \geqslant \frac{1}{2}$, *to* $EX_*^{(r)} \leqslant \mu$.

Jeżeli $\frac{1}{3} \leqslant \pi_{1,r} < \frac{1}{2}$, *to*

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma} \leqslant \sqrt{3}\,(1 - 2\pi_{1,r}),$$

a równość zachodzi, gdy F *jest rozkładem jednostajnym na przedziale* $\left[\mu - \sigma\sqrt{3}, \mu + \sigma\sqrt{3}\right]$.

Jeżeli natomiast $\pi_{1,r} < \frac{1}{3}$, *to*

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma} \leqslant B = B_r(\boldsymbol{\gamma}),$$

gdzie

$$B^2 = \int_0^{y^*} (f_{*,r}(x))^2 \, dx + (f_{*,r}(y^*))^2 + \frac{(\lambda_*(y^*))^2}{3}(1 - y^*)^3 + f_{*,r}(y^*)(1 - y^*)^2 - 1$$

oraz y^* *jest najmniejszym dodatnim rozwiązaniem równania* $L_U(y^*) = 0$.

Zauważmy, że jeżeli $\gamma_j = n - j + 1$, dla $1 \leqslant j \leqslant r$, to $\pi_{1,r} = 1 - \frac{r}{n+1}$, a więc Twierdzenie 3.3 jest uogólnieniem Wniosku 1 z pracy [17] o oszacowaniach zwykłych statystyk porządkowych. Jeżeli natomiast $\gamma_j = k$, $1 \leqslant j \leqslant r$, to $\pi_{1,r} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^r$. Zatem w przypadku k-tych wartości rekordowych Twierdzenie 3.3 jest wzmocnieniem Stwierdzenia 1 z pracy [27], gdzie rozważano wyłącznie rozkłady na dodatniej półosi. Dla wszystkich pozostałych wartości parametrów $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ otrzymaliśmy całkowicie nowy rezultat. W szczególności, przyjmując na przykład $\gamma_j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j \leqslant r$ takie, że $\gamma_1 > \ldots > \gamma_r \geqslant 1$, z Twierdzenia 3.3 otrzymamy optymalne oszacowania na $EX_{r:n,N}$, a więc dla wartości oczekiwanych statystyk porządkowych progresywnie cenzurowanych z rozkładów F klasy DD.

3.2. **Rozkłady klasy DFR.** W tym podrozdziale wyznaczymy wartości oszacowań dla $EX_*^{(r)}$ optymalnych w klasie rozkładów DFR. Zastosujemy Stwierdzenie 3.1 podstawiając $W = V$, gdzie $V(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, $x \geqslant 0$, oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu wykładniczego. Wtedy $\hat{f}_{*,r} = f_{*,r}V$, a Lemat 4.1 w pracy [A3] pokazuje, że funkcja $\hat{f}_{*,r}$ spełnia warunki (A) jeżeli $r \geqslant 2$ oraz $\gamma_r \geqslant 1 \neq \gamma_{r-1}$. Optymalne oszacowania w pozostałych przypadkach zostały wyznaczone w sekcji 4 pracy [A3].

Dla dowolnych parametrów $\gamma_1, \ldots, \gamma_r > 0$ określamy

$$\rho_{j,r} = \sum_{i=j}^{r} \frac{1}{\gamma_i}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r.$$

Podobnie jak w przypadku $W = U$, funkcje λ_*, K_V i L_V mogą być zapisane jako kombinacje liniowe funkcji $\hat{f}_{*,1}, \ldots, \hat{f}_{*,r}$ ze współczynnikami, które zależą tylko od wartości $\rho_{1,r}, \ldots, \rho_{r,r}$ oraz $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. Zatem postępując analogicznie jak w przypadku rozkładów klasy DD dowodzimy głównego wyniku pracy [A3].

Twierdzenie 3.4 ([A3], Thm. 4.2). *Ustalmy $r \geqslant 2$ oraz parametry $\gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_r \geqslant 1$ takie, że $\gamma_{r-1} \neq 1$. Niech $X_*^{(r)}$ będzie r-tą uogólnioną statystyką porządkową z rozkładu $F \in$ DFR ze średnią μ i skończoną wariancją σ^2.*

Jeżeli $\rho_{1,r} \leqslant 1$, to $EX_*^{(r)} \leqslant \mu$.

Jeżeli $1 < \rho_{1,r} \leqslant 2$, to

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma} \leqslant \rho_{1,r} - 1$$

a równość zachodzi dla odpowiedniego przesuniętego rozkładu wykładniczego.

Jeżeli natomiast $\rho_{1,r} > 2$, to

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma} \leqslant C = C_r(\boldsymbol{\gamma})$$

gdzie

$$C^2 = \int_0^{y^*} \left(\hat{f}_{*,r}(x)\right)^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-y^*}\left\{\left(\hat{f}_{*,r}(y^*)\right)^2 + 2\lambda_*(y^*)\hat{f}_{*,r}(y^*) + 2\left(\lambda_*(y^*)\right)^2\right\} - 1$$

oraz y^* jest najmniejszym dodatnim rozwiązaniem równania $L_V(y^*) = 0$.

Podstawiając $\gamma_j = n - j + 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, widzimy, że Twierdzenie 3.4 jest uogólnieniem Wniosku 2 z pracy [17]. Kładąc natomiast $\gamma_j = k$ z Twierdzenia 3.4 otrzymujemy wzmocnioną wersję Stwierdzenia 2 z pracy [27].

3.3. **Rodziny rozkładów, dla których można wyznaczyć optymalne oszacowania.** W poprzednich dwóch podrozdziałach wyznaczone zostały oszacowania na $EX_*^{(r)}$ (dokładniej na ilorazy (3.1)), optymalne w klasach DD lub DFR. Oszacowania te uzyskano łącząc trzy narzędzia:

(a) metodę projekcji wprowadzoną w pracy [28];
(b) wyniki prac [17, 29] dotyczące wyznaczania rzutu funkcji spełniających warunki (A);
(c) własność VDP gęstości uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładu jednostajnego (Twierdzenie 2.2 i pozostałe wyniki rozdziału 2).

Omówimy teraz następujący problem postawiony i rozwiązany w pracy [A4]. Przez analogię do definicji rodzin rozkładów DD i DFR, dla ustalonej dystrybuanty W zdefiniowaliśmy klasę $\mathcal{F}_W = \{F : F \succ_c W\}$ rozkładów następujących po rozkładzie W w porządku wypukłym. Powstaje teraz pytanie dla jakich W można wyznaczyć oszacowania dla (3.1) optymalne w klasie $\mathcal{F}_W$. Wiemy już, że można to zrobić, gdy $W = U$ lub $W = V$, a w tym podrozdziale pokażemy, że stosując powyższe trzy narzędzia, można to zrobić tylko w przypadku, gdy $W = W_\alpha$, dla pewnego ustalonego $\alpha > -\frac{1}{2}$, gdzie

$$W_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \alpha x)^{1/\alpha}, & \text{dla } x \geqslant 0 \text{ jeżeli } \alpha < 0; \\ 1 - (1 - \alpha x)^{1/\alpha}, & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\alpha} \text{ jeżeli } \alpha > 0; \\ 1 - \mathrm{e}^{-x}, & \text{dla } x \geqslant 0 \text{ jeżeli } \alpha = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

oznacza tzw. *uogólniony rozkład Pareto*. Został on wprowadzony przez Pickandsa [47], a jego szczególnymi przypadkami są rozkłady: potęgowy (gdy $\alpha > 0$), Pareto (gdy $\alpha < 0$) oraz wykładniczy (gdy $\alpha = 0$). Więcej informacji i zastosowań uogólnionych rozkładów Pareto można znaleźć np. w monografii [33].

Oczywiście będziemy stosować wzory (3.6) i (3.7), a więc konieczne jest wyznaczenie projekcji $P_W \hat{f}_{*,r}$ przy użyciu Stwierdzenia 3.1. Zatem cel tego podrozdziału może być przeformułowany następująco: chcemy znaleźć rozkłady W, dla których potrafimy zbadać przebieg zmienności funkcji $\hat{f}_{*,r}$, K_W oraz L_W.

Najpierw rozważmy funkcję $\hat{f}_{*,r}$. Stosując wzór (2.3) łatwo przekonać się, że jest ona albo monotoniczna, albo rosnąca-malejąca, bez względu na wybór rozkładu W. Jednakże, aby zapisać drugą pochodną $\hat{f}''_{*,r}$ w postaci analogicznej do (2.4), należy założyć, że W jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną na swoim nośniku oraz, że spełniony jest warunek

$$\frac{W''(x)}{1 - W(x)} = c \left(\frac{W'(x)}{1 - W(x)} \right)^2 \tag{3.12}$$

dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$. Wtedy $\hat{f}''_{*,r}$ jest liniową kombinacją funkcji $\hat{f}_{*,j}$, $1 \leqslant j \leqslant r$, ze stałymi współczynnikami (podaną we wzorze (3.13) poniżej), a więc może być ona analizowana przy użyciu własności VDP. W przeciwnym razie, c jest funkcją zmiennej x, i współczynniki kombinacji nie są stałymi, lecz również funkcjami. Niestety, na chwilę obecną nie są znane metody badania takich kombinacji, i dlatego w dalszych rozważaniach ograniczamy się do rozkładów spełniających warunek (3.12). Z następnego lematu wynika, że są to jedynie uogólnione rozkłady Pareto.

Lemat 3.5 ([A4], Lem. 2.1)**.** *Jeżeli W jest dwukrotnie różniczkowalną dystrybuantą taką, że $W(0) = 0$, i spełniającą warunek* (3.12) *dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, to W jest przeskalowanym uogólnionym rozkładem Pareto, to znaczy $W(x) = W_\alpha(\lambda x)$, gdzie $\alpha = 1 + c$, $\lambda > 0$ jest dowolną stałą dodatnią oraz W_α jest dane wzorem* (3.11)*.*

Przeanalizujmy teraz znaczenie warunku $F \succ_c W_\alpha$. Jest on równoważny temu, że funkcja $W_\alpha^{-1} F$ jest wypukła na nośniku rozkładu F. Zatem, jeżeli F jest rozkładem absolutnie ciągłym o funkcji gęstości f, to warunek $F \succ_c W_\alpha$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy pochodna

$$\left(W_\alpha^{-1}F\right)'(y) = \left(1 - F(y)\right)^{\alpha-1} f(y) := \gamma_\alpha(y)$$

jest funkcją nierosnącą. Funkcja γ_α jest nazywana uogólnioną intensywnością awarii rozkładu F względem rozkładu W_α. Zauważmy, że dla $\alpha = 0$ funkcja $\gamma_0 = r_F$ jest zwykłą intensywnością awarii określoną wzorem (3.2). Dla ogólnego rozkładu W odpowiadająca funkcja γ_W, oznaczająca uogólnioną intensywność awarii rozkładu F względem rozkładu W była rozważana już w roku 1970 w pracy Barlowa i van Zweta [9]. Motywuje to następującą definicję.

Definicja 1. Dla ustalonego $\alpha \in \mathbb{R}$ określamy klasę rozkładów

$$\mathrm{DGFR}(\alpha) = \{F : F \succ_c W_\alpha\}.$$

Będziemy czasami mówić, że elementy klasy $\mathrm{DGFR}(\alpha)$ mają malejącą uogólnioną intensywność awarii.

W pracach [9, 12] pokazano, że w zastosowaniach praktycznych można estymować funkcję γ_α, lub innymi słowy, można sprawdzić czy (zwykle nieznany) rozkład F jest elementem klasy $\mathrm{DGFR}(\alpha)$, czy też nie.

Podsumowując, na mocy Lematu 3.5, potrafimy wyznaczyć projekcję $P_W \hat{f}_{*,r}$ (i w konsekwencji wartość oszacowania w nierówności (3.6)) tylko w przypadku, gdy $W = W_\alpha$. Ponadto, z elementarnych obliczeń wynika, że należy założyć, że $\alpha > -\frac{1}{2}$, gdyż dystrybuant W_α powinna spełniać warunek (3.4). Ustalmy więc $\alpha > -\frac{1}{2}$ i niech $\hat{f}_{*,r} = f_{*,r} W_\alpha$. Wtedy

$$\hat{f}''_{*,r}(x) = \frac{1}{(1-\alpha x)^2}\left\{a_{r-2}\hat{f}_{*,r-2}(x) + a_{r-1}\hat{f}_{*,r-1}(x) + a_r \hat{f}_{*,r}(x)\right\}, \tag{3.13}$$

gdzie współczynniki a_{r-2}, a_{r-1} i a_r zależą tylko od wartości α, γ_{r-1} oraz γ_r. Badając zmiany znaku pochodnej $\hat{f}''_{*,r}$ przy użyciu Wniosku 2.5, dochodzimy do konkluzji, że rzutowana funkcja $\hat{f}_{*,r}$ spełnia warunki (A), jeśli $r \geqslant 2$ oraz albo $\gamma_r > 1$, albo $\gamma_r = 1$ i $\gamma_{r-1} > 1 + \alpha$.

Będziemy używać oznaczenia

$$\sigma_{j,r}(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\left(1 - \displaystyle\prod_{i=j}^{r} \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \alpha}\right), & \text{gdy } \alpha \neq 0, \\ \displaystyle\sum_{i=j}^{r} \frac{1}{\gamma_i}, & \text{gdy } \alpha = 0. \end{cases}$$

Postępując analogicznie jak w przypadku klas DD i DFR otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 3.6 ([A4], Thm. 3.1). *Ustalmy $\alpha > -\frac{1}{2}$, $r \geqslant 2$ oraz parametry $\gamma_1 \geqslant \ldots \geqslant \gamma_r > 0$ takie, że $\gamma_r > 1$, lub $\gamma_r = 1$ i $\gamma_{r-1} > 1 + \alpha$. Niech $X_*^{(r)}$ będzie r-tą uogólnioną statystyką porządkową z parametrami $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ z rozkładu $F \in \mathrm{DGFR}(\alpha)$ o skończonej średniej $\mu \in \mathbb{R}$ i wariancji σ^2.*

Jeżeli $\sigma_{1,r}(\alpha) \leqslant \frac{1}{1+\alpha}$, to $EX_*^{(r)} \leqslant \mu$.

Jeżeli $\frac{1}{1+\alpha} < \sigma_{1,r}(\alpha) \leqslant \frac{2}{1+2\alpha}$, to

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma} \leqslant B_{r,\alpha}(\boldsymbol{\gamma}) = \sqrt{1+2\alpha}\left\{(1+\alpha)\sigma_{1,r}(\alpha) - 1\right\},$$

a równość zachodzi dla odpowiednio przesuniętego i przeskalowanego uogólnionego rozkładu Pareto W_α.

Jeżeli natomiast $\sigma_{1,r}(\alpha) > \frac{2}{1+2\alpha}$, *to*

$$\frac{EX_*^{(r)} - \mu}{\sigma} \leqslant B = B_{r,\alpha}(\boldsymbol{\gamma}),$$

gdzie

$$\begin{aligned} B^2 = & \int_0^{y^*} \left(\hat{f}_{*,r}(x)\right)^2 w_\alpha(x)\,dx + \left(\hat{f}_{*,r}(y^*)\right)^2 (1-\alpha y^*)^{1/\alpha} \\ & + \frac{2}{1+\alpha}\,\lambda_*(y^*)\hat{f}_{*,r}(y^*)\,(1-\alpha y^*)^{1+1/\alpha} \\ & + \frac{2}{(1+\alpha)(1+2\alpha)}\,(\lambda_*(y^*))^2\,(1-\alpha y^*)^{2+1/\alpha} - 1 \end{aligned}$$

oraz y^* *jest najmniejszym dodatnim rozwiązaniem równania* $L_{W_\alpha}(y^*) = 0$.

Intuicyjnie wydaje się dość oczywiste, że zastosowanie metody projekcji w połączeniu jedynie z własnością VDP do wyznaczenia optymalnych oszacowań dla (3.1) jest możliwe tylko w przypadku, gdy $W = W_\alpha$. Jednakże formalny dowód tego stwierdzenia jest raczej niemożliwy, gdyż wymagałby m.in. udowodnienia, że jeśli c we wzorze (3.12) nie jest stałą, to wyznaczenie zmian znaku drugiej pochodnej $\hat{f}''_{*,r}$ jest niemożliwe. Z drugiej strony, powyższe stwierdzenie nie wyklucza możliwości zastosowania pewnych nowych metod do rozszerzenia powyższych wyników na przypadek, gdy $W \neq W_\alpha$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Oszacowania dla różnic uogólnionych statystyk porządkowych

W tym rozdziale omówimy wynik pracy [A5]. Będziemy rozważać różnice uogólnionych statystyk porządkowych, oznaczane przez

$$D_{r,s} = X_*^{(s)} - X_*^{(r)}, \quad 1 \leqslant r < s.$$

Dokładniej mówiąc, wyznaczymy górne optymalne oszacowania dla wartości oczekiwanych $ED_{r,s}$, wyrażone w różnych jednostkach skali. W kontekście teorii niezawodności, różnica $D_{r,s}$ opisuje czas pomiędzy r-tym i s-tym uszkodzeniem w systemie. W kontekście modeli wartości rekordowych, różnice opisują przyrosty wartości rekordów.

Dla dowolnej dystrybuanty F oznaczmy

$$\sigma_p = \left(\int_0^1 \left|F^{-1}(x) - \mu\right|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \tag{4.1}$$

$$\sigma_\infty = \sup_{0 \leqslant x < 1} \left|F^{-1}(x) - \mu\right|, \tag{4.2}$$

gdzie μ oznacza średnią rozkładu F daną wzorem $\mu = \int_0^1 F^{-1}(x)\,dx$. Ponadto, dla dowolnego rozkładu czasu życia F (tzn. dystrybuanty F o nośniku na dodatniej półosi $[0,\infty)$) oznaczmy

$$\mu_p = \left(\int_0^1 \left(F^{-1}(x)\right)^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \tag{4.3}$$

$$\mu_\infty = F^{-1}(1^-). \tag{4.4}$$

Zatem, σ_p^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, jest absolutnym momentem centralnym rzędu p rozkładu F, a μ_p^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, jest zwykłym momentem rzędu p rozkładu F na półosi $[0,\infty)$. Oczywiście w tym przypadku mamy $\mu_1 = \mu$.

Przypomnijmy, że $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2([0,1])$ oznacza przestrzeń Hilberta funkcji $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ całkowalnych z kwadratem na przedziale $[0,1]$, z iloczynem skalarnym (f,g) oraz normą $\|f\|_2$.

Wtedy zbiory

$$\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}^2 : g \text{ jest funkcją niemalejącą}\}, \tag{4.5}$$
$$\mathcal{C}^+ = \{g \in \mathcal{C} : g(0) = 0\}$$

są domkniętymi stożkami wypukłymi w przestrzeni $\mathcal{L}^2$. W celu wyznaczenia optymalnych oszacowań dla $ED_{r,s}$ należy wyznaczyć projekcję funkcji

$$h_{r,s}(x) = f_{*,s}(x) - f_{*,r}(x), \quad x \in (0,1),$$

czyli różnicy pomiędzy odpowiednimi gęstościami uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładu jednostajnego, na stożki $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{C}^+$.

Najpierw konieczne jest zbadanie monotoniczności funkcji $h_{r,s}$. Zauważmy, że na mocy własności VDP, każda z funkcji $h_{r,s}$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe $\theta = \theta(r, s, \boldsymbol{\gamma})$ w przedziale $(0, 1)$. Stosując wzór (2.3) możemy zapisać pochodną $h'_{r,s}$ jako kombinację liniową funkcji $f_{*,1}, \ldots, f_{*,s}$, a następnie badać zmiany jej znaku stosując Twierdzenia 2.1, 2.2 oraz 2.3. W Twierdzeniu 2.1 pracy [A5] opisano zmiany monotoniczności funkcji $h_{r,s}$, które w większości przypadków są malejące-rosnące-malejące.

4.1. **Ogólne rozkłady.** W tym podrozdziale zajmiemy się wyznaczeniem górnych oszacowań dla różnic $D_{r,s}$, optymalnych w klasie rozkładów ze skończonym momentem absolutnym rzędu p.

Niech $Ph_{r,s}$ oznacza rzut funkcji $h_{r,s}$ na stożek $\mathcal{C}$. Dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ mamy

$$\frac{ED_{r,s}}{\sigma_p} \leqslant B^{(p)}_{*,r,s} := \|Ph_{r,s} - c^*\|_q, \tag{4.6}$$

dla odpowiednio wybranej stałej $c^* \in \mathbb{R}$, przy czym $1/p + 1/q = 1$. Oszacowanie to jest osiągnięte dla rozkładu F spełniającego warunek

$$\frac{F^{-1}(x) - \mu}{\sigma_p} = \left(\frac{Ph_{r,s}(x) - c^*}{\|Ph_{r,s} - c^*\|_q}\right)^{q/p} \operatorname{sgn}\left(Ph_{r,s}(x) - c^*\right). \tag{4.7}$$

Na mocy Twierdzenia 1 z pracy Moriguti [40] (zob. także [52, Przykład 3]) rzutem Ph dowolnej funkcji $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ na stożek $\mathcal{C}$, jest pochodna prawostronna największej wypukłej minoranty $\bar{H}$ funkcji pierwotnej H dla funkcji h. Dla $1 \leqslant r < s$ niech

$$H_{r,s}(x) = \int_0^x h_{r,s}(u)\, du, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

oznacza funkcję pierwotną funkcji $h_{r,s}$. Skoro znamy już własności monotoniczności tej ostatniej funkcji, to potrafimy również opisać przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $H_{r,s}$. W ten sposób wyznaczamy postać projekcji $Ph_{r,s}$, która jest opisana szczegółowo w Lemacie 3.1 z pracy [A5].

Następnie, znając już projekcję $\bar{h}_{r,s} = Ph_{r,s}$, z równania (4.6) możemy wyznaczyć wartości oszacowań $B^{(p)}_{*,r,s}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Są one wyrażone w terminach pomocniczych liczb $\alpha^* \in (0, \theta)$ oraz $\beta^* \in (\theta, 1)$, będących jedynymi rozwiązaniami równań odpowiednio

$$H_{r,s}(\alpha) = \alpha h_{r,s}(\alpha),$$
$$H_{r,s}(\beta) = (\beta - 1) h_{r,s}(\beta).$$

Dla $1 < p < \infty$ głównym wynikiem pracy [A5] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.1 ([A5], Thm. 3.1)**.** *Załóżmy, że F jest dystrybuantą taką, że $F^{-1} \in \mathcal{L}^p$ dla pewnego $p \in (1, \infty)$. Dla $1 \leqslant r < s$ mamy*

$$B^{(p)}_{*,r,s} = \|\bar{h}_{r,s} - h_{r,s}(x^*)\|_q$$

gdzie $x^* \in (\alpha^*, \beta^*)$ *jest jedynym rozwiązaniem równania*

$$\alpha^* \left(h_{r,s}(x) - h_{r,s}(\alpha^*)\right)^{q-1} + \int_{\alpha^*}^{x} \left(h_{r,s}(x) - h_{r,s}(u)\right)^{q-1} du$$
$$= \int_{x}^{\beta^*} \left(h_{r,s}(u) - h_{r,s}(x)\right)^{q-1} du + (1-\beta^*) \left(h_{r,s}(\beta^*) - h_{r,s}(x)\right)^{q-1}.$$

względem x.

Szczegółowa postać rozkładu F, dla którego powyższe oszacowanie jest osiągnięte może być wyznaczona z równania (4.7), i została ona opisana w Twierdzeniu 3.1 w pracy [A5].

Oszacowania dla $ED_{r,s}$ wyrażone w jednostkach skali σ_1 oraz σ_∞ zostały przedstawione w Twierdzeniach 3.2 i 3.3 w pracy [A5]. Mianowicie, w przypadku gdy $p = 1$, jeżeli $2 \leqslant r < s$ oraz $\gamma_{1:s} > 1$, to

$$B_{*,r,s}^{(1)} = \frac{1}{2}\Big(h_{r,s}(\beta^*) - h_{r,s}(\alpha^*)\Big),$$

a równość jest osiągnięta dla pewnego rozkładu trzypunktowego. Dla $p = \infty$

$$B_{*,r,s}^{(\infty)} = \begin{cases} -h_{r,s}(\alpha^*), & \text{jeżeli } \alpha^* \geqslant \frac{1}{2}, \\ h_{r,s}(\beta^*), & \text{jeżeli } \beta^* \leqslant \frac{1}{2}, \\ -2H_{r,s}\left(\frac{1}{2}\right), & \text{jeżeli } \alpha^* < \frac{1}{2} < \beta^*. \end{cases}$$

Oszacowania te są osiągane dla pewnych rozkładów dwupunktowych.

Uwaga 3. Podstawiając $\gamma_j = n - j + 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, otrzymujemy wyniki pracy [18] dotyczące różnic statystyk porządkowych. Natomiast kładąc $\gamma_j = k$, $1 \leqslant j \leqslant n$, otrzymujemy rezultaty pracy [19] dla różnic k-tych wartości rekordowych.

4.2. **Rozkłady czasu życia.** W tym podrozdziale przedstawimy optymalne oszacowania dla wartości oczekiwanych różnic uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładów skupionych na dodatniej półosi $[0, \infty)$. W przeciwieństwie do wyników poprzedniego podrozdziału, oszacowania w tym podrozdziale wyrażone są w jednostkach μ_p określonych równościami (4.3) i (4.4).

Niech $P^+h_{r,s}$ oznacza projekcję funkcji $h_{r,s}$ na stożek $\mathcal{C}^+$. Dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ mamy

$$\frac{ED_{r,s}}{\mu_p} \leqslant C_{*,r,s}^{(p)} := \|P^+h_{r,s}\|_q, \tag{4.8}$$

gdzie $1/p + 1/q = 1$. Równość zachodzi dla rozkładu F na $[0, \infty)$ takiego, że

$$\frac{F^{-1}(x)}{\mu_p} = \left(\frac{P^+h_{r,s}(x)}{\|P^+h_{r,s}\|_q}\right)^{q/p}.$$

Najpierw wyznaczymy projekcję $P^+h_{r,s}$ funkcji $h_{r,s}$ na stożek $\mathcal{C}^+$. Na mocy Lematu 4.1 w pracy [A5], $P^+h_{r,s}$ pokrywa się z rzutem funkcji $h_{r,s}^+ = \max(h_{r,s}, 0)$ na stożek $\mathcal{C}$. Stosując ten wynik oraz nierówność (4.8), dowodzimy Twierdzeń 4.1, 4.2 i 4.3 z pracy [A5], które dotyczą odpowiednio przypadków $1 < p < \infty$, $p = 1$ oraz $p = \infty$.

Twierdzenie 4.2 ([A5])**.** *Dla* $1 < p < \infty$

$$C_{*,r,s}^{(p)} = \left(\int_{\theta}^{\beta^*} (h_{r,s}(x))^q \, dx + (1-\beta^*)\Big(h_{r,s}(\beta^*)\Big)^q\right)^{1/q},$$

(przy czym $\beta^* = 1$ *jeśli* $\gamma_{1:s} \leqslant 1$*). Ponadto, dla* $p = 1$ *mamy*

$$C_{*,r,s}^{(1)} = h_{r,s}(\beta^*),$$

a dla $p = \infty$ *mamy*

$$C_{*,r,s}^{(\infty)} = -H_{r,s}(\theta).$$

Uwaga 4. Podstawiając $p = 1$ oraz $\gamma_j = n - j + 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, dostajemy inny dowód Twierdzenia 3.2 z pracy [44], gdzie wyznaczone zostały oszacowania różnic statystyk porządkowych dla rozkładów czasu życia o skończonej średniej.

5. Oszacowania dla spacji uogólnionych statystyk porządkowych z rozkładów klas DD i DFR

W tym rozdziale omówimy wyniki prac [A6] oraz [A7] dotyczące optymalnych oszacowań spacji, czyli różnic dwu kolejnych uogólnionych statystyk porządkowych

$$D_*^{(r)} = X_*^{(r+1)} - X_*^{(r)}, \quad r \geqslant 1.$$

W kontekście modeli teorii niezawodności spacje opisują czas do kolejnej awarii w systemie, jeśli wiadomo, że właśnie nastąpiła jakaś awaria. W kontekście modeli wartości rekordowych spacje oznaczają przyrosty pomiędzy kolejnymi rekordami. Na przykład znając poziom rzeki powodujący ostatnią powódź, możemy szacować jaki będzie najbliższy poziom rzeki, który spowodowałby jeszcze większa powódź. Optymalne oszacowania dla $ED_*^{(r)}$ dla rozkładów ze skończoną wariancją są opisane w Twierdzeniu 4.1 po podstawieniu $p = 2$ oraz $s = r + 1$. W tym rozdziale podamy oszacowania optymalne w klasach rozkładów DD i DFR.

W tym celu dla ustalonej dystrybuanty $W : [0, d) \to \mathbb{R}$ rozważamy ponownie rodzinę rozkładów $\mathcal{F}_W$ określoną w równaniu (3.3) oraz stożek wypukły $\mathcal{C}_W$ określony równaniem (3.5). Przypomnijmy, że P_W oznacza operator rzutowania na stożek $\mathcal{C}_W$. Kładąc $h_r(x) = f_{*,r+1}(x) - f_{*,r}(x)$, oraz $\hat{h}_r(x) = h_r W(x)$, na mocy metody projekcji otrzymujemy nierówność

$$\frac{ED_*^{(r)}}{\sigma} \leqslant C_{r,W}(\boldsymbol{\gamma}) := \left\| P_W \hat{h}_r \right\|_W,$$

która jest optymalna w klasie $\mathcal{F}_W$. Jest ona osiągnięta dla rozkładu $F \in \mathcal{F}_W$ takiego, że

$$\frac{F^{-1}W(x) - \mu}{\sigma} = \frac{P_W \hat{h}_r(x)}{C_{r,W}(\boldsymbol{\gamma})}. \tag{5.1}$$

Przypomnimy teraz krótko ogólne wyniki z pracy [22], dotyczące wyznaczenia projekcji na stożek $\mathcal{C}_W$ dla funkcji h spełniających warunki (B) opisane poniżej. Funkcje $\hat{h}_r$, $r \geqslant 1$, spełniają warunki (B) dla $W = U$ lub $W = V$, co wykażemy nieco później.

Niech W będzie dowolna dystrybuantą o nośniku na przedziale $[0, d)$, gdzie $d \leqslant +\infty$, o gęstości $w = W'$. Zakładamy również, że spełniony jest warunek (3.4) dla $a = 0$. Rozważamy funkcje $h : [0, d) \mapsto \mathbb{R}$ spełniające następujące warunki:

(B) funkcja h jest ograniczona, dwukrotnie różniczkowalna, $h(0) = 0$,

$$\lim_{x \to d^-} h(x) \geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad \int_0^d h(x)w(x)\,dx = 0;$$

ponadto istnieją a, b oraz c takie, że $0 < a < b < c \leqslant d$ oraz funkcja h jest malejąca na przedziale $(0, a)$, rosnąca i wypukła na (a, b), rosnąca i wklęsła na (b, c), oraz malejąca na (c, d).

Oczywiście, każda taka funkcja h ma dokładnie jedno miejsce zerowe $\theta \in (a, c)$. Dla ustalonej funkcji h spełniającej warunki (B) rozważamy ponownie pomocnicze funkcje λ_*, K_W oraz L_W określone wzorami (3.8), (3.9) oraz (3.10). Zachowanie tych funkcji wyznacza projekcję $P_W h$ w następujący sposób.

Stwierdzenie 5.1 ([22])**.** *Załóżmy, że* $\alpha^* \in (a, \theta)$ *oznacza jedyne rozwiązanie równania*

$$\int_0^\alpha h(x)w(x)\,dx = W(\alpha)h(\alpha).$$

Jeżeli zbiór $\mathcal{K} = \{\beta \in (\alpha^*, b] : K_W(\beta) \geqslant 0$ *oraz* $L_W(\beta) = 0\}$ *jest niepusty oraz* $\beta^* = \sup \mathcal{K}$ *i* $\lambda^* = \lambda(\beta^*)$*, to*

$$P_W h(x) = \begin{cases} h(\alpha^*), & 0 \leqslant x \leqslant \alpha^*, \\ h(x), & \alpha^* < x \leqslant \beta^*, \\ h(\beta^*) + \lambda^*(x - \beta^*), & \beta^* < x \leqslant d. \end{cases}$$

W przeciwnym razie, projekcja $P_W h$ *jest jednoznacznie wyznaczoną funkcją ciągłą, która jest najpierw stała, a następnie liniowa i ściśle rosnąca.*

5.1. **Rozkłady klasy DD.** W tym podrozdziale rozważymy oszacowania na $ED_*^{(r)}$ optymalne w klasie rozkładów DD. Musimy więc wyznaczyć projekcję $P_U h_{r,s}$ przy użyciu Stwierdzenia 5.1. Równania (2.3) oraz (2.4) implikują, że funkcje h_r, h_r' oraz h_r'' mogą być zapisane jako kombinacje liniowe gęstości $f_{*,1}, \ldots, f_{*,r}, f_{*,r+1}$, a więc ich zmiany znaku mogą być badane przy zastosowaniu własności VDP (Twierdzenia 2.1, 2.2 oraz 2.3). Lemat 4.2 z pracy [A6] pokazuje, że funkcje h_r spełniają warunki (B) jeśli $r \geqslant 2$ oraz albo $\gamma_{1:r+1} > 1$, albo $\gamma_{1:r+1} = 1$ i $\gamma_{2:r+1} > 2$. Oszacowania na $ED_*^{(r)}$ w pozostałych przypadkach są omówione w sekcji 5 pracy [A6].

Następnie, szczegółowe obliczenia pokazują, że funkcje λ_*, K_U i L_U również mogą być przedstawione jako odpowiednie kombinacje liniowe funkcji $f_{*,1}, \ldots, f_{*,r+1}$, a więc postępując podobnie jak w podrozdziale 3.1, przy czym tym razem stosując Stwierdzenie 5.1 zamiast Stwierdzenia 3.1, dowodzimy główny wynik pracy [A6].

Twierdzenie 5.2 ([A6], Thm. 5.1)**.** *Ustalmy* $r \geqslant 2$ *oraz parametry* $\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1} > 0$ *takie, że* $\gamma_{1:r+1} > 1$ *lub* $\gamma_{1:r+1} = 1$ *i* $\gamma_{2:r+1} > 2$*. Niech* $D_*^{(r)}$ *oznacza spację uogólnionych statystyk porządkowych* $X_*^{(r+1)}$ *i* $X_*^{(r)}$ *z parametrami* $\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1}$ *z rozkładu* $F \in \mathrm{DD}$ *o średniej* $\mu \in \mathbb{R}$ *i skończonej wariancji* σ^2*.*

Niech α^* *będzie jedynym rozwiązaniem równania*

$$f_{*,r+1}(\alpha) = \frac{\alpha\gamma_{r+1}}{\alpha\gamma_{r+1} + 1 - \alpha} f_{*,r}(\alpha)$$

w przedziale (a, θ)*. Niech* v^* *oznacza jedyne miejsce zerowe funkcji* K_U *w przedziale* $(0, b)$ *oraz niech* β^* *będzie jedynym miejscem zerowym funkcji* L_U *w przedziale* (α^*, v^*)*.*

Jeżeli spełniony jest warunek

$$K_U(\alpha^*) > 0 \quad \textit{oraz} \quad L_U(\alpha^*) < 0 < L_U(v^*), \tag{5.2}$$

to

$$\frac{ED_*^{(r)}}{\sigma} \leqslant B := B_U(\boldsymbol{\gamma}) \tag{5.3}$$

gdzie

$$B^2 = \alpha^* \left(h_r(\alpha^*)\right)^2 + \int_{\alpha^*}^{\beta^*} \left(h_r(x)\right)^2 \, dx + (1 - \beta^*) \left(h_r(\beta^*)\right)^2$$
$$+ \lambda(1 - \beta^*)^2 h_r(\beta^*) + \frac{\lambda^2}{3}(1 - \beta^*)^3,$$

oraz $\lambda = \lambda_*(\beta^*)$*.*

Jeżeli natomiast warunek (5.2) *nie zachodzi, to*

$$\frac{ED_*^{(r)}}{\sigma} \leqslant \frac{f_{*,r+1}(\beta)}{\gamma_r \beta} \sqrt{\frac{1 + 2\beta - 3\beta^2}{3}} \tag{5.4}$$

gdzie $\beta \in [0, \alpha^*)$ *jest najmniejszym rozwiązaniem równania*

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\pi_{j,r+1}}{\gamma_j} f_{*,j}(\beta) + \left(\frac{1}{\gamma_{r+1} + 1} - \frac{3\beta + 1}{6\beta}\right) f_{*,r+1}(\beta) = 0.$$

Rozkłady, dla których oszacowania (5.3) i (5.4) są osiągnięte są ściśle wyznaczone przez równanie (5.1).

Uwaga 5. Podstawiając $\gamma_j = n - j + 1$, dla $1 \leqslant j \leqslant r + 1$, z Twierdzenia 5.2 otrzymujemy wyniki pracy [22] dotyczące spacji statystyk porządkowych z rozkładów klasy DD. Natomiast kładąc $\gamma_j = k$, $1 \leqslant j \leqslant r + 1$, otrzymamy wyniki pracy [20] dotyczące spacji k-tych wartości rekordowych.

5.2. **Rozkłady klasy DFR.** W tym podrozdziale wyznaczymy oszacowania dla $ED_*^{(r)}$, optymalne w klasie rozkładów DFR. Musimy więc wyznaczyć projekcję $P_V\hat{h}_r$ funkcji $\hat{h}_r = h_rV$ na stożek $\mathcal{C}_V$. Szczegółowe obliczenia i kolejne zastosowanie Wniosku 2.5 dowodzą Lemat 4.2 z pracy [A7], który mówi, że funkcja $\hat{h}_r$ spełnia warunki (B) jeżeli $r \geqslant 2$ oraz albo $\gamma_{1:r+1} > 1$, albo $\gamma_{1:r+1} = 1 < \gamma_{2:r+1}$. Oszacowania w pozostałych przypadkach zostały wyznaczone w sekcji 5 pracy [A7].

Postępując jak w poprzednim podrozdziale dowodzimy następujący rezultat.

Twierdzenie 5.3 ([A7], Thm. 5.1)**.** *Ustalmy $r \geqslant 2$ oraz parametry $\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1} > 0$ takie, że $\gamma_{1:r+1} > 1$ lub $\gamma_{1:r+1} = 1 < \gamma_{2:r+1}$. Niech $D_*^{(r)}$ oznacza spację uogólnionych statystyk porządkowych $X_*^{(r+1)}$ oraz $X_*^{(r)}$ z parametrami $\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \gamma_{r+1}$ z rozkładu $F \in$* DFR *o średniej $\mu \in \mathbb{R}$ i skończonej wariancji σ^2.*

Niech α^* będzie jedynym rozwiązania równania

$$\hat{f}_{*,r+1}(\alpha) = \frac{\gamma_{r+1}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha})}{\gamma_{r+1} + (1 - \gamma_{r+1})\,\mathrm{e}^{-\alpha}}\,\hat{f}_{*,r}(\alpha)$$

w przedziale (a, θ). Niech v^* oznacza jedyne miejsce zerowe funkcji K_V w przedziale $(0, b)$, a β^* — jedyne miejsce zerowe funkcji L_V w przedziale $(0, v^*)$.

Jeżeli zachodzi warunek

$$K_V(\alpha^*) > 0 \quad \textit{oraz} \quad L_V(\alpha^*) < 0 < L_V(v^*), \tag{5.5}$$

to

$$\frac{ED_*^{(r)}}{\sigma} \leqslant C := C_r(\boldsymbol{\gamma})$$

gdzie

$$\begin{aligned} C^2 = (1 - \mathrm{e}^{-\alpha^*})\left(\hat{h}_r(\alpha^*)\right)^2 + \int_{\alpha^*}^{\beta^*} \left(\hat{h}_r(x)\right)^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ + \mathrm{e}^{-\beta^*}\left\{\left(\hat{h}_r(\beta^*)\right)^2 + 2\lambda\hat{h}_r(\beta^*) + 2\lambda^2\right\}, \end{aligned}$$

oraz $\lambda = \lambda_*(\beta^*)$.

Jeżeli natomiast warunek (5.5) *nie jest spełniony, to*

$$\frac{ED_*^{(r)}}{\sigma} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-\beta}\hat{f}_{*,r+1}(\beta)}{\gamma_{r+1}(1 - \mathrm{e}^{-\beta})}\sqrt{2\mathrm{e}^{\beta} - 1}$$

gdzie $\beta \in [0, \alpha^*)$ jest najmniejszym rozwiązaniem równania

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\gamma_j}\hat{f}_{*,j}(\beta) + \frac{1 - 2\gamma_{r+1} - (1 - \gamma_{r+1})\,\mathrm{e}^{-\beta}}{\gamma_{r+1}(1 - \mathrm{e}^{-\beta})}\hat{f}_{*,r+1}(\beta) = 0.$$

Uwaga 6. Twierdzenie powyższe jest uogólnieniem zarówno Twierdzenia 3 z pracy [22], dotyczącego statystyk porządkowych, jak również Twierdzenia 8 z pracy [20], dotyczącego przypadku k-tych wartości rekordowych.

Uwaga 7. Dla spacji uogólnionych statystyk porządkowych można udowodnić wyniki analogiczne do rezultatów pracy [A4] omówionych w podrozdziale 3.3. To znaczy, optymalne oszacowania dla $ED_*^{(r)}$ mogą być wyznaczone dla rozkładów $F \in \mathrm{DGFR}(\alpha)$ dla pewnego $\alpha > -\frac{1}{2}$. Można wtedy pokazać, że funkcja $\hat{h}_r = h_r W_\alpha$ spełnia warunki (B), a wartości oszacowań wyznacza się taka samą metodą jak w przypadku rozkładów klas DD i DFR.

6. Optymalne szacowania obciążenia quasi-rozstępów z próby

Praca [A8] (jak również prace [C7, C8, C9, C10], zob. str. 27) jest poświęcona następującemu ogólnemu zagadnieniu. Rozważmy uogólnione statystyki porządkowe $X_*^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, z parametrami $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, z dowolnego rozkładu F o średniej μ i wariancji σ^2. Dla dowolnego skończonego ciągu $c_1, \ldots, c_n$ liczb nieujemnych takiego, że $\sum_i c_i = 1$ rozważamy tzw. L–statystykę postaci $\sum_i c_i X_*^{(i)}$ jako estymator nieznanej wartości μ. Naszym celem jest badanie obciążenia

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_*^{(i)} - \mu\right)$$

tej estymacji. Dokładnie mówiąc, przy użyciu metody projekcji wyznaczymy optymalne górne i dolne oszacowania dla tego obciążenia, wyrażone w rożnych jednostkach skali σ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, zdefiniowanych w równaniach (4.1) i (4.2).

W pracy [A8] rozważamy ten problem w szczególnym przypadku statystyk porządkowych $X_{i:n}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, oraz dla wybranej L–statystyki nazywanej *quasi-rozstępem z próby*

$$M_{r,s:n} = \frac{1}{2}\left(X_{r:n} + X_{s:n}\right), \quad 1 \leqslant r < s \leqslant n.$$

Statystyki takie są omawiane m.in. w monografiach [1] oraz [23]. Jednym z najważniejszych przykładów quasi-rozstępu jest mediana próbkowa dla prób parzystego rozmiaru. Głównym powodem rozważania L-statystyk jest to, że średnia z próby $\bar{X}$, chociaż jest nieobciążonym estymatorem średniej μ, to jest bardzo wrażliwa na obserwacje odstające (ang. outliers). Zatem ważne jest zbadanie wpływu usunięcia takich obserwacji z próby na obciążenie różnych L-statystyk. Z drugiej strony, quasi-rozstępy są przykładami "szybkich" estymatorów średniej, gdyż wymagają znajomości wartości jedynie dwu statystyk porządkowych.

W przypadku zwykłych statystyk porządkowych, ogólna procedura wyznaczania optymalnych oszacowań na wartości oczekiwane L-statystyk postaci $\sum_i c_i X_{i:n}$ została podana przez Rychlika [51]. Mianowicie, dla danego ciągu współczynników $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, określamy

$$f_{\mathbf{c}:n}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_{i:n}(x), \quad x \in (0,1),$$

oraz niech $\bar{f}_{\mathbf{c}:n}$ oznacza projekcję funkcji $f_{\mathbf{c}:n}$ na stożek $\mathcal{C}$ funkcji niemalejących na przedziale $[0,1]$ określony równością (4.5). Twierdzenie 7 pracy [51] stwierdza, że ograniczenie

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_{i:n} - \mu\right) \leqslant \sigma_p \left\|\bar{f}_{\mathbf{c}:n} - c_q\right\|_q, \tag{6.1}$$

dla $q = p/(p-1)$ oraz odpowiednio wybranej stałej c_q, jest optymalne w klasie wszystkich rozkładów ze skończonym momentem rzędu p.

Oczywiście projekcja $\bar{f}_{\mathbf{c}:n}$, używana we wzorze (6.1), jest wyznaczona przy użyciu metody największych wypukłych minorant, opisanej w podrozdziale 4.1. W konkretnych przypadkach L-statystyk podejście to jest często mało efektywne, gdyż wymaga dokładnej znajomości przebiegu zmienności rzutowanej funkcji $f_{\mathbf{c}:n}$. Przebieg ten z kolei wyznacza się przy użyciu własności VDP dla wielomianów Bernsteina podanej w Twierdzeniu 1.1.

Niestety, poza przypadkiem gdy funkcja $f_{\mathbf{c}:n}$ jest jednomodalna (a więc ma tylko jedno maksimum lokalne), podejście to daje zbyt mało informacji, aby wyznaczyć odpowiadającą największą wypukłą minorantę. Dlatego w ogólności wyznaczenie projekcji $\bar{f}_{\mathbf{c}:n}$ jest często wymagającym zadaniem. Jednakże, w przypadku quasi-rozstępów rzutowane funkcje φ spełniają następujące warunki:

(C) $\varphi : [0,1] \to [0,\infty)$ jest funkcją ciągłą i taką, że $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ oraz albo istnieje $\theta_1 \in (0,1)$ takie, że φ jest funkcją rosnącą na przedziale $(0,\theta_1)$ i malejącą na $(\theta_1, 1)$, albo istnieją $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 1$ takie, że funkcja φ rośnie na przedziałach $(0,\theta_1)$ i (θ_2,θ_3), a maleje na (θ_1,θ_2) i $(\theta_3, 1)$.

Krótko mówiąc, rzutowane funkcje φ są albo jednomodalne, albo dwumodalne i często nie można stwierdzić analitycznie, z którym przypadkiem mamy do czynienia. Pomimo to dla funkcji spełniających warunki (C) zawsze można jednoznacznie wyznaczyć efektywnie odpowiadające projekcje na stożek $\mathcal{C}$.

Oryginalnym pomysłem w pracy [A8] było określenie dwu pomocniczych funkcji

$$g(x) = \Phi(x) - (1-x)\varphi(x) - 1, \tag{6.2}$$

$$h(x) = \frac{1-\Phi(x)}{1-x}, \tag{6.3}$$

gdzie

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u)du,$$

dla $0 \leqslant x \leqslant 1$, a następnie zbadanie ich wzajemnych relacji. Dla funkcji φ spełniających warunki (C), na mocy Lematu 3.1 z pracy [A8], odpowiadająca funkcja g ma albo jedno, albo trzy miejsca zerowe w przedziale $(0,1)$, a funkcje g i h wyznaczają szukaną projekcję $\bar{\varphi}$ na stożek $\mathcal{C}$ w następujący sposób.

Twierdzenie 6.1 ([A8])**.** *Załóżmy, że funkcja φ spełnia warunki (C). Jeżeli zachodzi jeden z warunków*

- *g ma dokładnie jedno miejsce zerowe α_1 leżące w przedziale $(0,\theta_1)$,*
- *g ma trzy miejsca zerowe $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ w przedziale $(0,1)$ oraz $h(\alpha_1) \geqslant h(\alpha_3)$,*

to projekcja $\bar{\varphi}$ jest postaci

$$\bar{\varphi}(u) = \begin{cases} \varphi(u), & \text{dla } 0 \leqslant u \leqslant \alpha_1, \\ \varphi(\alpha_1), & \text{dla } \alpha_1 \leqslant u \leqslant 1. \end{cases} \tag{6.4}$$

W przeciwnym razie, a więc jeżeli zachodzi jeden z warunków

- *g ma dokładnie jedno miejsce zerowe α_3 leżące w przedziale $(\theta_1, 1)$,*
- *g ma trzy miejsca zerowe $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ w przedziale $(0,1)$ oraz $h(\alpha_1) < h(\alpha_3)$,*

projekcja $\bar{\varphi}$ jest postaci

$$\bar{\varphi}(u) = \begin{cases} \varphi(u), & \text{dla } 0 \leqslant u \leqslant \beta \text{ lub } \gamma \leqslant u \leqslant \alpha_3, \\ \varphi(\beta), & \text{dla } \beta \leqslant u \leqslant \gamma, \\ \varphi(\alpha_3), & \text{dla } \alpha_3 \leqslant u \leqslant 1, \end{cases} \tag{6.5}$$

gdzie para liczb (β,γ) jest jedynym rozwiązaniem układu równań

$$\frac{\Phi(\gamma)-\Phi(\beta)}{\gamma-\beta} = \varphi(\beta) = \varphi(\gamma).$$

Zauważmy, że jeśli funkcja φ jest jednomodalna, to jej projekcja jest postaci (6.4). Jednakże możliwy jest także przypadek, gdy φ jest dwumodalna, a jej projekcja jest również postaci (6.4).

Skoro projekcja funkcji $f_{\mathbf{c}:n}$ została wyznaczona, to dzięki równości (6.1) obliczenie wartości górnych oszacowań, oraz określenie rozkładów, dla których zachodzi równość, jest bardzo łatwe. Ściśle mówiąc, dla ustalonej wartości $1 \leqslant p \leqslant \infty$, oznaczmy

$$B_{r,s:n}^{(p)} = \sup \frac{EM_{r,s:n} - \mu}{\sigma_p},$$

gdzie kres górny wzięty jest po klasie wszystkich rozkładów F ze skończonym p-tym momentem σ_p. Twierdzenia 5.1, 5.2 i 5.3 z pracy [A8] zawierają dokładne wartości oszacowań odpowiednio $B_{r,s:n}^{(2)}$, $B_{r,s:n}^{(1)}$ oraz $B_{r,s:n}^{(\infty)}$. Ponadto, wartości dolnych oszacowań mogą być łatwo wywnioskowane ze znajomości wartości odpowiednich oszacowań górnych. Zamiast przytaczania ścisłych sformułowań tych wyników, przedstawimy tylko Tabelę 1, która zawiera numerycznie wyznaczone przykładowe wartości górnych oszacowań $B_{r,s:10}^{(2)}$ dla prób rozmiaru $n = 10$. Analogiczne tabele mogą być wyznaczone dla innych wartości n lub p.

TABELA 1. Optymalne oszacowania górne $B_{r,s:10}^{(2)}$, $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant 10$, w jednostkach skali odchylenia standardowego σ_2.

	$s=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r=1$	0	0	0	0	0	0	0	0.0413	0.3026	0.8246
2		0.0626	0.0890	0.0914	0.0915	0.0915	0.0915	0.0971	0.3101	0.8263
3			0.1848	0.2219	0.2315	0.2331	0.2333	0.2333	0.3533	0.8370
4				0.3074	0.3502	0.3668	0.3715	0.3723	0.4280	0.8580
5					0.4336	0.4830	0.5072	0.5166	0.3859	0.8916
6						0.5717	0.6312	0.6660	0.6852	0.9461
7							0.7340	0.8115	0.8664	1.0430
8								0.9445	1.0610	1.2220
9									1.2680	1.5260
10										2.0650

Szczegółowa analiza wartości podanych w tabeli pokazuje, że najmniejsze obustronne obciążenie otrzymujemy gdy $r \approx n/4$ oraz $s \approx 3n/4$. Jest to zgodne z intuicją mówiącą, że gdy wartości r i s są zbyt bliskie sobie, to quasi-rozstęp $M_{r,s:n}$ ma tendencję do podnoszenia wagi wartości centralnych w próbie, a pomija zbyt dużo informacji zawartej w informacjach odstających. Z drugiej strony, jeżeli wartości r i s są zbyt odległe, to $M_{r,s:n}$ koncentruje się zbytnio na wartościach odstających, a nie centralnych. Niestety powyższe stwierdzenie nie może być ściśle sformułowane, ani tym bardziej dowiedzione z uwagi na bardzo skomplikowaną zależność wartości oszacowań $B_{r,s:n}^{(p)}$ od wartości r, s oraz n.

Wyniki pracy [A8], zwłaszcza powyższe Twierdzenie 6.1, stanowią pierwszy krok przy wyznaczaniu optymalnych oszacowań dla obciążenia różnych L-statystyk dla rozkładów z ograniczonych rodzin, jak np. klas DD lub DFR. Wymaga to rzutowania funkcji dwumodalnych spełniających warunki (C) na stożek funkcji niemalejących *oraz wypukłych*, i będzie to jednym z tematów mojej przyszłej pracy badawczej.

7. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo–badawczych

Moje pozostałe osiągnięcia naukowe stanowi 19 artykułów naukowych.

Prace opublikowane przed uzyskaniem tytułu doktora

[B1] M. Bieniek, D. Szynal, *Limiting distributions of differences and quotients of successive k-th upper and lower record values*, Probab. Math. Statist., 20 (2000), pp. 189–202.

[B2] M. Bieniek, D. Szynal, *Limiting distributions of differences between some generalized order statistics*, Demonstratio Math., 34 (2001), pp. 305–314.

[B3] M. Bieniek, D. Szynal, *Recurrence relations for distribution functions and moments of kth record values*, J. Math. Sci. (N. Y.), 111 (2002), pp. 3511–3519.

[B4] M. Bieniek, D. Szynal, *Characterizations of distributions via linearity of regression of generalized order statistics*, Metrika, 58 (2003), pp. 259–271.

[B5] M. Bieniek, D. Szynal, *Limit distributions of differences and quotients of non-adjacent k-th record values*, Probab. Math. Statist., 23 (2003), pp. 19–38.

[B6] M. Bieniek, D. Szynal, *Characterizations based on k-th upper and lower record values*, Demonstratio Math., 37 (2004), pp. 463–473.

[B7] M. Bieniek, D. Szynal, *On the fractional record values*, Probab. Math. Statist., 24 (2004), pp. 27–46.

[B8] M. Bieniek, D. Szynal, *On recurrence relations for expectations of functions of some ordered variates*, J. Math. Sci. (N. Y.), 131 (2005), pp. 5600–5605.

Prace opublikowane po uzyskaniu tytułu doktora

[C1] M. Bieniek, M. Bieniek, D. Szynal, *Bounds on the bias of approximation of fractional record values*, Probab. Math. Statist., 25 (2005), pp. 197–210.

[C2] M. Bieniek, *On characterizations of distributions by regression of adjacent generalized order statistics*, Metrika, 66 (2007), pp. 233–242.

[C3] M. Bieniek, *A note on characterizations of distributions by regressions of non-adjacent generalized order statistics*, Aust. N. Z. J. Stat., 51 (2009), pp. 89–99.

[C4] M. Bieniek, K. Burdzy, S. Finch, *Non-extinction of a Fleming-Viot particle model*, Probab. Theory Related Fields, 153 (2012), pp. 293–332.

[C5] M. Bieniek, K. Burdzy, S. Pal, *Extinction of Fleming-Viot-type particle systems with strong drift*, Electron. J. Probab., 17 (2012), pp. 1–15.

[C6] M. Bieniek, D. Szynal, *On the bias of estimators based on fractional record values*, J. Math. Sci. (N. Y.), 191 (2013), pp. 518–525.

[C7] M. Bieniek, *Sharp bounds on the bias of trimean*, Statistical Papers, (2014). `doi:10.1007/s00362-014-0641-3`.

[C8] M. Bieniek, *Comparison of the bias of trimmed and Winsorized means*, Comm. Statist. Theory Methods, (2014), praca przyjęta do druku.

[C9] M. Bieniek, *Optimal evaluations for the bias of trimmed means of k-th record values*, Metrika, 78 (2015), pp. 437–460.

[C10] M. Bieniek, *Sharp bounds for the bias of trimmed means of progressively censored order statistics*, Probab. Math. Statist., (2015), praca przyjęta do druku.

[C11] M. Bieniek, K. Burdzy, *The distribution of the spine of a Fleming-Viot type process*, praca przesłana do druku, 2015.

Powyższe artykuły są poświęcone następującym sześciu tematom badawczym:

1. graniczne rozkłady różnic uogólnionych statystyk porządkowych ([B1, B2, B5]);
2. relacje rekurencyjne na momenty uporządkowanych zmiennych losowych ([B3, B8]);
3. ułamkowe wartości rekordowe i ich własności ([B7, C1, C6]);
4. charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa przez funkcje regresji uogólnionych statystyk porządkowych ([B4, B6, C2, C3]);
5. problem istnienia procesu typu Fleminga-Viota oraz badanie jego własności ([C4, C5, C11]);
6. optymalne oszacowania obciążenia wybranych L–statystyk ([C7, C8]) oraz uciętych średnich uogólnionych statystyk porządkowych ([C9, C10]).

Kolejne podrozdziały zawierają opis wyników uzyskanych w każdym z tych tematów.

7.1. **Rozkłady graniczne różnic uogólnionych statystyk porządkowych.** Rozważmy uogólnione statystyki porządkowe $V_*^{(1)}, \ldots, V_*^{(n)}$ z parametrami $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ze standardowego rozkładu wykładniczego $V(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, $x \geqslant 0$. Znany jest fakt, że jeżeli oznaczymy $R_*^{(1)} = \gamma_1 V_*^{(1)}$ oraz

$$R_*^{(i)} = \gamma_i \left(V_*^{(i)} - V_*^{(i-1)} \right), \quad 1 \leqslant i < n,$$

to zmienne losowe $R_*^{(1)}, \ldots, R_*^{(n)}$ są niezależne oraz mają jednakowy rozkład V (zob. np. [35], Tw. 3.10). Zatem dla ustalonych $1 \leqslant r < s \leqslant n$, zmienna losowa

$$R_{r,s} = \sum_{i=r+1}^{s} R_*^{(i)}$$

ma odpowiedni rozkład gamma. Powstaje więc pytanie o to, jaki jest rozkład zmiennej $R_{r,s}$ dla uogólnionych statystyk porządkowych z dowolnego rozkładu F.

W pracach [B1] oraz [B5] problem ten został rozważony w kontekście k-tych (górnych) wartości rekordowych $Y_n^{(k)}$, $n \geqslant 1$. Problem ten można rozważać również dla tzw. k-tych dolnych wartości rekordowych $Z_n^{(k)}$, $n \geqslant 1$, zdefiniowanych przez Pawlasa i Szynala w pracy [45]. W 1985 roku Gajek [26] udowodnił, że dla dość szerokiej klasy rozkładów F obserwacji, dla każdego ustalonego $n \geqslant 1$ ciąg $k\Big(Y_{r+1}^{(k)} - Y_r^{(k)}\Big)$, $k \geqslant 1$, jest słabo zbieżny gdy $k \to \infty$ do odpowiedniej zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym z parametrem zależnym od wyjściowego rozkładu F. Praca ta była główną motywacją do powstania pracy [B1], w której udowodniono, że ciąg $k\Big(Z_r^{(k)} - Z_{r+1}^{(k)}\Big)$, $k \geqslant 1$, ma również wykładniczy rozkład graniczny. Ponadto, dla każdego ustalonego $k \geqslant 1$ ciągi $\Big\{R_r^{(k)},\ r \geqslant 1\Big\}$ oraz $\Big\{Q_r^{(k)},\ r \geqslant 1\Big\}$, gdzie

$$R_r^{(k)} = r \left(\frac{Y_{r+1}^{(k)}}{Y_r^{(k)}} - 1 \right), \quad Q_r^{(k)} = r \left(\frac{Z_r^{(k)}}{Z_{r+1}^{(k)}} - 1 \right),$$

również słabo zbiegają do odpowiednich rozkładów wykładniczych gdy $r \to \infty$. Parametry rozkładów granicznych również zależą od wyjściowego rozkładu obserwacji.

W pracy [B5] podaliśmy uogólnienia powyższych wyników dla przypadku niekolejnych wartości rekordowych. Zauważmy, że dla k-tych wartości rekordowych mamy $R_{r,s} = k\Big(Y_s^{(k)} - Y_r^{(k)}\Big)$, a w pracy [B5] udowodniliśmy, że dla dowolnie ustalonych $1 \leqslant r < s$ ciągi

$$k \left(Y_s^{(k)} - Y_r^{(k)} \right), \quad k \left(Z_r^{(k)} - Z_s^{(k)} \right) \quad k \geqslant 1,$$

są zbieżne według rozkładu do zmiennych losowych o rozkładach gamma. Ponadto, dla ustalonych $k, r \geqslant 1$, ciągi

$$s \left(\frac{Y_{s+r}^{(k)}}{Y_s^{(k)}} - 1 \right), \quad s \left(\frac{Z_s^{(k)}}{Z_{s+r}^{(k)}} - 1 \right), \quad s \geqslant 1,$$

mają również rozkłady graniczne typu gamma.

W pracy [B2] podane są analogiczne rezultaty dla $R_{r,r+1} = \gamma_{r+1}\Big(X_*^{(r+1)} - X_*^{(r)}\Big)$ w różnych szczególnych modelach uogólnionych statystyk porządkowych. Pokazaliśmy, że jeżeli $\gamma_{r+1} \to \infty$, to ponownie w granicy otrzymujemy rozkład wykładniczy.

7.2. **Relacje rekurencyjne na momenty uporządkowanych zmiennych losowych.** Prace [B3] oraz [B8] są poświęcone problemowi wyznaczania relacji rekurencyjnych na momenty funkcji uporządkowanych danych statystycznych. Relacje te są ważne z różnych powodów; są stosowane do sprawdzania wyników bezpośrednich obliczeń szukanych momentów, do charakteryzowania różnych rozkładów prawdopodobieństwa, a często bezpośrednie obliczenia symboliczne są niemożliwe do przeprowadzenia, i wtedy relacje rekurencyjne są jedynym sposobem wyznaczenia rozważanych momentów. Przegląd znanych wyników dotyczących tego problemu można znaleźć np. w monografiach i artykułach [1], [7], [23] lub [36] dla przypadku statystyk porządkowych, [2] w przypadku wartości rekordowych oraz [4] lub [5] dla statystyk porządkowych progresywnie cenzurowanych.

W przypadku statystyk porządkowych, wartości rekordowych, a nawet uogólnionych wartości rekordowych, problem ten jest relatywnie prosty dzięki znanym wzorom na jednowymiarowe rozkłady brzegowe. Wtedy relacja rekurencyjna na momenty jest zwykle prostą konsekwencją odpowiedniej relacji rekurencyjnej dla brzegowych dystrybuant lub gęstości. Stosując takie właśnie podejście w pracy [B3] podaliśmy pewne ogólne wyniki, jak również liczne przypadki szczególne relacji rekurencyjnych na zwykłe momenty górnych i dolnych uogólnionych statystyk porządkowych przy założeniu $m_1 = \ldots = m_{n-1} = m$. Wyniki te są zilustrowane przykładami dla górnych i dolnych k-tych wartości rekordowych.

W pracy [B8] rozważany był ten sam problem, ale w modelach rekordów Pfeifera, sekwencyjnych statystyk porządkowych oraz k_n-rekordów (które są rozszerzeniem pojęcia rekordów Pfeifera; zob. [34], [35]), opartych na ciągu absolutnie ciągłych rozkładów $\{F_1, F_2, \ldots\}$. Przypomnijmy, że modele te są zawarte w modelu uogólnionych statystyk porządkowych tylko jeżeli $F_j = 1-(1-F)^{\alpha_j}$ dla pewnego ustalonego rozkładu F i danego ciągu liczb dodatnich α_i, $i \geqslant 1$. Istotą problemu jest brak znanych wzorów na rozkłady brzegowe w modelach, które nie są zawarte w modelu uogólnionych statystyk porządkowych. Jednakże w pracy [B8] podana została ogólna metoda otrzymywania relacji rekurencyjnych dla momentów zwykłych i produktowych, wymagająca znajomości jedynie rozkładów łącznych, które są znane nawet poza modelem uogólnionych statystyk porządkowych. Na przykład, dla wartości rekordowych Pfeifera dowodzimy, że dla dowolnej funkcji różniczkowalnej $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ zachodzi relacja

$$Eg\Big(X_{\Delta_r}^{(r)}\Big) = Eg\Big(X_{\Delta_{r-1}}^{(r-1)}\Big) + E\left[\frac{g'\Big(X_{\Delta_r}^{(r)}\Big)}{h_r\Big(X_{\Delta_r}^{(r)}\Big)}\right], \quad r \geqslant 2,$$

gdzie h_r oznacza funkcję hazardową rozkładu F_r, oczywiście przy założeniu, że wszystkie powyższe momenty są skończone.

7.3. **Ułamkowe wartości rekordowe i ich własności.** Model ułamkowych wartości rekordowych został wprowadzony w pracy [B7] przez analogię do modelu ułamkowych statystyk porządkowych zdefiniowanego przez Stiglera [54]. Dokładnie mówiąc, k-te ułamkowe wartości rekordowe $\Big\{W_t^{(k)},\, t \geqslant 0\Big\}$ ze standardowego rozkładu wykładniczego są zdefiniowane jako proces stochastyczny o przyrostach niezależnych, startujący od wartości 0, i którego przyrosty mają odpowiednie rozkłady gamma, tzn.

$$W_t^{(k)} - W_s^{(k)} \sim \Gamma(t-s, k), \quad t > s \geqslant 0,$$

gdzie $\Gamma(\alpha, \beta)$ oznacza rozkład gamma z funkcją gęstości prawdopodobieństwa

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

Określenie "ułamkowe" odnosi się do faktu, że jeżeli $V_n^{(k)}$, $n \geqslant 1$, są zwykłymi k-tymi wartościami rekordowymi ciągu niezależnych obserwacji o jednakowym rozkładzie wykładniczym, to dla dowolnego układu liczb naturalnych $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ zachodzi równość w sensie rozkładów dwóch wektorów losowych

$$\left(W_{j_1}^{(k)}, \ldots, W_{j_n}^{(k)}\right) \stackrel{d}{=} \left(V_{j_1}^{(k)}, \ldots, V_{j_n}^{(k)}\right).$$

Następnie, dla dowolnej dystrybuanty F oznaczamy

$$\psi_F(u) = F^{-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-u}\right), \quad u \geqslant 0,$$

a więc funkcję odwrotną do tzw. funkcji hazardowej $H_F(x) = -\log(1 - F(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy k-te ułamkowe wartości rekordowe z rozkładu F określamy jako proces stochastyczny $\left\{Y_t^{(k)},\ t \geqslant 0\right\}$, gdzie $Y_t^{(k)} = \psi_F(W_t^{(k)})$. Sformułowaliśmy również alternatywną konstrukcję ułamkowej wartości rekordowej $W_t^{(k)}$ przy użyciu zwykłych wartości rekordowych $\left\{V_n^{(k)},\ n \geqslant 1\right\}$. Mianowicie, jeżeli $[t]$ oznacza część całkowitą liczby $t \in \mathbb{R}$, oraz $\{t\} = t - [t]$ oznacza jej część ułamkową, to

$$W_t^{(k)} \stackrel{d}{=} (1 - B)V_{[t]}^{(k)} + BV_{[t]+1}^{(k)},$$

gdzie B jest zmienną losową o rozkładzie typu beta $B(\{t\}, 1 - \{t\})$, niezależną od ciągu wartości rekordowych $\left\{V_n^{(k)},\ n \geqslant 1\right\}$. Podany został również wielowymiarowy odpowiednik tej konstrukcji.

Jako zastosowanie pojęcia ułamkowych wartości rekordowych wprowadziliśmy w pracy [B7] dwa estymatory wielkości $\psi_F(u)$ przy ustalonym $u \geqslant 0$, lub równoważnie, kwantyla rzędu $-\log(1-u)$ rozkładu F. Mianowicie, udowodniliśmy, że $\hat{\psi}_F(u) = Y_{ku}^{(k)}$ jest asymptotycznie nieobciążonym estymatorem dla $\psi_F(u)$ gdy $k \to \infty$. Jednakże ułamkowe wartości rekordowe nie mogą być obserwowane na podstawie danych statystycznych, więc zaproponowaliśmy inny estymator tej samej wielkości

$$\tilde{\psi}_F(u) = (1 - \{ku\})Y_{[ku]}^{(k)} + \{ku\}Y_{[ku]+1}^{(k)},$$

którego wartości mogą być obliczone na podstawie zwykłych wartości rekordowych, a więc w oparciu o dane statystyczne. Udowodniliśmy, że wartość oczekiwana różnicy tych estymatorów $\hat{\psi}_F(u) - \tilde{\psi}_F(u)$ jest rzędu $O(k^{-2})$ gdy $k \to \infty$. Pokazuje to, że w praktyce możemy przybliżać ułamkowe wartości rekordowe przez odpowiednio dobrane kombinacje liniowe zwykłych rekordów.

W pracy [C1] kontynuowane były badania jakości tego przybliżenia. Stosując metodę projekcji, a dokładniej metodę największych wypukłych minorant, wyznaczyliśmy górne i dolne oszacowania dla wartości oczekiwanych zmiennych losowych

$$\Delta_{n,h}^{(k)} = Y_{n+h}^{(k)} - (1-h)Y_n^{(k)} - hY_{n+1}^{(k)},$$
$$R_{n,h}^{(k)} = Y_{n+h}^{(k)} - Y_n^{(k)},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $h \in (0,1)$, opisujących aproksymację ułamkowych wartości rekordowych. Wartości numeryczne uzyskanych oszacowań potwierdzają, że obydwie metody przybliżenia są dość dobre.

Natomiast, w pracy [C6] badaliśmy obciążenie estymacji wartości $\psi_F(u)$ przy użyciu estymatorów $\hat{\psi}_F(u)$ i $\tilde{\psi}_F(u)$. Mianowicie, wyznaczone zostały górne i dolne oszacowania obciążeń $E(Y_t^{(k)} - \psi_F(u))$ oraz $E(Z_t^{(k)} - \psi_F(u))$, gdzie

$$Z_t^{(k)} = (1 - \{t\})Y_{[t]}^{(k)} + \{t\}Y_{[t]+1}^{(k)}.$$

Wyniki analityczne zostały ponownie zilustrowane wynikami obliczeń numerycznych.

7.4. **Charakteryzacje rozkładów przez funkcje regresji uogólnionych statystyk porządkowych.** Rozważmy uogólnione statystyki porządkowe $X_*^{(r)}$ z parametrami $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$, oraz $X_*^{(s)}$ z parametrami $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, z ciągłego rozkładu F o nośniku na przedziale (α, β), gdzie $\alpha = F^{-1}(0)$ i $\beta = F^{-1}(1^-)$. Załóżmy, że $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą i ciągłą oraz taką, że $\mathrm{E}\left|\psi\left(X_*^{(s)}\right)\right| < \infty$. Niech $1 \leqslant r < s$ oraz określmy funkcje regresji

$$g_{s|r}(x) = \mathrm{E}\left(\psi\left(X_*^{(s)}\right) \mid X_*^{(r)} = x\right), \quad \alpha \leqslant x < \beta,$$

oraz

$$\bar{g}_{r|s}(y) = \mathrm{E}\left(\psi\left(X_*^{(r)}\right) \mid X_*^{(s)} = y\right), \quad \alpha < y \leqslant \beta.$$

Rozważamy następujący problem charakteryzacyjny: czy znajomość którejkolwiek z funkcji $g_{s|r}$ lub $\bar{g}_{r|s}$ wystarcza do jednoznacznego wyznaczenia samego rozkładu F?

W pracy [C2] rozważamy charakteryzacje przez regresję $\bar{g}_{r|s}$, ale przy dodatkowym założeniu $s = r+1$. Największą trudność stanowi fakt, że nie są znane wzory w postaci jawnej na warunkowy rozkład $X_*^{(r)}$ pod warunkiem $X_*^{(s)}$, gdy $r < s$. Jednakże, oryginalnym pomysłem przedstawionym w pracy [C2] było zdefiniowanie pomocniczej funkcji

$$h_r(x) = (1-x)^{1-\gamma_r} f_{*,r}\left(x \mid \gamma_1, \ldots, \gamma_r\right), \quad x \in [0,1],\ r \geqslant 2,$$

która okazuje się być ściśle rosnąca oraz spełnia $h_r(0) = 0$. Wtedy warunek

$$E\left(\psi\left(X_*^{(r)}\right) \mid X_*^{(r+1)}\right) = \bar{g}\left(X_*^{(r+1)}\right),$$

dla pewnej ściśle rosnącej i ciągłej funkcji $\bar{g}$, charakteryzuje bazowy rozkład F następująco. Jeżeli $\gamma_{r+1} < \gamma_{1:r} = \min(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$, to

$$F(x) = h_{r+1}^{-1}\left(A \exp\left(-\int_x^\beta \frac{d\bar{g}(y)}{\psi(y) - \bar{g}(y)}\right)\right),$$

gdzie $A = h_{r+1}(1) < \infty$. W przeciwnym razie, tzn. jeżeli $\gamma_{1:r} \leqslant \gamma_{r+1}$, to $h_{r+1}(1) = \infty$ oraz

$$F(x) = h_{r+1}^{-1}\left(\exp\left(-\int_x^q \frac{d\bar{g}(y)}{\psi(y) - \bar{g}(y)}\right)\right),$$

gdzie

$$q = \inf\left\{z \in (\alpha, \beta) : h_{r+1}(F(z)) \geqslant 1\right\}. \tag{7.1}$$

Odpowiadający wynik dla regresji $g_{r+1|r}$ został podany w Twierdzeniu 4.1 pracy [14], ale wtedy nie ma potrzeby rozważania pomocniczej funkcji h_r.

W pracy [C3] rozważaliśmy również problem charakteryzacji, ale tym razem dla niekoniecznie kolejnych uogólnionych statystyk porządkowych. Wtedy okazuje się, że do jednoznacznej charakteryzacji rozkładu F wystarcza znajomość dwu funkcji regresji. Dokładniej mówiąc, udowodniliśmy następujący wynik.

Twierdzenie 7.1 ([C2], Thm. 1). *Niech $X_*^{(r)}$, $X_*^{(r+1)}$ oraz $X_*^{(s)}$ będą uogólnionymi statystykami porządkowymi z ciągłej dystrybuanty F załóżmy, że $\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą, ciągłą i taką, że $\mathrm{E}\left|\psi\left(X_*^{(s)}\right)\right| < \infty$. Jeżeli funkcje regresji $g_{s|r}$ oraz $g_{s|r+1}$ są znane, to F jest jednoznacznie wyznaczone wzorem*

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\gamma_{r+1}} \int_\alpha^x \frac{dg_{s|r}(y)}{g_{s|r}(y) - g_{s|r+1}(y)}\right)$$

dla $\alpha < x < \beta$, oraz $F(x) = 0$ dla $x \leqslant \alpha$ i $F(x) = 1$ dla $x \geqslant \beta$.

Zauważmy, że jeżeli $s = r+1$, to $g_{r|r} = \psi$, a więc Twierdzenie 7.1 jest uogólnieniem Twierdzenia 4.1 z pracy [14]. Analogiczny rezultat został udowodniony dla dwu regresji $\bar{g}_{r|s}$ i $\bar{g}_{r|s-1}$.

Twierdzenie 7.2 ([C2], Thm. 2). *Przy założeniach Twierdzenia 7.1 oraz* $\mathrm{E}\left|\psi\left(X_*^{(r)}\right)\right| < \infty$*, jeżeli funkcje regresji* $\bar{g}_{r|s}$ *oraz* $\bar{g}_{r|s-1}$*, są znane, to* F *jest jednoznacznie wyznaczone przez następujące wzory:*

(a) jeżeli $\gamma_s < \gamma_{1:s-1}$*, to* $A = h_s(1) < \infty$ *oraz*

$$F(x) = h_s^{-1}\left(A \exp\left(-\int_x^\beta \frac{d\bar{g}_{r|s}(y)}{\bar{g}_{r|s-1}(y) - \bar{g}_{r|s}(y)}\right)\right), \quad \alpha < x < \beta;$$

(b) jeżeli $\gamma_s \geqslant \gamma_{1:s-1}$*, to*

$$F(x) = h_s^{-1}\left(\exp\left(-\int_x^q \frac{d\bar{g}_{r|s}(y)}{\bar{g}_{r|s-1}(y) - \bar{g}_{r|s}(y)}\right)\right), \quad \alpha < x < \beta,$$

gdzie q *jest dane wzorem* (7.1).

Zauważmy, że Twierdzenie 7.2 jest uogólnieniem wyników pracy [C2]. Podkreślmy fakt, że wyniki prac [C2] oraz [C3] zostały udowodnione przy braku ograniczeń na parametry $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ poza oczywistymi warunkami całkowalności. Zatem, tak jak w rozdziale 2, rozważania dotyczące funkcji gęstości uogólnionych statystyk porządkowych wymagały wykorzystania znanych własności G-funkcji Meijera.

Należy również zwrócić uwagę na fakt, że powyższe twierdzenie jest na chwilę obecną najmocniejszym znanym wynikiem dotyczącym charakteryzacji przez regresje uogólnionych statystyk porządkowych, gdyż nadal nie wiadomo, czy w tym celu konieczne są dwie regresje, czy też być może wystarcza tylko znajomość jednej regresji (albo $g_{s|r}$ albo $\bar{g}_{r|s}$ gdzie $s \geqslant r+2$). Jednakże uzyskane ostatnio przeze mnie pewne częściowe wyniki wydają się potwierdzać hipotezę, która mówi, że jedna regresja jest wystarczająca, i będzie to jeden z ważnych tematów mojej przyszłej pracy badawczej.

Specjalną uwagę badaczy zajmujących się tym zagadnieniem przyciąga problem charakteryzacji rozkładów przez *liniowość* regresji uogólnionych statystyk porządkowych. W pracy [B4] rozważaliśmy ten problem, gdy $\psi(x) = x$ oraz albo $g_{s|r}$ albo $\bar{g}_{r|s}$ są funkcjami liniowymi, przy pewnym dodatkowym ograniczeniu na parametry $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ uogólnionych statystyk porządkowych. Dokładnie mówiąc, udowodniliśmy, że jeżeli parametry te są parami różne, tzn. $\gamma_i \neq \gamma_j$ dla $i \neq j$, to regresja $g_{s|r}$ jest funkcją liniową wtedy i tylko wtedy, gdy F jest rozkładem wykładniczym, potęgowym lub Pareto. Powodem wprowadzenia ograniczenia na parametry było to, że ogólna postać gęstości uogólnionych statystyk porządkowych, dana wzorem (2.1), nie była jeszcze znana. Wynik ten został później uogólniony w pracy [14] bez żadnych ograniczeń na parametry $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$. Ponadto w pracy [B4] udowodniliśmy, że jeżeli parametry $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ spełniają dodatkowo warunek $\gamma_i - \gamma_{i+1} - 1 = m \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant s$ (lub równoważnie po prostu $m_1 = \ldots = m_s = m$), to liniowość funkcji regresji $\bar{g}_{r|s}$ charakteryzuje trzy typy rozkładów, których dokładna postać zależy od aktualnie rozważanego modelu, a więc zależy ona od wartości parametru m.

Podkreślmy, że jest to wciąż najmocniejszy znany wynik dotyczący charakteryzacji przez liniowość *pojedynczej* regresji $\bar{g}_{r|s}$ dla $s \geqslant r+2$, gdyż nadal nie wiadomo jak udowodnić rozszerzenia tego wyniku na przypadek braku ograniczeń na parametry γ_i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Jednakże w pracy [C2] wyznaczyliśmy trzy typy rozkładów charakteryzowanych przez liniowość regresji $\bar{g}_{r|r+1}$, a w pracy [C3], jako wniosek z Twierdzenia 7.2, udowodniliśmy, że liniowość dwu funkcji regresji $\bar{g}_{r|s}$ oraz $\bar{g}_{r|s-1}$ charakteryzuje te same trzy typy rozkładów, co liniowość regresji $\bar{g}_{r|r+1}$.

W pracy [B6] rozważaliśmy charakteryzacje przez liniowość regresji $g_{s|r}$ albo $\bar{g}_{r|s}$ w szczególnym ujęciu k-tych wartości rekordowych (zarówno górnych, jak i dolnych). Zauważmy, że wtedy $\gamma_i = k$, a więc wyniki dla wartości rekordowych nie mogą być łatwo wywnioskowane z rezultatów pracy [B4].

7.5. **Problem istnienia procesu Fleminga–Viota i badanie jego własności.** Prace [C4], [C5] i [C11], które powstały w wyniku współpracy z prof. Krzysztofem Burdzym z University of Washington, są poświęcone badaniu własności procesów typu Fleminga–Viota zdefiniowanych w artykule [10]. Przy omawianiu wyników tych prac ograniczymy się w większości przypadków do nieco nieformalnych wypowiedzi, gdyż ich matematycznie ścisłe sformułowania wymagają wprowadzenia licznych, technicznie skomplikowanych oznaczeń.

Rozważmy przestrzeń topologiczną E i niech D będzie jej właściwym podzbiorem borelowskim. Przez $D^c = E \setminus D$ oznaczamy dopełnienie zbioru D. Niech Y będzie mocnym procesem Markowa z czasem ciągłym, o wartościach w przestrzeni E. Zakładamy, że jego (prawie wszystkie) trajektorie są prawostronnie ciągłe. Niech τ_D oraz T_D oznaczają odpowiednio czas wyjścia i czas uderzenia zbioru D przez proces Y, tzn.

$$\tau_D = \inf\{t > 0 : Y_t \in D^c\}, \quad T_D = \inf\{t > 0 : Y_t \in D\}.$$

Zakładamy, że jeżeli $Y_0 \in D$, to $\tau_D < \infty$ oraz rozkład zmiennej losowej τ_D jest bezatomowy.

Dla ustalonej liczby naturalnej $N \geqslant 2$ określamy nieformalnie proces Fleminga–Viota $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$ w oparciu o proces Y, złożony z N cząstek, w następujący sposób. Przypuśćmy, że początkowe rozmieszczenie cząstek jest opisane przez wektor $\mathbf{X}_0 = (x^1, \dots, x^N) \in D^N$. Następnie procesy $X_t^1, \dots, X_t^N$ ewoluują jako niezależne kopie procesu Y do momentu τ_1, gdy jeden z nich, na przykład X^j, uderza w brzeg zbioru D. W chwili τ_1 wybieramy losowo jedną z pozostałych $N-1$ cząstek, na przykład X^k, i cząstka X^j przeskakuje na miejsce zajmowane przez cząstkę X^k. Po czasie τ_1 procesy $X_t^1, \dots, X_t^N$ kontynuują ewolucję jako niezależne kopie procesu Y, aż do chwili $\tau_2 > \tau_1$, gdy jeden z nich uderzy w brzeg zbioru D. Ponownie w chwili τ_2 cząstka, która uderzyła w brzeg przeskakuje na miejsce zajmowane przez jedną z pozostałych cząstek. Dalsza ewolucja procesu $\mathbf{X}$ przebiega analogicznie.

Powyższa procedura ma sens tylko do chwili τ_∞, gdzie

$$\tau_\infty = \lim_{k\to\infty} \tau_k,$$

a więc jest to chwila, gdy wszystkie cząstki uderzą *jednocześnie* w brzeg zbioru D. Nie ma żadnego naturalnego sposobu zdefiniowania procesu $\mathbf{X}_t$ dla $t \geqslant \tau_\infty$, a więc interesujące jest badanie warunków zapewniających, że $\tau_\infty = \infty$. W pracy [10, Theorem 1.1] autorzy twierdzą, że jeżeli Y jest d-wymiarowym ruchem Browna, to dla każdej dziedziny $D \subset \mathbb{R}^d$ (czyli zbioru otwartego i spójnego) i dla każdego $N \geqslant 2$, zachodzi warunek $\tau_\infty = \infty$. Inaczej, proces Fleminga-Viota w oparciu o ruch Browna w obszarze $D \subset \mathbb{R}^d$ jest zawsze poprawnie określony. Jednakże dowód tego twierdzenia zawiera błąd, a więc jest nadal otwartym problemem czy twierdzenie to jest prawdziwe, czy też nie. Z drugiej strony, dla obszarów D o gładkim brzegu, a nawet dla obszarów spełniających wewnętrzny warunek kuli, dowód istnienia procesu Fleminga-Viota jest w miarę prosty (zob. Uwaga 5.6 w pracy [C4]).

Natomiast główny wynik pracy [C4], którego dowód jest znacznie bardziej skomplikowany, mówi, że proces Fleminga-Viota w oparciu o ruch Browna jest poprawnie określony w pewnych obszarach lipschitzowskich. Aby podać jego sformułowanie, przypomnijmy, że funkcja $F : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ jest nazywana funkcją lipschitzowską ze stałą Lipschitza L, jeżeli spełniony jest warunek

$$|F(x) - F(y)| \leqslant L|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Wtedy dziedzina $D \subset \mathbb{R}^d$ jest nazywana obszarem lipschitzowskim ze stałą Lipschitza L, jeżeli może być przedstawiona (lokalnie) jako zbiór leżący powyżej wykresu pewnej funkcji lipschitzowskiej ze stałą L. Głównym wynikiem pracy [C4] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.3. *Załóżmy, że* $\mathbf{X}$ *jest procesem Fleminga-Viota w obszarze* $D \subset \mathbb{R}^d$*, gdzie* $d \geqslant 2$*, w oparciu o ruch Browna. Istnieje stała* $c = c(N,d)$ *taka, że jeśli* D *jest ograniczonym obszarem lipschitzowskim ze stałą* $L < c(N,d)$*, to* $\tau_\infty = \infty$*, prawie pewnie. Ponadto wartości stałej* $c(N,d)$ *rosną wraz ze wzrostem liczby cząstek* N*, maleją wraz ze wzrostem wymiaru przestrzeni* d*, oraz*

$$\lim_{N\to\infty} c(N,d) = c(d) = \frac{1}{\sqrt{d-1}}.$$

Mówiąc intuicyjnie, aby zapewnić istnienie procesu $\mathbf{X}_t$ w dowolnej chwili czasu t, wystarczy stwierdzić, że brzeg obszaru D może zawierać kąty, które jednak nie mogą być zbyt ostre. Na przykład, jeżeli $d = 2$, to wszystkie ewentualne kąty muszą być większe niż kąt prosty, a więc Twierdzenie 7.3 nie obejmuje na przykład przypadku, gdy D jest prostokątem na płaszczyźnie. Z drugiej strony, Twierdzenie 8.2 pracy [C4] stwierdza, że jeżeli D jest dowolnym wielościanem w $\mathbb{R}^d$, to proces Fleminga-Viota w obszarze D, złożony z $N = 2$ cząstek jest poprawnie określony w każdej chwili t. Niestety metoda dowodu tego twierdzenia nie może być łatwo uogólniona na przypadek większej liczby cząstek, czyli $N \geqslant 3$.

Aby udowodnić Twierdzenie 7.3, w pracy [C4] wprowadzone zostały dwie nowe techniki dowodowe. Pierwsza z nich to nowy wariant tzw. brzegowej zasady Harnacka. Przypomnijmy, że klasyczna brzegowa zasada Harnacka pozwala na porównywanie wartości dwu funkcji harmonicznych na brzegu danego obszaru, podczas gdy nasza nowa jej wersja pozwala na porównanie wartości funkcji harmonicznych z pewną funkcją superharmoniczną. Ściśle mówiąc, jeżeli $D \subset \mathbb{R}^d$ jest ograniczonym obszarem lipschitzowskim, a A jest zwartym podzbiorem zbioru D, oraz

$$f(x) = \mathbb{P}^x(T_A < \tau_D), \quad g(x) = \mathbb{E}^x\tau_D, \quad x \in D,$$

to f jest funkcją harmoniczną na zbiorze $D \setminus A$, podczas gdy g jest funkcją superharmoniczną. Zachodzi wtedy następujący wynik, który jest wzmocnieniem brzegowej zasady Harnacka.

Twierdzenie 7.4. *Załóżmy, że stała Lipschitza* L *obszaru* D *spełnia nierówność* $L < \frac{1}{\sqrt{d-1}}$*. Istnieje wtedy stała* $c = c(A,D)$ *taka, że dla każdego* $x \in D$ *spełniona jest nierówność*

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant c.$$

Druga z wprowadzonych w pracy [C4] technik to konstrukcja procesu wycieczek ruchu Browna w stożku, przy czym każda z wycieczek startuje w wierzchołku stożka. Konstrukcja taka jest możliwa tylko dla stożków o pewnych (niezbyt ostrych) kątach w wierzchołku. Obydwie techniki są ograniczone do obszarów lipschitzowskich o ograniczonych stałych Lipschitza, co narzuca takie samo ograniczenie w Twierdzeniu 7.3.

W pracy [C5] rozważany był również problem istnienia procesu Fleminga-Viota, ale tym razem opartego na odpowiednio dobranych jednowymiarowych procesach dyfuzji. Celem tej pracy było podanie konstruktywnych przykładów procesów Markowa Y takich, że odpowiadające im procesy Fleminga-Viota nie są dobrze określone w każdej chwili $t \geqslant 0$.

Pierwszy główny wynik pracy [C5] dotyczy ν-wymiarowego procesu Bessela na półosi $D = (0,\infty)$ zabijanego po uderzeniu w punkt 0. Proces taki jest zdefiniowany jako rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego

$$dY_t = dW_t + \frac{\nu - 1}{2Y_t}dt,$$

gdzie W jest standardowym jednowymiarowym ruchem Browna. Rolę brzegu zbioru D odgrywa zbiór $\{0\}$. W następnym twierdzeniu dowodzimy, że proces Fleminga-Viota złożony z $N = 2$ cząstek, oparty na procesie Bessela jest dobrze określony wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu \geqslant 0$.

Twierdzenie 7.5 ([C5], Thm. 1.1)**.** *Niech* $\mathbf{X}$ *będzie procesem Fleminga-Viota złożonym z* N *cząstek w oparciu o proces Bessela wymiaru* $\nu \in \mathbb{R}$ *na półprostej* $(0, \infty)$*.*

(a) Jeżeli $N = 2$*, to* $\tau_\infty < \infty$ *prawie pewnie, wtedy i tylko wtedy, gdy* $\nu < 0$*.*

(b) Jeżeli $N\nu \geqslant 2$*, to* $\tau_\infty = \infty$ *prawie pewnie.*

Drugi główny wynik pracy [C5] dotyczy procesów dyfuzji Y na przedziale $D = (0, 2]$, przy czym $\partial D = \{0\}$, oraz takich, że dla dowolnej liczby N cząstek proces Fleminga-Viota w oparciu o Y nie jest dobrze określony dla każdego $t \geqslant 0$.

Twierdzenie 7.6 ([C5], Thm. 1.2)**.** *Istnieje jednowymiarowy proces dyfuzji* Y *na przedziale* $(0, 2]$ *taki, że dla każdego* $N \geqslant 2$ *proces Fleminga-Viota złożony z* N *cząstek, oparty na procesie* Y *ma tę własność, że* $\tau_\infty < \infty$*. Ponadto, zmienna losowa* τ_∞ *jest stochastycznie ograniczona przez pewną zmienną losową o rozkładzie wykładniczym.*

Nieco dokładniej mówiąc, proces Y jest rozwiązaniem pewnego stochastycznego równania różniczkowego przedstawionego w pracy [C5]. Nieformalnie mówiąc, proces Y jest procesem dyfuzji, którego współczynnik dryfu jest nieco większy niż dryf dowolnego procesu Bessela. Wynik ten jest ważny z uwagi na fakt, że wiele wyników dotyczących procesów Fleminga-Viota ma charakter asymptotyczny, gdy liczba cząstek N rośnie nieograniczenie. Zatem, wystarczyłoby wiedzieć, że warunek $\tau_\infty = \infty$ jest spełniony tylko dla dostatecznie dużych wartości N. Powyższe twierdzenie mówi, że dla pewnych procesów bazowych Y możliwe jest, że odpowiadający proces Fleminga-Viota nie jest dobrze określony dla każdego $t \geqslant 0$ niezależnie od tego z jak dużej liczby cząstek się składa.

W pracy [C11] rozważone zostały własności procesu "cząstki nieśmiertelnej" procesu Fleminga-Viota. Intuicyjnie mówiąc, cząstka nieśmiertelna to pewna trajektoria historyczna procesu Fleminga-Viota, która rozciąga się od chwili 0 do chwili τ_∞, ale nigdy nie dotyka brzegu zbioru D. Formalną jej definicję można znaleźć w sekcji 2 pracy [C11].

Pierwszym głównym wynikiem pracy [C11] jest Twierdzenie 3.1, które mówi, że jeśli proces bazowy Y jest mocnym procesem Markowa, dla którego rozkład czasu wyjścia ze zbioru D jest bezatomowy, to proces cząstki nieśmiertelnej istnieje i jest wyznaczony jednoznacznie. Podkreślmy fakt, że nie zakładamy tu czy czas τ_∞ trwania całego procesu jest skończony, czy nie. Twierdzenie to jest daleko idącym uogólnieniem Twierdzenia 4 z pracy [30], gdzie zakładając że $\tau_\infty = \infty$, udowodniono jednoznaczność cząstki nieśmiertelnej przy dość restrykcyjnych ograniczeniach na bazowy proces Y.

Pozostałe wyniki pracy [C11] zostały udowodnione tylko dla przypadku, gdy proces bazowy Y jest łańcuchem Markowa z czasem ciągłym o skończonej przestrzeni stanów E. Skoro już udowodniliśmy istnienie i jednoznaczność cząstki nieśmiertelnej, to cały proces Fleminga-Viota można rozważać jako pewien proces gałązkowy. Dobrze znaną własnością takich procesów jest fakt, że przy odpowiednich założeniach proces gałązkowy może być rozłożony na dwie składowe: cząstkę nieśmiertelną i gałęzie boczne. Heurystycznie mówiąc, proces cząstki nieśmiertelnej ma wtedy taki sam rozkład jak proces bazowy warunkowany, aby nigdy nie wyginąć, a każda z gałęzi bocznych ma rozkład pewnego krytycznego procesu gałązkowego (a więc wymierają one w skończonym czasie), oraz intensywność gałązkowania wzdłuż cząstki nieśmiertelnej jest dwa razy większa niż wzdłuż każdej z gałęzi bocznych. Wyniki tego rodzaju są dokładnie omówione na przykład w przeglądowej pracy Engländera i Kyprianou [25].

Nasze rozważania dotyczące procesu Fleminga-Viota są podobne do powyższych wyników dla procesów gałązkowych, ale z uwagi na bardzo nietypowy mechanizm gałązkowania, są sformułowane asymptotycznie gdy liczba cząstek N staje się nieskończona. W Twierdzeniu 5.1 pracy [C11] dowodzimy, że gdy $N \to \infty$, to rozkład cząstki nieśmiertelnej zbiega słabo do rozkładu procesu Y warunkowanego, aby nigdy nie wyjść ze zbioru D. W Twierdzeniu 5.4 pokazaliśmy, że gdy $N \to \infty$, to intensywność gałązkowania wzdłuż cząstki nieśmiertelnej jest dwa razy większa niż wzdłuż każdej z pozostałych cząstek. Wreszcie w Twierdzeniu 5.6 zidentyfikowaliśmy rozkład każdej z gałęzi bocznych jako rozkład odpowiedniego krytycznego procesu gałązkowego.

W dalszym ciągu pozostaje otwarty problem czy powyższe wyniki można uogólnić na przypadek, gdy proces bazowy Y jest procesem Markowa o dowolnej, niekoniecznie skończonej, przestrzeni stanów, albo przynajmniej na przypadek, gdy Y jest ruchem Browna. Będzie to kolejnym z kierunków moich przyszłych badań.

7.6. **Optymalne oszacowania dla obciążenia wybranych L–statystyk oraz uciętych średnich uogólnionych statystyk porządkowych.** Prace [C7]–[C10] są poświęcone dalszym badaniom nad problemem oszacowania obciążenia w estymacji średniej μ rozkładu populacji przez różne L–statystyki, opisanym już ogólnie w rozdziale 6. W pracach [C7] oraz [C8] ponownie rozważamy ten problem w modelu statystyk porządkowych $X_{i:n}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, dla szczególnie wybranych L–statystyk. Mianowicie rozważamy *średnie winsorowane*

$$W_{r,s:n} = \frac{1}{n}\left(rX_{r+1:n} + \sum_{i=r+1}^{s} X_{i:n} + (n-s)X_{s:n} \right), \quad 0 \leqslant r < s \leqslant n,$$

średnie ucięte

$$T_{r,s:n} = \frac{1}{s-r}\sum_{i=r+1}^{s} X_{i:n}, \quad 0 \leqslant r < s \leqslant n,$$

oraz *trójśrednią*

$$T_n = \frac{1}{4}\left(X_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1:n} + 2M + X_{n-\lfloor \frac{n}{4} \rfloor :n} \right),$$

gdzie M oznacza medianę próbkową. Optymalne oszacowania obciążenia średnich uciętych zostały wyznaczone w pracach [21] dla ogólnych rozkładów oraz [17] dla rozkładów o malejącej średniej lub intensywności awarii. Nasze zainteresowanie średnimi winsorowanymi wynika z faktu, że nie uwzględniają one obserwacji odstających w próbie, ale w przeciwieństwie do średnich uciętych nadal zawierają informację o rozmiarze próby. Z drugiej strony, trójśrednia jest również ciekawym przypadkiem L–statystyki, jako kolejny przykład "szybkiego" estymatora dla średniej z populacji, zależnego od niewielkiej liczby (co najwyżej czterech) odpowiednio wybranych obserwacji.

Rozważania w pracach [C7] i [C8] wykorzystują podejście omówione w rozdziale 6, chociaż wymagają one nieco bardziej szczegółowych rozważań. W przypadku średnich winsorowanych w pracy [C8] udowodniono, że odpowiadająca rzutowana funkcja $f_{\mathbf{c}:n}$ spełnia warunki (C), ale odpowiednia funkcja g (dana wzorem (6.2)) ma dokładnie jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $(0, \theta_1)$. Zatem w tym przypadku nie ma potrzeby analizowania funkcji h danej wzorem (6.3), a szukana projekcja jest postaci (6.4). W przypadku trójśredniej, rzutowana funkcja $f_{\mathbf{c}:n}$ nie spełnia warunków (C), ale jest symetryczna względem punktu $\frac{1}{2}$, i można udowodnić, że ma ona albo jedno, albo trzy maksima. Jednakże w pracy [C7] udowodniliśmy, że projekcja $\bar{f}_{\mathbf{c}:n}$ jest jednoznacznie wyznaczona przez odpowiadające funkcje g i h, i jest ona postaci albo (6.4) albo (6.5).

Następnie, gdy wyznaczona jest już projekcja $\bar{f}_{\mathbf{c}:n}$, obliczenie wartości szukanych oszacowań oraz znalezienie rozkładów, dla których są one osiągane, jest dość prostym zadaniem, chociaż wymagającym żmudnych rachunków. Ponadto, w pracach [C7] oraz [C8] wyznaczono numerycznie przykładowe wartości oszacowań dla wybranych wartości n. Pokazują one na przykład, że średnie winsorowane są lepsze od średnich uciętych, w tym sensie, że przy ustalonej liczbie odrzuconych obserwacji odstających, średnia winsorowana ma mniejsze maksymalne obciążenie niż odpowiadająca średnia ucięta.

Prace [C9] oraz [C10] są poświęcone szacowaniu obciążenia estymacji μ przez ucięte średnie uogólnionych statystyk porządkowych

$$T^*_{r,s:n} = \frac{1}{s-r+1} \sum_{i=r}^{s} X_*^{(i)},$$

ale tylko w dwóch szczególnych modelach: progresywnie cenzurowanych statystyk porządkowych oraz k-tych wartości rekordowych. Okazuje się, że w obydwu przypadkach ucinanie wartości największych nie ma żadnego znaczenia, więc rozważamy tylko przypadek gdy $s = n$.

W pracy [C9] wyznaczone zostały optymalne górne i dolne oszacowania obciążenia statystyki $T^*_{r,n:n}$ dla k-tych wartości rekordowych z rozkładów o skończonej wariancji. Następnie, górne oszacowania dla $r = 1$ zostały poprawione w klasach rozkładów o malejącej gęstości lub intensywności awarii. Wymagało to uogólnienia wyników pracy [17], cytowanych wcześniej jako Stwierdzenie 3.1, gdyż rzutowane funkcje h spełniały warunki (A) z wyjątkiem tego, że tym razem $h(a) \geqslant 0$, a nie $h(a) = 0$ jak poprzednio. Wartości numeryczne uzyskanych oszacowań pokazują, że przybliżanie średniej μ uciętymi średnimi zwykłych rekordów ($k = 1$) jest raczej mało efektywne, ale znacznie poprawia się, gdy zastosujemy k-te rekordy dla $k \geqslant 2$.

W pracy [C10] rozważany był analogiczny problem w modelu statystyk porządkowych progresywnie cenzurowanych. Ponownie do badania przebiegu zmienności rzutowanych funkcji zastosowana została własność VDP opisana powyżej w rozdziale 2. Numeryczne wartości wyznaczonych oszacowań pokazują, że aby uzyskać małe wartości obciążenia należy stosować schematy cenzurowania, w których liczby $R_1, \ldots, R_n$ obiektów usuwanych z eksperymentu na kolejnych jego etapach, raczej maleją, a nie rosną. Rozważano również możliwość rozszerzenia tych wyników na ogólny model uogólnionych statystyk porządkowych. Okazało się jednak, że proste uogólnienie nie jest możliwe, gdyż zależność kształtu rzutowanych funkcji od parametrów $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ jest zbyt skomplikowana, aby mogła być efektywnie zanalizowana przy użyciu jedynie własności VDP. Zatem, aby wyznaczyć ogólne oszacowania konieczne jest zastosowanie nowych narzędzi.

Literatura

[1] B. C. Arnold, N. Balakrishnan, H. N. Nagaraja, *A first course in order statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.

[2] B. C. Arnold, N. Balakrishnan, H. N. Nagaraja, *Records*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.

[3] A. V. Balakrishnan, *Applied functional analysis*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 2nd ed., 1981.

[4] N. Balakrishnan, R. Aggarwala, *Progressive censoring*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.

[5] N. Balakrishnan, E. Cramer, *The art of progressive censoring*, Springer, New York, 2014.

[6] N. Balakrishnan, E. Cramer, U. Kamps, *Bounds for means and variances of progressive type II censored order statistics*, Statist. Probab. Lett., 54 (2001), pp. 301–315.

[7] N. Balakrishnan, K. S. Sultan, *Recurrence relations and identities for moments of order statistics*, Order statistics: theory & methods, vol. 16 of Handbook of Statist., North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 149–228.

[8] R. E. Barlow, F. Proschan, *Mathematical theory of reliability*, SIAM, Philadelphia, PA, 1996.

[9] R. E. Barlow, W. R. van Zwet, *Asymptotic properties of isotonic estimators for the generalized failure rate function. I. Strong consistency*, in Nonparametric Techniques in Statistical Inference (Proc. Sympos., Indiana Univ., Bloomington, Ind., 1969), Cambridge Univ. Press, London, 1970, pp. 159–176.

[10] K. Burdzy, R. Hołyst, P. March, *A Fleming-Viot particle representation of the Dirichlet Laplacian*, Comm. Math. Phys., 214 (2000), pp. 679–703.

[11] K. N. Chandler, *The distribution and frequency of record values*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., 14 (1952), pp. 220–228.

[12] K. F. Cheng, *Contributions to nonparametric generalized failure rate function estimation*, Metrika, 29 (1982), pp. 215–225.

[13] E. Cramer, U. Kamps, *Marginal distributions of sequential and generalized order statistics*, Metrika, 58 (2003), pp. 293–310.

[14] E. Cramer, U. Kamps, C. Keseling, *Characterizations via linear regression of ordered random variables: a unifying approach*, Comm. Statist. Theory Methods, 33 (2004), pp. 2885–2911.

[15] E. Cramer, U. Kamps, T. Rychlik, *Evaluations of expected generalized order statistics in various scale units*, Appl. Math. (Warsaw), 29 (2002), pp. 285–295.

[16] E. Cramer, U. Kamps, T. Rychlik, *Unimodality of uniform generalized order statistics, with applications to mean bounds*, Ann. Inst. Statist. Math., 56 (2004), pp. 183–192.

[17] K. Danielak, *Sharp upper mean-variance bounds for trimmed means from restricted families*, Statistics, 37 (2003), pp. 305–324.

[18] K. Danielak, *Sharp upper bounds for expectations of differences of order statistics in various scale units*, Comm. Statist. Theory Methods, 33 (2004), pp. 787–803.

[19] K. Danielak, M. Z. Raqab, *Sharp bounds on expectations of kth record increments*, Statist. Probab. Lett., 46 (2004), pp. 665–674.

[20] K. Danielak, M. Z. Raqab, *Sharp bounds on expectations of kth record spacings from restricted families*, Statist. Probab. Lett., 69 (2004), pp. 175–187.

[21] K. Danielak, T. Rychlik, *Exact bounds for the bias of trimmed means*, Aust. N. Z. J. Stat., 45 (2003), pp. 83–96.

[22] K. Danielak, T. Rychlik, *Sharp bounds for expectations of spacings from decreasing density and failure rate families*, Appl. Math. (Warsaw), 31 (2004), pp. 369–395.

[23] H. A. David, H. N. Nagaraja, *Order statistics*, Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 3rd ed., 2003.

[24] W. Dziubdziela, B. Kopociński, *Limiting properties of the k-th record values*, Zastos. Mat., 15 (1976), pp. 187–190.

[25] J. Engländer, A. E. Kyprianou, *Local extinction versus local exponential growth for spatial branching processes*, Ann. Probab., 32 (2004), pp. 78–99.

[26] L. Gajek, *Limiting properties of difference between the successive kth record values*, Probab. Math. Statist., 5 (1985), pp. 221–224.

[27] L. Gajek, A. Okolewski, *Projection bounds on expectations of record statistics from restricted families*, J. Statist. Plann. Inference, 110 (2003), pp. 97–108.

[28] L. Gajek, T. Rychlik, *Projection method for moment bounds on order statistics from restricted families. I. Dependent case*, J. Multivariate Anal., 57 (1996), pp. 156–174.

[29] L. Gajek, T. Rychlik, *Projection method for moment bounds on order statistics from restricted families. II. Independent case*, J. Multivariate Anal., 64 (1998), pp. 156–182.

[30] I. Grigorescu, M. Kang, *Immortal particle for a catalytic branching process*, Probab. Theory Related Fields, 153 (2012), pp. 333–361.

[31] E. J. Gumbel, *The maxima of the mean largest value and of the range*, Ann. Math. Statistics, 25 (1954), pp. 76–84.

[32] H. O. Hartley, H. A. David, *Universal bounds for mean range and extreme observation*, Ann. Math. Statistics, 25 (1954), pp. 85–99.

[33] N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, *Continuous univariate distributions. Vol. 1*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2nd ed., 1994.

[34] U. Kamps, *A concept of generalized order statistics*, J. Statist. Plann. Inference, 48 (1995), pp. 1–23.

[35] U. Kamps, *A concept of generalized order statistics*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995.

[36] U. Kamps, *Characterizations of distributions by recurrence relations and identities for moments of order statistics*, in Order statistics: theory & methods, vol. 16 of Handbook of Statist., North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 291–311.

[37] V. Komornik, *Another short proof of Descartes's rule of signs*, Amer. Math. Monthly, 113 (2006), pp. 829–830.

[38] Y. L. Luke, *The special functions and their approximations, Vol. I*, Academic Press, New York, 1969.

[39] A. M. Mathai, *A handbook of generalized special functions for statistical and physical sciences*, Oxford Science Publications, New York, 1993.

[40] S. Moriguti, *A modification of Schwarz's inequality with applications to distributions*, Ann. Math. Statistics, 24 (1953), pp. 107–113.

[41] H. N. Nagaraja, *On the expected values of record values*, Austral. J. Statist., 20 (1978), pp. 176–182.

[42] J. Navarro, M. Burkschat, *Coherent systems based on sequential order statistics*, Naval Res. Logist., 58 (2011), pp. 123–135.

[43] V. Nevzorov, *Records: Mathematical Theory*, AMS, Providence, RI, 2001.

[44] N. Papadatos, *Exact bounds for the expectations of order statistics from non-negative populations*, Ann. Inst. Statist. Math., 49 (1997), pp. 727–736.

[45] P. Pawlas, D. Szynal, *Relations for single and product moments of k-th record values from exponential and Gumbel distributions*, J. Appl. Statist. Sci., 7 (1998), pp. 53–61.

[46] D. Pfeifer, *Characterizations of exponential distributions by independent nonstationary record increments*, J. Appl. Probab., 19 (1982), pp. 127–135.

[47] J. Pickands, III, *Statistical inference using extreme order statistics*, Ann. Statist., 3 (1975), pp. 119–131.

[48] M. Z. Raqab, *Bounds based on greatest convex minorants for moments of record values*, Statist. Probab. Lett., 36 (1997), pp. 35–41.

[49] M. Z. Raqab, *Projection p-norm bounds on the moments of kth record increments*, J. Statist. Plann. Inference, 124 (2004), pp. 301–315.

[50] T. Rychlik, *Evaluating improvements of records*, Appl. Math. (Warsaw), 24 (1997), pp. 315–324.

[51] T. Rychlik, *Bounds for expectations of L-estimates*, Order statistics: theory & methods, vol. 16 of Handbook of Statist., North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 105–145.

[52] T. Rychlik, *Projecting statistical functionals*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[53] I. J. Schoenberg, *On variation diminishing approximation methods*, On numerical approximation. Proceedings of a Symposium, Madison, April 21-23, 1958, Edited by R. E. Langer, The University of Wisconsin Press, Madison, 1959, pp. 249–274.

[54] S. M. Stigler, *Fractional order statistics, with applications*, J. Amer. Statist. Assoc., 72 (1977), pp. 544–550.

[55] X. Wang, *A simple proof of Descartes's rule of signs*, Amer. Math. Monthly, 111 (2004), pp. 525–526.