MONIKA BUDZYŃSKA

AUTOREFERAT

Lublin 2014

Spis treści

Informacje o autorze

Imię i nazwisko: Monika Budzyńska
Dyplomy i stopnie naukowe:

Doktor nauk matematycznych
rozprawa: Ciągi asymptotycznie regularne i ich zastosowania w metrycznej teorii punktów stałych
promotor: dr hab. Tadeusz Kuczumow
recenzenci: dr hab. A. Idzik i dr hab. A. Stachura
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, 1999.

Magister matematyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin, 1994.
Studia magisterskie z matematyki, Wydział Matematyki i Fizyki UMCS, Lublin, 1989-1994.

Zatrudnienie w jednostkach naukowych:

Instytut Matematyki
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej , Lublin
asystent od 1 października 1994 do 30 września 2001,
adiunkt od 1 października 2001,

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, Chełm
wykładowca od 1 października 2002 do 7 stycznia 2005 (drugi etat),

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, Zamość
wykładowca od 1 października 2009 (drugi etat).

Wokół twierdzenia Wolffa-Denjoya
Cykl publikacji habilitacyjnych powiązanych tematycznie

B 1) M. Budzyńska, S. Reich, Intersections of holomorphic retracts in Banach spaces, J. Aust. Math. Soc 89 (2010), 297-307.
B 2) M. Budzyńska, The Denjoy-Wolff theorem in $\mathbb{C}^n$, Nonlinear Analysis 75 (2012), 22-29.
B 3) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, A Denjoy-Wolff theorem for compact holomorphic mappings in reflexive Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012), 504-512.
B 4) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, Theorems of Denjoy-Wolff type, Ann. Mat. Pura Appl. 192 (2013), 621-648.
B 5) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, A Denjoy-Wolff theorem for compact holomorphic mappings in complex Banach spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 38 (2013), 747-756.
B 6) M. Budzyńska, The Denjoy-Wolff theorem for condensing mappings in a bounded and strictly convex domain in a complex Banach space, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 39 (2014), 919-940.
B 7) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, Theorems of Denjoy-Wolff type for families of holomorphic retracts, J. Nonlinear Conv. Anal. 15, 637-645 (2014).

Wstęp

Autoreferat składa się ze wstępu i z czterech rozdziałów. W rozdziałach pierwszym i drugim przypominam podstawowe pojęcia i fakty (dla wygody czytelnika nawet te ogólnie znane), które są użyte w moim osiągnięciu naukowym, przy czym w rozdziale drugim przedstawię również historyczny rozwój problemów związanych z twierdzeniem Wolffa-Denjoya. Podzieliłam tutaj uogólnienia tego twierdzenia na dwie części - na część związaną z odwzorowaniami kuli w kulę i na część związaną z odwzorowaniami ograniczonego i wypukłego obszaru w $\mathbb{C}^k$ w siebie. Wynika to z tego, że zdecydowanie lepsze wyniki były osiągnięte dla odwzorowań określonych w kuli, a jednym z moich celów w przedstawionym tutaj osiągnięciu naukowym jest podanie twierdzenia łączącego tego typu wyniki (patrz rozdział trzeci, twierdzenie 3.7) - uważam, że jest to mój najważniejszy rezultat i idea jego dowodu należy całkowicie do mnie. W rozdziale drugim przypomnę też związki między półgrupami holomorficznych (lub ogólniej k_D-nieoddalających) odwzorowań, a równaniami różniczkowymi. Te związki są zresztą głównym powodem badania własności tych półgrup, ich generatorów i rezolwent. Kończę rozdział drugi informacjami o rodzinach holomorficznych (k_D-nieoddalających) retrakcji, podane w następnym rozdziale twierdzenia o zachowaniu się rodziny retrakcji z pustym przecięciem i z własnością skończonego przecięcia nie były wcześniej zauważone. We wspomnianym już rozdziale trzecim przedstawiam wyniki wchodzące w skład mojego osiągnięcia naukowego, a w rozdziale czwartym omawiam mój pozostały dorobek naukowy.

Zakończę wstęp następującą uwagą. W trakcie mojej rozmowy z prof. Marco Abate podczas konferencji w Izraelu w 2013 roku zwrócił mi on uwagę, że poprawną nazwą jest twierdzenie Wolffa-Denjoya, a nie twierdzenie Denjoya-Wolffa. Dlatego w moim autoreferacie używam już poprawnej nazwy tego twierdzenia.

1. Podstawowe oznaczenia i informacje

Zanim przejdę do omawiania moich wyników, z których składa się moje osiągnięcie naukowe przedstawione do oceny, podam w tym rozdziale podstawowe oznaczenia i informacje używane w głównej części mojego autoreferatu - w rozdziale trzecim.

Maksymalne ciągi uogólnione są jednym z podstawowych narzędzi w dowodach moich wyników. Ponieważ nie są często stosowane w teorii funkcji holomorficznych, to przypomnę najpierw definicję oraz własności ciągu uogólnionego (inaczej nazywanego ciągiem Moore'a-Smitha).

Definicja 1.1. *([117]) Niech I będzie zbiorem skierowanym i niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Każde odwzorowanie $u : I \to X$ nazywamy ciągiem uogólnionym i oznaczamy symbolem (u, I). Podobnie jak w przypadku ciągów będziemy pisać $u(i) = x_i$ oraz $\{x_i\}_{i\in I} = \{x_i\}_i$ zamiast (u, I).*

Definicja 1.2. *([79]) Niech będzie dany ciąg uogólniony $\{x_i\}_{i\in I}$ w zbiorze X i niech C będzie niepustym podzbiorem zbioru X. Będziemy mówić, że prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{x_i\}_{i\in I}$ leżą w zbiorze C, jeśli istnieje $\tilde{i} \in I$, takie że dla każdego $i \geqslant \tilde{i}$ mamy $x_i \in C$.*

Definicja 1.3. *([17], [79]) Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną i niech (u, I) będzie ciągiem uogólnionym w zbiorze X. Mówimy, że ciąg uogólniony (u, I) jest zbieżny do $\tilde{x} \in X$, gdy dla każdego otoczenia $U \in \mathcal{T}$ punktu $\tilde{x}$ prawie wszystkie wyrazy ciągu uogólnionego (u, I) leżą w U.*

Definicja 1.4. *([116]) Jeżeli (u, I) jest ciągiem uogólnionym w zbiorze X, $(J, \leqslant_1)$ zbiorem skierowanym i $f : J \to I$ odwzorowaniem spełniającym warunek*

dla każdego $i \in I$ istnieje $\tilde{j} \in J$, takie że $f(j) \geqslant i$ dla każdego $j \geqslant_1 \tilde{j}$,

to ciąg uogólniony $(u \circ f, J)$ nazywamy podciągiem ciągu uogólnionego (u, I).

Definicja 1.5. *([116]) Niech (u, I) będzie ciągiem uogólnionym w zbiorze X. Jeżeli dla każdego podzbioru C zbioru X albo prawie wszystkie wyrazy tego ciągu uogólnionego leżą w C albo prawie wszystkie wyrazy tego ciągu uogólnionego leżą w dopełnieniu $X \setminus C$ zbioru C, to ciąg uogólniony (u, I) nazywamy maksymalnym ciągiem uogólnionym lub uniwersalnym ciągiem uogólnionym.*

Maksymalny ciąg uogólniony ma kilka bardzo dobrych własności (patrz np. [54], [57], [80], [140]).

Lemat 1.1. *Każdy ciąg uogólniony ma podciąg, który jest maksymalnym ciągiem uogólnionym.*

Lemat 1.2. *Jeżeli* $(u, I) = \{x_i\}_{i \in I}$ *jest maksymalnym ciągiem uogólnionym w zbiorze* X, Y *jest niepustym zbiorem i odwzorowanie* f *przekształca* X *w* Y, *to ciąg uogólniony* $(f \circ u, I) = \{f(x_i)\}_{i \in I}$ *jest także maksymalnym ciągiem uogólnionym.*

Lemat 1.3. *Każdy maksymalny ciąg uogólniony w zwartej przestrzeni topologicznej* $(X, \mathcal{T})$ *jest zbieżny.*

Przejdę teraz do istotnej w moich badaniach definicji przestrzeni metrycznie wypukłej.

Definicja 1.6. *([113], patrz także [18] i [28]) Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną. Jeżeli dla każdych dwóch różnych punktów* $x, y \in X$ *istnieje punkt* $z \in X \setminus \{x, y\}$, *taki że* $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$, *to mówimy, że przestrzeń metryczna* (X, d) *jest przestrzenią metrycznie wypukłą.*

Muszę też mieć definicję odcinka metrycznego.

Definicja 1.7. *([113], patrz także [18] i [28]) Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną i niech* x, y *będą dwoma różnymi punktami w* X. *Jeżeli podzbiór* $[x, y]_d$ *zbioru* X *spełnia następujące warunki*

(i) $x, y \in [x, y]_d$;

(ii) *dla każdego* $0 < \beta < d(x, y)$ *istnieje jedyny punkt* $z \in [x, y]_d$, *taki że*
$$d(x, z) = \beta$$
i
$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y);$$

(iii) *dla każdego* $w \in [x, y]_d$ *mamy*
$$d(x, y) = d(x, w) + d(w, y),$$

to nazywamy go d-metrycznym odcinkiem łączącym w X *punkt* x *z punktem* y.

Przed wypowiedzią twierdzenia Mengera o istnieniu metrycznego odcinka przypomnę definicję przestrzeni ograniczenie zwartej.

Definicja 1.8. *([29]) Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną. Gdy każdy niepusty domknięty i ograniczony zbiór w* (X, d) *jest zbiorem zwartym, to przestrzeń metryczną* (X, d) *nazywamy przetrzenią ograniczenie zwartą.*

Mamy następujące twierdzenie Mengera, które podaję w słabszej dostosowanej do moich potrzeb wersji.

Twierdzenie 1.1. *([113], patrz także [9], [18], [19], [28], [87] i [114]) Niech (X, d) będzie ograniczenie zwartą przestrzenią metryczną. Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metrycznie wypukłą, to każde dwa różne punkty w X mogą być połączone w X d-metrycznym odcinkiem.*

W następnym twierdzeniu będę używać pojęcia lokalnej całkowitej ograniczoności przestrzeni metrycznej (X, d).

Definicja 1.9. *([105], patrz także [54] i [106]) Mówimy, że ograniczona przestrzeń metryczna (Y, d_Y) jest przestrzenią całkowicie ($\equiv$ totalnie) ograniczoną jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje pokrycie złożone ze skończonej liczby zbiorów o średnicy mniejszej niż ε. Przestrzeń metryczna (X, d_X) jest lokalnie całkowicie ograniczona jeżeli każdy niepusty i ograniczony podzbiór C (z metryką d_X) zbioru X jest całkowicie ograniczony.*

Uwaga 1.1. *Oczywiście niepuste warunkowo zwarte podzbiory C przestrzeni metrycznej (X, d) są całkowicie ograniczone (przypominam, że C jest zbiorem warunkowo zwartym w przestrzeni metrycznej (X, d), gdy jego domknięcie $\overline{C}^d$ jest zbiorem zwartym w (X, d)).*

Muszę też mieć definicję odwzorowania k-lipschitzowskiego i w szczególności definicję odwzorowania nieoddalającego.

Definicja 1.10. *([57], [58]) Niech (X_1, d_1) i (X_2, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi i niech $\emptyset \neq D_1 \subset X_1$ i $\emptyset \neq D_2 \subset X_2$ będą ich podzbiorami. Niech będzie dane odwzorowanie $f : D_1 \mapsto D_2$. Jeżeli istnieje $k \in \mathbb{R}^+ =< 0, +\infty)$, takie że*

$$d_2 (f (x) , f (y)) \leqslant kd_1 (x, y)$$

dla każdych $x, y \in D_1$, to mówimy, że odwzorowanie f jest k-lipschitzowskie lub lipschitzowskie ze stałą Lipschitza równą k (ze względu na metryki d_1 i d_2).

Jeżeli $k = 1$, to odwzorowanie f nazywamy nieoddalającym.

Mogę teraz wypowiedzieć twierdzenie o zachowaniu się ciągu iteracji odwzorowania nieoddalającego w takiej przestrzeni.

Twierdzenie 1.2. *([29]) Niech f będzie przekształceniem nieoddalającym lokalnie całkowicie ograniczonej przestrzeni metrycznej (X, d) w siebie. Jeżeli dla pewnego $x_0 \in X$ ciąg iteracyjny $\{f^n (x_0)\}$ zawiera ograniczony podciąg, to dla każdego $x \in X$ cały ciąg iteracyjny $\{f^n (x)\}$ jest ograniczony.*

Podkreślę tutaj, że zastosowanie tego twierdzenia jest kluczowe w dowodach moich twierdzeń typu Wolffa-Denjoya.

Ponieważ dowody moich twierdzeń mają charakter metryczny, to przypomnę najpierw definicję wykorzystanych w nich odległości.

Definicja 1.11. *Niech Δ będzie jednostkowym kołem otwartym na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Odległość Poincarégo w jednostkowym kole otwartym Δ jest zadana wzorem*

$$k_{\Delta}(z,w) = \omega_{\Delta}(z,w) = \arg\operatorname{tgh}\left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right| = \arg\operatorname{tgh}\left(1-\sigma(z,w)\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie

$$\sigma(z,w) = \frac{\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)}{|1-z\overline{w}|^2}, \qquad z,w \in \Delta.$$

W przypadku ograniczonego i wypukłego obszaru w zespolonej przestrzeni Banacha zamiast odległości Poincarégo będziemy używać odległości Kobayashiego ([88], [89], [90]). Definicja tej odległości, którą podam jest w zasadzie definicją funkcji Lemperta, ale w przypadku ograniczonego i wypukłego obszaru D w zespolonej przestrzeni Banacha funkcja Lemperta δ jest równa odległości Kobayashiego k_D.

Definicja 1.12. *([108], [48]) Niech D ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Przez $H(\Delta, D)$ oznaczamy zbiór wszystkich odwzorowań holomorficznych z Δ w D. Odległość Kobayashiego w D jest dana wzorem*

$$\begin{aligned} k_D(x,y) = \delta_D(x,y) = \inf\{k_{\Delta}(0,\gamma) : \textit{istnieje } f \in H(\Delta, D),\\ \textit{takie że } f(0) = x \ \ i \ \ f(\gamma) = y\}, \end{aligned}$$

gdzie $x, y \in D$.

W szczególności w kuli Hilberta B_H, tzn. w jednostkowej kuli otwartej o środku w 0 w zespolonej przestrzeni Hilberta $(H, (\cdot,\cdot))$, mamy następujący wzór na odległość Kobayashiego

$$k_{B_H}(x,y) = \arg\operatorname{tgh}\left(1-\sigma(x,y)\right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $x, y \in B_H$ i

$$\sigma(x,y) = \frac{\left(1-\|x\|^2\right)\left(1-\|y\|^2\right)}{|1-(x,y)|^2}$$

([60]).

Przejdźmy teraz do własności odległości Kobayashiego. Załóżmy, że D jest wypukłym i ograniczonym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Niech $dist_{\|\cdot\|}(x, \partial D)$ oznacza odległość w $(X, \|\cdot\|)$ punktu $x \in D$ do brzegu ∂D obszaru D i $diam_{\|\cdot\|} D$ jest średnicą obszaru

D w $(X, \|\cdot\|)$. O związkach między normą a odległością Kobayashiego mówi następne twierdzenie.

Twierdzenie 1.3. *([63]) Jeżeli D jest ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, to prawdziwe są następujące nierówności*

$$\operatorname{arg\,tgh}\left(\frac{\|x-y\|}{diam_{\|\cdot\|}D}\right) \leqslant k_D(x,y)$$

dla wszystkich $x, y \in D$ i

$$k_D(x,y) \leqslant \operatorname{arg\,tgh}\left(\frac{\|x-y\|}{dist_{\|\cdot\|}(x,\partial D)}\right),$$

gdy $\|x-y\| < dist_{\|\cdot\|}(x, \partial D)$.

Stąd dostajemy, że przy naszych założeniach o D odległość Kobayashiego k_D jest lokalnie równoważna normie $\|\cdot\|$ w X, tzn. lokalnie zbieżność normowa jest równa zbieżności w k_D. Ponadto (D, k_D) jest zupełną przestrzenią metryczną.

Następny lemat wykorzystuję w dowodach wypułości kul i horosfer w ograniczonych i wypukłych obszarach D z odległością Kobayashiego.

Lemat 1.4. *([107], [75], [104]) Niech D będzie wypukłym i ograniczonym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$.*

(i) *Jeżeli $x, y, w, z \in D$ i $s \in [0,1]$, to*

$$k_D(sx + (1-s)y, sw + (1-s)z) \leqslant \max[k_D(x,w), k_D(y,z)];$$

(ii) *jeżeli $x, y \in D$ i $s, t \in [0,1]$, to*

$$k_D(sx + (1-s)y, tx + (1-t)y) \leqslant k_D(x,y).$$

Aby scharakteryzować zbiory k_D-ograniczone wprowadzamy następujące pojęcie.

Definicja 1.13. *Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli dla niepustego podzbioru $C \subset D$ mamy*

$$dist_{\|\cdot\|}(C, \partial D) := \inf\{\|x-y\| : x \in C,\ y \in \partial D\} > 0,$$

to mówimy, że leży on ściśle wewnątrz D.

Twierdzenie 1.4. *([63]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Niepusty podzbiór $C \subset D$ jest k_D-ograniczony wtedy i tylko wtedy gdy leży ściśle wewnątrz D.*

Zanim przejdę do własności granic ciągów uogólnionych w (D, k_D) przypomnę definicję ścisłej wypukłości obszaru.

Definicja 1.14. *([46]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli dla każdych dwóch różnych punktów $x, y \in \overline{D}^{\|\cdot\|}$ otwarty odcinek*

$$(x, y) = \{z \in X : z = sx + (1-s)\,y,\ \ 0 < s < 1\}$$

leży w D, to obszar D nazywamy obszarem ściśle wypukłym.

Jeżeli jednostkowa kula otwarta w $(X, \|\cdot\|)$ jest ściśle wypukła, to $(X, \|\cdot\|)$ nazywamy przestrzenią ściśle wypukłą.

Mamy teraz następujący lemat, który wielokrotnie stosowałam w moich pracach.

Lemat 1.5. *([99]) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Niech $\{x_j\}_{j\in J}$ i $\{y_j\}_{j\in J}$ będą dwoma ciągami uogólnionymi w D zbieżnymi w normie odpowiednio do $\xi \in \partial D$ i $\eta \in \overline{D}^{\|\cdot\|}$. Jeżeli*

$$\sup\{k_D(x_j, y_j) : j \in J\} = c < \infty,$$

to $\xi = \eta$.

Można łatwo sprawdzić, że w lemacie 1.5 założenie ścisłej wypukłości obszaru D jest istotne.

Omówię teraz interesujące mnie własności zarówno odwzorowań holomorficznych jak i odwzorowań k_D-nieoddalających. Zacznę od podania kilku definicji i oznaczeń.

Definicja 1.15. *Niech $(X_1, \|\cdot\|_1)$ i $(X_2, \|\cdot\|_2)$ będą zespolonymi przestrzeniami Banacha i niech D będzie obszarem w $(X_1, \|\cdot\|_1)$. Jeżeli odwzorowanie $f : D \to X_2$ ma w każdym punkcie $x \in D$ pochodną Frécheta $Df(x)$, to odwzorowanie f nazywamy holomorficznym.*

Rodzinę wszystkich odwzorowań holomorficznych z ograniczonego i wypukłego obszaru D w zespolonej przestrzeni Banacha $(X_1, \|\cdot\|_1)$ w zespoloną przestrzeń Banacha $(X_2, \|\cdot\|_2)$ będę oznaczać przez $H(D, X_2)$, rodzinę wszystkich odwzorowań holomorficznych z ograniczonego i wypukłego obszaru $D_1 \subset X_1$ w wypukły i ograniczony obszar $D_2 \subset X_2$ będę oznaczać przez $H(D_1, D_2)$, a gdy $(X_1, \|\cdot\|_1) = (X_2, \|\cdot\|_2)$ i $D = D_1 = D_2$, to rodzinę wszystkich odwzorowań holomorficznych z D w D będę oznaczać przez $H(D)$.

Gdy rozpatrujemy odwzorowania, to odwzorowanie identycznościowe określone na D będę oznaczać przez I.

Aby pokazać, że badanie holomorficzności odwzorowania można sprowadzić do badania analityczności funkcji jednej zmiennej zespolonej musimy przypomnieć pojęcie zbioru normującego.

Definicja 1.16. *([50]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha i niech $\mathcal{N}$ będzie niepustym podzbiorem przestrzeni sprzężonej X^*. Jeżeli istnieją dodatnie stałe c i C, takie że*

$$\sup \{|l(x)| : l \in \mathcal{N}, \|l\| \leqslant C\} \geqslant c \|x\|$$

dla każdego $x \in X$, to zbiór $\mathcal{N}$ nazywamy zbiorem normującym dla X.

Oczywiście zbiór normujący wyznacza topologię liniową Hausdorffa $\sigma(X, \mathcal{N})$ w X. Możemy teraz podać następujące bardzo pożyteczne twierdzenie.

Twierdzenie 1.5. *([7], [8], [13], [34], [38], [50], [55], [63], [67]) Niech $(X_1, \|\cdot\|_1)$ i $(X_2, \|\cdot\|_2)$ będą przestrzeniami Banacha, $D \subset X_1$ ograniczonym i wypukłym obszarem w X_1 i niech $\mathcal{N}$ będzie zbiorem normującym dla $(X_2, \|\cdot\|_2)$. Dla $a \in D$ i $x \in X \setminus \{0\}$ niech $D(a, x)$ będzie zbiorem postaci*

$$D(a, x) = \{z \in \mathbb{C} : a + zx \in D\}.$$

Wtedy odwzorowanie $f : D \to X_2$ jest odwzorowaniem holomorficznym w całym obszarze D wtedy i tylko wtedy gdy f jest odwzorowaniem lokalnie ograniczonym w D i dla każdego $a \in D$, każdego $x \in X \setminus \{0\}$ i każdego funkcjonału $l \in \mathcal{N}$ funkcja

$$l \circ f_{|D(a,x)} : D(a, x) \to \mathbb{C}$$

jest funkcją analityczną w $D(a, x)$.

Następujący fakt jest dobrze znany i pozwala wykorzystywać metody metrycznej teorii punktów stałych w badaniu zachowania się przekształceń holomorficznych (patrz np. [2], [46], [55], [58], [**?**], [63], [70], [71], [88], [89], [90], [126], [128]). Mianowicie, jeżeli D_1 i D_2 są ograniczonymi i wypukłymi obszarami odpowiednio w zespolonych przestrzeniach Banacha $(X_1, \|\cdot\|_1)$ i $(X_2, \|\cdot\|_2)$ oraz k_{D_1} i k_{D_2} są odległościami Kobayashiego odpowiednio w D_1 i D_2, to każde odwzorowanie holomorficzne $f : D_1 \to D_2$ jest nieoddalające względem tych odległości, tzn.

$$k_{D_1}(f(x), f(y)) \leqslant k_{D_2}(x, y)$$

dla wszystkich $x, y \in D_1$.

W szczególności, gdy D jest ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, to każde holomorficzne odwzorowanie $f : D \to D$ jest k_D-nieoddalające.

Oczywiście rodzina wszystkich odwzorowań f z D_1 w D_2, które są nieoddalające ze względu na odległości Kobayashiego, jest znacznie większa niż rodzina $H(D_1, D_2)$ i będziemy ją oznaczać przez $N(D_1, D_2)$ lub $N(D)$, gdy $D = D_1 = D_2$.

Okazuje się, że używając zbioru normującego można uzyskać wyniki o granicach ciągów punktowych i ciągów funkcyjnych.

Twierdzenie 1.6. *([73], patrz także [94] i [97]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha, $\mathcal{N}$ zbiorem normującym dla X i niech $D \subset X$ będzie ograniczonym i wypukłym obszarem, takim że jego domknięcie $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ w normie $\|\cdot\|$ jest zwarte w topologii $\sigma(X, \mathcal{N})$. Jeżeli $\{x_\beta\}_{\beta\in J}$ i $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$ są uogólnionymi ciągami w D i są one zbieżne w topologii $\sigma(X, \mathcal{N})$ odpowiednio do $x \in D$ i $y \in D$, to prawdziwa jest nierówność*

$$k_D(x, y) \leqslant \liminf_\beta k_D(x_\beta, y_\beta).$$

Twierdzenie 1.7. *([73]) Niech D_1, D_2 będą ograniczonymi i wypukłymi obszarami odpowiednio w zespolonych przestrzeniach Banacha $(X_1, \|\cdot\|_1)$ i $(X_2, \|\cdot\|_2)$, i niech $\mathcal{N}$ będzie zbiorem normującym dla $(X_2, \|\cdot\|_2)$. Jeżeli $\{f_\lambda\}_{\lambda\in J}$ jest ciągiem odwzorowań holomorficznych (odwzorowań nieoddalających względem odległości Kobayashiego w tych obszarach) $f_\lambda : D_1 \to D_2$, który jest punktowo zbieżny w topologii $\sigma(X_2, \mathcal{N})$ do odwzorowania $f : D_1 \to \overline{D_2}^{\|\cdot\|}$ i istnieje punkt $z_0 \in D_1$, taki że $w_0 = f(z_0) \in D_2$, to $f : D_1 \to D_2$ i odwzorowanie f jest holomorficzne (nieoddalające względem odległości Kobayashiego).*

Z odległością Kobayashiego związane jest pojęcie zespolonej geodezyjnej. Zespolona geodezyjna odgrywa kluczową rolę w dowodach ścisłej liniowej wypukłości kul w metryce Kobayashiego i w dowodach niepustości horosfer wprowadzonych w pracach zarówno moich jak i innych autorów.

Definicja 1.17. *([46], [47], [107], [108], [133], [147], [148], [149]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $\phi : \Delta \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym. Jeżeli dla każdych $\zeta_1, \zeta_2 \in \Delta$ mamy*

$$k_\Delta(\zeta_1, \zeta_2) = k_D(\phi(\zeta_1), \phi(\zeta_2)),$$

to odwzorowanie ϕ nazywamy zespoloną geodezyjną (k_D-geodezyjną) w D. Jeżeli $z, w \in D$, $z \neq w$ i istnieje zespolona geodezyjna $\phi : \Delta \to D$, taka że $w = \phi(0)$ i $z = \phi(\zeta)$, gdzie $0 < \zeta \in \mathbb{R} \cap \Delta$, to ϕ nazywamy znormalizowaną zespoloną geodezyjną łączącą punkt w z punktem z.

Okazuje się, że zespolona geodezyjna jest izometrycznym włożeniem otwartego koła (Δ, k_Δ) w (D, k_D)([46]) i dlatego powyższa definicja jest równoważna oryginalnej definicji podanej przez E. Vesentiniego ([146], [147], [148], [149]; patrz także na historyczne uwagi w [2]). Istotnie mamy

Twierdzenie 1.8. *([147], [148]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Każda zespolona geodezyjna $f : \Delta \to D$ jest izometrycznym włożeniem otwartego koła jednostkowego z odległością k_Δ w obszar D z odległością k_D. Dodatkowo mamy*

$$\lim_{r\to 1^-} k_D(f(0), f(re^{i\theta})) = \lim_{r\to 1^-} k_\Delta(0, re^{i\theta}) = +\infty$$

Dalej dostajemy

Twierdzenie 1.9. *([46], [107], [133]) Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest zespoloną przestrzenią Banacha, $\mathcal{N}$ zbiorem normującym dla X i $D \subset X$ jest ograniczonym i wypukłym obszarem, takim że jego domknięcie $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ w normie jest zwarte w topologii $\sigma(X, \mathcal{N})$, to przez każde dwa różne punkty w D przechodzi przynajmniej jedna znormalizowana zespolona k_D-geodezyjna.*

Aby podać warunki na jedyność geodezyjnej i na liniową ścisłą wypukłość k_D-kul w ograniczonym i ściśle wypukłym obszarze D (patrz rozdział 4) będziemy potrzebować definicji analitycznej własności Radona-Nikodyma (aRNP) przestrzeni Banacha. Zacznę od następującego oznaczenia. Symbol $H^\infty(\Delta, X)$ będzie oznaczać rodzinę wszystkich holomorficznych i ograniczonych odwzorowań jednostkowego koła otwartego Δ w zespoloną przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$. W zespolonej przestrzeni liniowej $H^\infty(\Delta, X)$ mamy normę supremum.

Definicja 1.18. *([25]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha. Jeżeli każde odwzorowanie $f \in H^\infty(\Delta, X)$ ma prawie wszędzie granice radialne, tzn. granica $\lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ istnieje dla prawie wszystkich $\theta \in ([0, 2\pi], \mu_1)$, gdzie μ_1 oznacza miarę Lebesgue'a, to mówimy, że X ma analityczną własność Radona-Nikodyma (aRNP).*

Można zauważyć, że gdy $(X, \|\cdot\|)$ ma aRNP, to prawie wszędzie określona funkcja brzegowa f^* (tzn.

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}))$$

należy do $L^\infty([0, 2\pi], \mu_1)$ i wyznacza f. Stąd gdy $f, g \in H^\infty(\Delta, X)$ i $f^* = g^*$ w $L^\infty([0, 2\pi], \mu_1)$, to $f = g$.

Twierdzenie 1.10. *([25], [61], [136]) Każda zespolona i refleksywna przestrzeń Banacha ma aRNP i każda ośrodkowa zespolona i sprzężona przestrzeń Banacha ma aRNP.*

Twierdzenie 1.11. *([46], [47]) Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest zespoloną przestrzenią Banacha, $(X, \|\cdot\|)$ ma aRNP i $D \subset X$ jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem, to przez każde dwa różne punkty w D przechodzi co najwyżej jedna znormalizowana zespolona k_D-geodezyjna.*

Ostatecznie dostajemy

Twierdzenie 1.12. *([46]) Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest zespoloną przestrzenią Banacha, $(X, \|\cdot\|)$ ma aRNP, $\mathcal{N}$ jest zbiorem normującym dla X i $D \subset X$ jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem, takim że jego domknięcie $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ w normie jest zwarte w topologii $\sigma(X, \mathcal{N})$, to przez każde dwa różne punkty w D przechodzi dokładnie jedna znormalizowana zespolona k_D-geodezyjna.*

Przypomnę teraz następującą definicję.

Definicja 1.19. *([51], [63]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli odwzorowanie $f : D \to D$ jest takie, że $f(D)$ leży ściśle wewnątrz D, to mówimy, że przekształcenie f odwzorowuje obszar D ściśle do wewnątrz D.*

W moich badaniach wielokrotnie używam ciągów aproksymacyjnych dla badanego odwzorowania. Ciągi te są tworzone przy pomocy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.13. *([51], [130], [129], [149]) Niech D będzie ograniczonym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech przekształcenie holomorficzne odwzorowanie $f : D \mapsto D$ odwzorowuje D ściśle do wewnątrz D. Wtedy f jest k_D-kontrakcją, tzn. istnieje $0 < c < 1$ takie, że*

$$k_D(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot k_D(x, y)$$

dla wszystkich $x, y \in D$.

Stąd, gdy D jest domkniętym, ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, to z twierdzenia 1.13 dostajemy, że odwzorowanie $g_{s,z} = (1-s)\,z + sI : D \to D$ jest k_D-kontrakcją dla każdego ustalonego $z \in D$ i dla $0 \leqslant s < 1$. Dlatego dla k_D-nieoddalającego odwzorowania $f : D \mapsto D$ przekształcenie $f_{s,z} = g_{s,z} \circ f = (1-s)\,z + sf : D \mapsto D$ jest k_D-kontrakcją i ma dokładnie jeden punkt stały, który oznaczamy przez $h_f(s, z)$. Ustalmy

$0 \leqslant s < 1$ i $x_0 \in D$. Wtedy odwzorowanie $h_f(s, \cdot) : D \mapsto D$ jest k_D-nieoddalające (holomorficzne, gdy f jest holomorficzne) jako punktowa granica ciągu funkcyjnego $\left\{ f^n_{s,\cdot}(x_0) \right\}$.

Jak wyjaśnię w rozdziale 2, w przypadku nieskończenie wymiarowej zespolonej przestrzeni Banacha bez dodatkowych założeń o odwzorowaniu k_D-nieooddalającym (holomorficznym) twierdzenie Wolffa-Denjoya nie jest prawdziwe. Takim dodatkowym naturalnym założeniem jest założenie, że odwzorowanie to jest kondensujące ze względu na miarę niezwartości Kuratowskiego.

Definicja 1.20. *([105]) Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów zbioru X. Funkcję $\alpha_d : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ daną wzorem*

$$\alpha_d(C) = \inf\{\varepsilon > 0 : \textit{istnieje skończona liczba zbiorów } C_1, .., C_m \in \mathcal{B}$$
$$\textit{o średnicy mniejszej niż } \varepsilon \textit{ i takich, że } C \subset \bigcup_{j=1}^{m} C_j\}$$

(dla $C \in \mathcal{B}$) nazywamy miarą niezwartości Kuratowskiego.

Miara niezwartości Kuratowskiego ma następujące własności.

Twierdzenie 1.14. *([5], [10], [12], [57]) Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę wszystkich niepustych i ograniczonych (w metryce d) podzbiorów zbioru X. Jeżeli α_d jest miarą niezwartości, to dla zbiorów $C, C_1 \in \mathcal{B}$ mamy*

(i) *$\alpha_d(C) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy domknięcie $\overline{C}^d$ zbioru C jest zbiorem zwartym;*
(ii) *$\alpha_d(C) = \alpha_d(\overline{C}^d)$;*
(iii) *gdy $C \subset C_1$, to $\alpha_d(C) \leqslant \alpha_d(C_1)$;*
(iv) *$\alpha_d(C \cup C_1) = \max\{\alpha_d(C), \alpha_d(C_1)\}$;*
(v) *$\alpha_d(C \cap C_1) \leqslant \min\{\alpha_d(C), \alpha_d(C_1)\}$;*
(vi) *jeżeli $\{C_n\}$ jest zstępującym ciągiem domkniętych zbiorów należących do $\mathcal{B}$ i jeżeli $\lim_{n\to\infty} \alpha_d(C_n) = 0$, to przecięcie $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ tych zbiorów jest niepuste i jest zbiorem zwartym.*

Gdy w miejsce przestrzeni metrycznej mamy przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$, to dodatkowo dostajemy

(vii) *$\alpha_{\|\cdot\|}(C + C_1) \leqslant \alpha_{\|\cdot\|}(C) + \alpha_{\|\cdot\|}(C_1)$;*
(viii) *$\alpha_{\|\cdot\|}(tC) = |t|\alpha_{\|\cdot\|}(C)$;*
(ix) *$\alpha_{\|\cdot\|}(convC) = \alpha_{\|\cdot\|}(C)$, gdzie $conv(C)$ oznacza otoczkę wypukłą zbioru C.*

Przejdźmy więc do ogólnej definicji przekształcenia kondensujące ze względu na miarę niezwartości Kuratowskiego.

Definicja 1.21. *([137]) Niech (X,d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i niech $\emptyset \neq D \subset X$. Mówimy, że odwzorowanie $f : D \to D$ jest kondensujące ze względu na Kuratowskiego miarę niezwartości α_d (α_d-kondensujące) gdy*

$$\alpha_d(f(C)) < \alpha_d(C)$$

dla każdego ograniczonego w (X,d) podzbioru $C \subset D$ z $\alpha_d(C) > 0$.

Następujące własności odwzorowań α_d-kondensujących są dobrze znane.

Lemat 1.6. *([75]) Niech D będzie niepustym i ograniczonym zbiorem w zupełnej przestrzeni metrycznej (X,d). Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem α_d-kondensującym i $\{x_n\}$ jest ciągiem w D, takim że $d\left(x_n, f\left(x_n\right)\right) \to 0$, to zbiór wszystkich elementów tego ciągu, który dla uproszczenia zapisu również oznaczamy przez $\{x_n\}$, jest zbiorem warunkowo zwartym w (X,d), tzn. $\alpha_d\left(\{x_n\}\right) = 0$.*

Jako wniosek z tego lematu dostajemy

Wniosek 1.1. *([75]) Niech D będzie wypukłym i ograniczonym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem k_D-nieoddalającym i $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensującym, C jest niepustym, k_D-domkniętym, wypukłym i f-niezmienniczym podzbiorem obszaru D, $\{s_n\}$ jest ciągiem, takim że $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$, $0 < s_n < 1$ i $\{z_n\}$ jest ciągiem elementów podzbioru C, to ciąg aproksymujący $\{x_n\}$ dany wzorem*

$$x_n = h_f\left(s_n, z_n\right) = f_{s_n,z_n}\left(x_n\right) = \left(1 - s_n\right) z_n + s_n f\left(x_n\right) \in C$$

dla $n = 1, 2, 3, ...$ zawiera podciąg zbieżny w normie $\|\cdot\|$.

Następnie mamy

Lemat 1.7. *([137]) Niech D będzie niepustym i ograniczonym zbiorem w zupełnej przestrzeni metrycznej (X,d). Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem α_d-kondensującym, to $\alpha_d(\{f^n(x)\}) = 0$ dla każdego $x \in D$, tzn. dla każdego $x \in D$ zbiór elementów ciągu iteracyjnego $\{f^n(x)\}$ jest zbiorem totalnie ograniczonym w (X,d).*

Jako wniosek dostajemy

Wniosek 1.2. *([75]) Niech D będzie wypukłym i ograniczonym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem k_D-nieoddalającym i $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensującym, to dla każdego $x \in D$ jego ciąg iteracyjny $\{f^n(x)\}$ zawiera podciąg zbieżny w normie $\|\cdot\|$.*

Z naszych dotychczasowych rozważań wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.15. *([75]) Niech (D, d) i (X, d_X) będą dwiema przestrzeniami metrycznymi, takimi że*

(i) *$D \subset X$ i zbiór D jest zbiorem d_X-ograniczonym i d_X-otwartym i obie przestrzenie metryczne (D, d) i (X, d_X) są zupełne;*
(ii) *dla każdego $x \in D$ i każdego ciągu $\{x_n\}$ w D, który jest zbieżny do $\xi \in X \backslash D$ w (X, d_X), mamy $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = \infty$;*
(iii) *topologie wyznaczone na D przez d i przez $d_{X|D\times D}$ są identyczne.*

Niech $f : D \to D$ będzie odwzorowaniem d-nieoddalającym i α_{d_X}-kondensującym. Wtedy

(a) *dla każdego $x \in D$, każdy podciąg $\{f^{n_i}(x)\}$ ciągu iteracyjnego $\{f^n(x)\}$ zawiera d_X-zbieżny podciąg;*
(b) *odwzorowanie f ma wszystkie d-ograniczone ciągi iteracyjne $\{f^n(x)\}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\tilde{x} \in D$ z d-ograniczonym podciągiem $\{f^{n_i}(\tilde{x})\}$ ciągu iteracyjnego $\{f^n(\tilde{x})\}$;*
(c) *jeżeli odwzorowanie f ma d-nieograniczoną orbitę, to dla każdego $x \in D$ każdy podciąg $\{f^{n_i}(x)\}$ ciągu iteracyjnego $\{f^n(x)\}$ zawiera podciąg $\{f^{n_{i_j}}(x)\}$, który jest d_X-zbieżny do $\xi \in X \backslash D$ przy $j \to \infty$.*

Ostatecznie korzystając z ostatniego twierdzenia i z lematu 1.5 otrzymujemy, w przypadku odwzorowań bez punktu stałego, następujące dwa bardzo ważne z naszego punktu widzenia twierdzenia.

Twierdzenie 1.16. *([75], [B 2], [B 6]) Niech D będzie ściśle wypukłym i ograniczonym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem k_D-nieoddalającym i $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensującym i nie ma punktu stałego, to dla każdego $x \in D$ zbiór punktów skupienia A ciągu iteracyjnego $\{f^n(x)\}$ ma następujące własności:*

(i) *$A \neq \emptyset$,*
(ii) *$A \subset \partial D$*
(iii) *A jest zbiorem niezależnym od wyboru $x \in D$.*

Twierdzenie 1.17. *([75], [B 2], [B 6]) Niech D będzie ściśle wypukłym i ograniczonym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli $f : D \to D$ jest odwzorowaniem k_D-nieoddalającym i $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensującym i nie ma punktu stałego, to dla każdego $z \in D$ zbiór punktów skupienia B, przy $s \to 1^-$, krzywej aproksymacyjnej*

$$\{h_f(s, z)\}_{0 \leqslant s < 1} = \{(1-s)z + sf(h_f(s, z))\}_{0 \leqslant s < 1},$$

tzn. zbiór

$$B = \{x \in \overline{D}^{\|\cdot\|} : \textit{istnieje ciąg } \{s_n\} \textit{ z } 0 \leqslant s_n \to 1^- \textit{ i } h_f(s_n, z) \to x\},$$

ma następujące własności:

(i) $B \neq \emptyset$,

(ii) $B \subset \partial D$

(iii) B *jest zbiorem niezależnym od wyboru* $z \in D$.

2. Problemy związane z twierdzeniem Wolffa-Denjoya - rys historyczny

W tym rozdziale omówię historię problemów, którymi się zajęłam w moim osiągnięciu naukowym i podam znane w chwili rozpoczęcia moich badań wyniki w tym zakresie.

W 1926 roku J. Wolff i A. Denjoy udowodnili następujące twierdzenie o zachowaniu się iteracji funkcji analitycznej.

Twierdzenie 2.1. *Niech Δ będzie jednostkowym kołem otwartym na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Gdy funkcja analityczna $f : \Delta \to \Delta$ nie jest ani funkcją identycznościową ani też nie jest automorfizmem z dokładnie jednym punktem stałym w $\overline{\Delta}$ (tzn. nie jest automorfizmem eliptycznym), to istnieje dokładnie jeden punkt $\xi \in \overline{\Delta}$, taki że ciąg iteracji $\{f^n\}$ funkcji f jest zbieżny do funkcji stałej równej ξ w topologii zwarto-otwartej, tzn. jednostajnie na każdym zwartym zbiorze $C \subset \Delta$.*

Twierdzenie 2.1 ma interesującą historię. Najpierw udowodnił je J. Wolff przy dodatkowym założeniu, że funkcja ma ciągłe rozszerzenie na brzeg i był to dowód nie wprost ([154], praca była zarekomendowana do publikacji 31 grudnia 1925 roku przez E. Borela). Następnie, w krótkim odstępie czasu, niezależnie od siebie i różnymi metodami, twierdzenie 2.1 udowodnili J. Wolff ([155], praca była zarekomendowana do publikacji 18 stycznia 1926 roku przez E. Borela) i A. Denjoy ([44], praca była zarekomendowana do publikacji 25 stycznia 1926 roku przez M. Goursata). Ostatecznie kilka miesięcy później J. Wolff ([156], praca była zarekomendowana do publikacji 7 kwietnia 1926 roku przez E. Borela) podał bardzo ładny dowód tego twierdzenia przy pomocy następującego lematu zwanego obecnie lematem Wolffa.

Lemat 2.1. *Niech Δ będzie jednostkowym kołem otwartym na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Jeżeli funkcja analityczna $f : \Delta \to \Delta$ nie ma punktu stałego, to istnieje jedyny punkt ξ na brzegu koła, taki że*

$$\frac{|\xi - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{|\xi - z|^2}{1 - |z|^2}$$

dla każdego $z \in \Delta$, przy czym równość ma miejsce wtedy tylko wtedy, gdy f jest parabolicznym automorfizmem z punktem stałym ξ.

Zauważmy, że w swoim ostatnim dowodzie twierdzenia 2.1 J.Wolff wykorzystał wprowadzony przez siebie niezmienniczy horocykl $\mathcal{D}(\xi, R)$ z centrum w punkcie ξ i promieniu $R > 0$

$$\mathcal{D}(\xi, R) = \{z \in \Delta : \frac{|\xi - z|^2}{1 - |z|^2} < R\},$$

który jest otwartym kołem o promieniu $\frac{R}{R+1}$ i środku $\frac{1}{1+R}\xi$, tzn.

$$\mathcal{D}(\xi, R) = \{z \in \Delta : |z - \frac{1}{1+R}\xi| < \frac{R}{R+1}\}$$

i koło to jest styczne do okręgu jednostkowego $\partial\Delta$ w punkcie ξ.

Warto też odnotować fakt, że w 1983 roku E. Vesentini ([150]) opublikował dowód twierdzenia Wolffa-Denjoya, który jest inny od tych wspomnianych już przeze mnie (patrz też [14] i [30]).

Mnie będzie interesować tylko ta część twierdzenia Wolffa-Denjoya, w której funkcja nie ma punktu stałego, tzn. następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.2. *Niech Δ będzie jednostkowym kołem otwartym na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Gdy funkcja analityczna $f : \Delta \to \Delta$ nie ma punktu stałego, to istnieje ξ na brzegu koła, takie że ciąg iteracji $\{f^n\}$ funkcji f jest zbieżny do funkcji stałej równej ξ w topologii zwarto-otwartej, tzn. jednostajnie na każdym zwartym zbiorze $C \subset \Delta$.*

Moje zainteresowanie się tylko taką postacią twierdzenia wynika z faktu, że E. Vesentini oraz V. Khatskevich i D. Shoikhet podali w swoich pracach (odpowiednio w [150], [151], [84] i [85], patrz też [126]) warunki konieczne i dostateczne na zbieżność ciągu iteracyjnego $\{f^n\}$ do punktu stałego odwzorowania f. Warunki te albo są podane w terminach teorii spektralnej względem pochodnej $Df(\tilde{x})$ w punkcie stałym $\tilde{x} \in D$ odwzorowania f albo są to warunki geometryczne.

Będę więc zajmować się tylko następującymi problemami związanymi z twierdzeniem 2.2:

1) iteracje odwzorowań holomorficznych (k_D-nieoddalających) bez punktów stałych przekształcających otwartą kulę jednostkową (w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$) w siebie i ich zbieżność,

1') iteracje funkcji holomorficznych (k_D-nieoddalających) bez punktów stałych przekształcających ograniczony i silnie wypukły obszar $D \subset \mathbb{C}^k$ (patrz definicja 2.5) w siebie i ich zbieżność,

2) orbity półgrup $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ złożonych z holomorficznych (k_D-nieoddalających) odwzorowań i ich zbieżność,

3) graniczne zachowanie się rodziny holomorficznych (k_D-nieoddalających) retraktów z pustym przecięciem.

Rozdzieliłam tutaj problem zachowania się itearcji funkcji na dwie części (1 i 1'), ponieważ w chwili rozpoczęcia moich badań wyniki otrzymane dla otwartej kuli jednostkowej były zdecydowanie silniejsze od tych otrzymanych dla ograniczonych i wypukłych obszarów.

1) Iteracje funkcji holomorficznych (k_D-nieoddalających) przekształcających otwartą kulę jednostkową (w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$) w siebie i ich zbieżność

Pierwszy tego typu wynik M. Hervé udowodnił w 1963 roku.

Twierdzenie 2.3. *([66]) Niech B będzie jednostkową kulą otwartą w $\mathbb{C}^k$ ze standardową normą. Jeżeli funkcja holomorficzna $f : B \to B$ nie ma punktu stałego, to istnieje punkt ξ na brzegu kuli ∂B, taki że ciąg iteracji $\{f^n\}$ funkcji f jest zbieżny do funkcji stałej równej ξ w topologii zwarto-otwartej, tzn. jednostajnie na każdym zwartym zbiorze $C \subset B$.*

Twierdzenie to było ponownie odkryte w 1983 roku przez B. D. MacCluer [109] i przez Y. Kubotę [93]. Okazuje się jednak, że twierdzenie Wolffa-Denjoya nie jest prawdziwe w zespolonej przestrzeni Banacha o wymiarze nieskończonym. W 1985 roku, opierając się na przykładzie M. Edelsteina ([52]), A. Stachura podał przykład holomorficznego przekształcenia f otwartej kuli Hilberta B_{l^2} (w zespolonej przestrzeni Hilberta l^2) w siebie, które nie ma punktu stałego i

$$\limsup_{n\to\infty} \|f^n(0)\| = 1 > 0 = \liminf_{n\to\infty} \|f^n(0)\|$$

([143]). Okazuje się jednak, że dodając dodatkowe założenie o odwzorowaniu f można udowodnić twierdzenie Wolffa-Denjoya również w nieskończenie wymiarowej zespolonej przestrzeni Banacha. Pierwszym takim wynikiem było następujące twierdzenie udowodnione przez C.-H. Chu i P. Mellon w 1997 roku.

Twierdzenie 2.4. *([36]) Niech B_H będzie jednostkową kulą otwartą w zespolonej przestrzeni Hilberta H, czyli tzw. kulą Hilberta. Jeżeli funkcja holomorficzna $f : B_H \to B_H$ jest zwartym odwzorowaniem bez punktu stałego, to istnieje punkt ξ na brzegu kuli, taki że ciąg iteracji $\{f^n\}$ funkcji f jest zbieżny do funkcji stałej równej ξ w topologii zwarto-otwartej, tzn. jednostajnie na każdym zwartym zbiorze $C \subset B_H$.*

W 1999 roku twierdzenie to było uogólnione przez J. Kapelusznego, T. Kuczumowa i S. Reicha do jednostkowej kuli otwartej B_X o środku w 0 w ściśle wypukłych przestrzeniach Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ([74]).

Twierdzenie 2.5. *([74]) Niech B_X będzie jednostkową kulą otwartą w ściśle wypukłej zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli odwzorowanie holomorficzne (k_{B_X}-nieoddalające) $f : B_X \to B_X$ jest zwartym odwzorowaniem bez punktu stałego, to istnieje punkt ξ na brzegu kuli, taki że ciąg iteracji $\{f^n\}$ odwzorowania f jest zbieżny do odwzorowania stałego równego ξ w topologii zwarto-otwartej, tzn. jednostajnie na każdym zwartym zbiorze $C \subset B_X$.*

Omówię teraz ideę dowodu tego twierdzenia, ponieważ będę ją stosować w dowodach 3 twierdzeń występujących w moim osiągnięciu naukowym. Okazało się, że w dowodzie twierdzenia 2.5, z uwagi na brak odpowiedniej gładkości brzegu kuli, nie można było bezpośrednio zastosować horosfer $E_{\tilde{x}}(\xi, R)$ i $F_{\tilde{x}}(\xi, R)$ użytych przez M. Abate dla ograniczonych i silnie wypukłych obszarów w $\mathbb{C}^k$ (defincje tych horosfer podam w części 1')).Dlatego w [74] wprowadzono niezmiennicze ciągowe horosfery $G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ w ośrodkowych zespolonych przestrzeniach Banacha zamiast horosfer $E_{\tilde{x}}(\xi, R)$ i $F_{\tilde{x}}(\xi, R)$. Horosfery $G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ zdefiniowano następująco.

Definicja 2.1. *([74]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w ośrodkowej zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, $\tilde{x} \in D$, $\xi \in \partial D$ i niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem w D z $\lim x_n = \xi$. Załóżmy, że dla każdych $x, y \in D$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty} [k_D(y, x_n) - k_D(x, x_n)]$. Wtedy horosferę $G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ w D określamy następująco*

$$G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\}) = \left\{y \in D : \lim_{n\to\infty} [k_D(y, x_n) - k_D(\tilde{x}, x_n)] < \frac{1}{2}\log R\right\}.$$

Podane w definicji 2.1 założenie istnienia granic

$$\lim_{n\to\infty} [k_D(y, x_n) - k_D(x, x_n)]$$

nie jest zbyt restrykcyjne, ponieważ interesują nas tylko ciągi aproksymujące dla f z granicą równą ξ, które możemy odpowiednio zastąpić ich podciągami oraz mamy założenie ośrodkowości zespolonej przestrzeni Banacha i prawdziwe są nierówności

$$|k_D(y, x_n) - k_D(x, x_n)| \leqslant k_D(y, x)$$

dla wszystkich $x, y \in D$,.

Uwaga 2.1. *Od tej pory będziemy więc zawsze zakładać o ciągu $\{x_n\}$ występującym w $G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$, że wszystkie granice*

$$\lim_{n\to\infty} [k_D(y, x_n) - k_D(x, x_n)], \qquad x, y \in D,$$

istnieją.

Podstawowe własności horosfer $G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ są podane w następnym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.6. *([74], [75]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w ośrodkowej zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Niech $\tilde{x} \in D$, $\xi \in \partial D$, $R > 0$, $x_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, i $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Wtedy horosfery $G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ mają następujące własności:*

(i) *$E_{\tilde{x}}(\xi, R) \subset G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\}) \subset F_{\tilde{x}}(\xi, R)$ dla każdych $x \in D$, $\xi \in \partial D$ i $R > 0$;*
(ii) *jeżeli $G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ jest zbiorem niepustym, to jest zbiorem wypukłym;*

(iii) *dla każdych* $0 < R_1 < R_2$ *mamy*

$$\left[D \cap \overline{G\left(\tilde{x}, \xi, R_1, \{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|}\right] \subset G\left(\tilde{x}, \xi, R_2, \{x_n\}\right);$$

(iv) *dla każdego* $R > 1$ *mamy* $B_{k_D}\left(\tilde{x}, \frac{1}{2}\log R\right) \subset G\left(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\}\right)$;

(v) $B_{k_D}\left(\tilde{x}, -\frac{1}{2}\log R\right) \cap G\left(x, \xi, R, \{x_n\}\right) = \emptyset$ *dla każdego* $0 < R < 1$;

(vi) $\bigcup\limits_{R>0} G\left(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\}\right) = D$ *i* $\bigcap\limits_{R>0} G\left(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\}\right) = \emptyset$;

Zauważmy tutaj, że w przypadku otwartej kuli jednostkowej B_X w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ używając zespolonych geodezyjnych łączących 0 z dowolnym innym punktem $z \in B_X$ (jest to po prostu przecięcie kuli B_X z płaszczyzną zespoloną przechodzącą przez 0 i z), ortogonalnych projekcji na te geodezyjne i wzoru

$$k_{B_X}(0, z) = \operatorname{arg\,tgh} \|z\|$$

można stosunkowo łatwo udowodnić następujący lemat.

Lemat 2.2. *([74]) Dla każdego* $\xi \in \partial B_X$ *i każdego* $0 < t < 1$ *mamy*

$$\lim_{w \to \xi} [k_{B_X}(t\xi, w) - k_{B_X}(0, w)] = -k_{B_X}(0, t\xi).$$

Z niego dostajemy natychmiast dwa wnioski.

Wniosek 2.1. *([74]) Niech* B_X *będzie otwartą kulą jednostkową w ośrodkowej zespolonej przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$, $\tilde{x} \in B_X$, $\xi \in \partial B_X$ *i niech* $\{x_n\}$ *będzie ciągiem w* B_X *z* $\lim x_n = \xi$. *Załóżmy, że dla każdych* $x, y \in B_X$ *istnieje granica* $\lim_{n \to \infty} \left[k_D\left(y, x_n\right) - k_D\left(x, x_n\right)\right]$. *Wtedy każda horosfera* $G\left(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\}\right)$ *jest niepustym zbiorem.*

Wniosek 2.2. *([74]) Przy założeniach z wniosku 2.1 i przy dodatkowym założeniu ścisłej wypukłości zespolonej przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$ *punkt* ξ *jest nie tylko granicą ciągu* $\{x_n\}$, *ale jednocześnie jedynym punktem przecięcia* $\bigcap_{R>0} \overline{G\left(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|}$ *domknięć w normie wszystkich ciągowych horosfer.*

Biorąc teraz odpowiedni ciąg aproksymacyjny dla odwzorowania f otrzymujemy

Twierdzenie 2.7. *[74] Niech* B_X *będzie jednostkową kulą otwartą w ośrodkowej i ściśle wypukłej zespolonej przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$. *Jeżeli odwzorowanie holomorficzne* (k_D*-nieoddalające)* $f : B_X \to B_X$ *jest zwartym odwzorowaniem bez punktu stałego,*

$$\{x_n\} = \{(1 - t_n)z_n + t_n f(x_n)\}$$

jest zbieżnym ciągiem aproksymacyjnym dla odwzorowania f, gdzie $z_n \in B_X$, $0 < t_n < 1$ dla $n = 1, 2, ...$, $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n \in \partial B_X$ i dla każdych $x, y \in D$ istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \left[k_D(y, x_n) - k_D(x, x_n)\right],$$

to każda horosfera $G(0, \xi, R, \{x_n\})$ w B_X jest niepustym zbiorem i

$$f(G(0, \xi, R, \{x_n\})) \subset G(0, \xi, R, \{x_n\}).$$

Stąd i z wniosku 2.2 natychmiast dostajemy twierdzenie 2.5.

Zauważmy dalej, że gdy dla k_{B_X}-nieoddalającego odwzorowania $f : B_X \to B_X$ w kuli otwartej B_X w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ prawdziwe jest twierdzenie Wolffa-Denjoya, to dla każdego $x \in D$ ciąg jego iteracji $\{f^n(x)\}$ jest warunkowo zwarty w $(X, \|\cdot\|)$ i dlatego $\alpha_{\|\cdot\|}(\{f^n(x) : n = 1, 2, 3, ...\}) = 0$, gdzie $\alpha_{\|\cdot\|}$ jest miarą niezwartości Kuratowskiego. Jak już wspomniałam w rozdziale 1 (lemat 1.7) B. N. Sadowskii udowodnił, że dla odwzorowania, z $D \subset X$ w D w przestrzeni metrycznej (X, d), będącego α_d-kontrakcją mamy $\alpha_d(\{f^n(x)\}) = 0$ dla każdego $x \in D$. Stąd dodatkowe założenie, że holomorficzne (k_D-nieoddalające) odwzorowanie $f : D \to D$ jest $\alpha_{\|\cdot\|}$-kontrakcją, okazuje się naturalne w przypadku badania iteracji odwzorowania w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Dalej przy tym założeniu możemy też skorzystać z twierdzenia A. Całki (twierdzenie 1.2), które wyzwala nas od żmudnego dowodu rozbieżności do brzegu ciągu iteracyjnego. Następnie (patrz wniosek 1.1) dla ograniczonego i wypukłego obszaru D w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i holomorficznej (k_D-nieoddalającej) $\alpha_{\|\cdot\|}$-kontrakcji $f : D \to D$ każdy ciąg aproksymujący $\{x_n\}$ dany wzorem

$$x_n = h_f(s_n, z_n) = f_{s_n, z_n}(x_n) = (1 - s_n) z_n + s_n f(x_n)$$

dla $n = 1, 2, 3, ...$ (gdzie $z_n \in D$, $0 < s_n < 1$ dla $n = 1, 2, 3, ...$ i $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$) zawiera podciąg zbieżny w normie $\|\cdot\|$.

Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Przypomnę teraz, że w [75] (patrz też [B4]) J. Kapeluszny, T. Kuczumow i S. Reich wprowadzili horosferę $H(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$.

Definicja 2.2. *([75]) Niech $\{n_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ będzie takim podciągiem uogólnionym ciągu $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$, który jest maksymalnym ciągiem uogólnionym (patrz lemat 1.1). Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w ośrodkowej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, $\tilde{x} \in D$, $\xi \in \partial D$ i niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem w D z $\lim x_n = \xi$. Wtedy horosferę*

$H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})$ w D określamy następująco

$$H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})=\left\{y\in D:\lim_{\gamma\in\Gamma}\left[k_D\left(y,x_{n_\gamma}\right)-k_D\left(\tilde{x},x_{n_\gamma}\right)\right]<\frac{1}{2}\log R\right\}.$$

Horosfera $H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})$ ma takie same własności jak horosfera $G(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})$.

Twierdzenie 2.8. *([75]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X,\|\cdot\|)$. Niech $\tilde{x}\in D$, $\xi\in\partial D$, $R>0$, $x_n\in D$, $n=1,2,...$ i $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$. Wtedy horosfery $H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})$ mają następujące własności:*

(i) $E_{\tilde{x}}(\xi,R)\subset H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})\subset F_{\tilde{x}}(\xi,R)$;

(ii) *Jeżeli $H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})$ jest zbiorem niepustym, to jest zbiorem wypukłym;*

(iii) *dla każdych $0<R_1<R_2$ mamy*

$$\left[D\cap\overline{H(\tilde{x},\xi,R_1,\{x_n\})}^{\|\cdot\|}\right]\subset H(x,\xi,R_2,\{x_n\});$$

(iv) *dla każdego $R>1$ mamy $B_{k_D}\left(x,\frac{1}{2}\log R\right)\subset H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})$;*

(v) *dla każdego $0<R<1$ mamy $B_{k_D}\left(\tilde{x},-\frac{1}{2}\log R\right)\cap H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})=\emptyset$;*

(vi) $\bigcup\limits_{R>0}H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})=D$ *i* $\bigcap\limits_{R>0}H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})=\emptyset$;

Lemat 2.3. *([75]) Niech B_X będzie otwartą kulą jednostkową w zespolonej przestrzeni Banacha $(X,\|\cdot\|)$, $\tilde{x}\in B_X$, $\xi\in\partial B_X$ i niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem w B_X z $\lim x_n=\xi$. Wtedy każda horosfera $H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})$ jest niepustym zbiorem.*

Wniosek 2.3. *([75]) Przy założeniach z ostatniego lematu i przy dodatkowym założeniu ścisłej wypukłości zespolonej przestrzeni Banacha $(X,\|\cdot\|)$ punkt ξ jest nie tylko granicą ciągu $\{x_n\}$, ale jednocześnie jedynym punktem przecięcia domknięć w normie wszystkich ciągowych horosfer $\bigcap_{R>0}\overline{H(\tilde{x},\xi,R,\{x_n\})}^{\|\cdot\|}$.*

Na koniec otrzymujemy ostateczną wersję twierdzenia Wolffa-Denjoya dla kuli jednostkowej.

Twierdzenie 2.9. *([75]) Niech B_X będzie jednostkową kulą otwartą w ściśle wypukłej zespolonej przestrzeni Banacha $(X,\|\cdot\|)$. Jeżeli odwzorowanie holomorficzne (k_D-nieoddalające) $f:B_X\to B_X$ jest $\alpha_{\|\cdot\|}$−kontrakcją bez punktu stałego, to istnieje punkt ξ na brzegu kuli taki, że ciąg iteracji $\{f^n\}$ odwzorowania f jest zbieżny do funkcji stałej równej ξ w topologii zwarto-otwartej, tzn. jednostajnie na każdym zwartym zbiorze $C\subset B_X$.*

Powróćmy na chwilę do kuli otwartej B_H w przestrzeni Hilberta H. Tutaj mamy trochę więcej informacji o odwzorowaniach bez punktów stałych. Najpierw wprowadzamy następującą definicję.

Definicja 2.3. *([126]) Niech $\mathcal{G}$ będzie podrodziną rodziny wszystkich k_{B_H}-nieoddalających odwzorowań jednostkowej kuli otwartej B_H w siebie. Mówimy, że rodzina $\mathcal{G}$ ma własność Wolffa-Denjoya, jeśli dla każdego odwzorowania $f \in \mathcal{G}$ bez punktów stałych w B_H istnieje punkt $\xi \in \partial B_H$, taki że ciąg iteracji $\{f^n\}$ odwzorowania f jest zbieżny do ξ i to jednostajnie na każdym zbiorze zwartym w B_H.*

Twierdzenie 2.10. *Niech B_H będzie jednostkową kulą otwartą w przestrzeni Hilberta H. Dla kuli B_H znamy następujące klasy odwzorowań mające własność Wolffa-Denjoya:*

i) ([75]; patrz także [B3], [B5], [B6], [36], [74], [92] i [99]) klasa $\mathcal{G}_1$ składająca się ze wszyskich α_H-kontrakcji;

ii) ([58], [59], [124] i [125]) klasa $\mathcal{G}_2$ złożona ze wszystkich mocno ($\equiv$ firmly) k_{B_H}-nieoddalających odwzorowań pierwszego rodzaju;

iii) ([58], [59], [124] i [125]) klasa $\mathcal{G}_3$ złożona ze wszystkich mocno ($\equiv$ firmly) k_{B_H}-nieoddalających odwzorowań drugiego rodzaju;

iv) ([123]) klasa $\mathcal{G}_4$ składająca się ze wszystkich uśrednionych odwzorowań pierwszego rodzaju, tzn. $f = (1-s)I \oplus sg$, gdzie g jest k_{B_H}-nieoddalającym odwzorowaniem, $s \in (0,1)$ i dla $x, y \in B_H$ symbol $(1-s)x \oplus sy$ oznacza jedyny taki punkt $z \in B_H$ spełniający równości: $k_{B_H}(x,z) = sk_{B_H}(x,y)$ i $k_{B_H}(z,y) = (1-s)k_{B_H}(x,y)$;

v) ([123]) klasa $\mathcal{G}_5$ składająca się ze wszystkich uśrednionych odwzorowań drugiego rodzaju, tzn. $f = (1-s)I + sg$, gdzie g jest k_{B_H}-nieoddalającym odwzorowaniem i $s \in (0,1)$;

vi) ([64], [98] i [102]) klasa $\mathcal{G}_6$ do której należą wszystkie odwzorowania f z $\overline{B_H}^{\|\cdot\|}$ na $\overline{B_H}^{\|\cdot\|}$, które są k_{B_H}-izometriami w B_H, mają dokładnie dwa punkty stałe w $\overline{B_H}^{\|\cdot\|}$ i oba te punkty leżą na brzegu ∂B_H kuli otwartej B_H.

1') Iteracje funkcji holomorficznych (k_D-nieoddalających) przekształcających ograniczony i silnie wypukły obszar $D \subset \mathbb{C}^k$ w siebie i ich zbieżność

Zauważmy najpierw, że po zastosowaniu twierdzeń Riemanna i Osgooda-Taylora-Carathéodory'ego ([26]) otrzymujemy z twierdzenia 2.2 następują wersję twierdzenia Wolffa-Denjoya na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$.

Twierdzenie 2.11. *Niech D będzie obszarem Jordana na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Gdy funkcja analityczna $f : D \to D$ nie ma punktu stałego, to istnieje ξ na brzegu ∂D obszaru D, takie że ciąg iteracji*

$\{f^n\}$ funkcji f jest zbieżny do funkcji stałej równej ξ w topologii zwarto-otwartej, tzn. jednostajnie na każdym zwartym zbiorze $C \subset D$.

Uwaga 2.2. *W 1941 roku M. H. Heins ([65]) uogólnił powyższe twierdzenie do ograniczonych i m-spójnych obszarów w $\mathbb{C}$ ograniczonych przez krzywe Jordana.*

Następnie jako wniosek z twierdzenia 2.11 dostajemy

Twierdzenie 2.12. *Niech D będzie obszarem ograniczonym i wypukłym na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Gdy funkcja analityczna $f : D \to D$ nie ma punktu stałego, to istnieje ξ na brzegu ∂D obszaru D, takie że ciąg iteracji $\{f^n\}$ funkcji f jest zbieżny do funkcji stałej równej ξ w topologii zwarto-otwartej, tzn. jednostajnie na każdym zwartym zbiorze.*

Ostatnie twierdzenie nie jest prawdziwe w $\mathbb{C}^k$ dla $k \geqslant 2$ o czym świadczy następujący przykład.

Przykład 2.1. *([36]) W $\Delta \times \Delta \subset \mathbb{C}^2$ wystarczy wziąć następującą funkcję $f : \Delta \times \Delta \to \Delta \times \Delta$*

$$f(z^1, z^2) := (\frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2})z^1, iz^2)$$

dla $(z^1, z^2) \in \Delta \times \Delta$.

Musimy więc tak jak w przypadku otwartej kuli dodać założenie na brzeg obszaru i będziemy rozważać obszary tylko leżące w $\mathbb{C}^k$. Dlatego teraz przypomnę następującą definicję silnej wypukłości obszaru. Zacznę od wprowadzenia funkcji definiującej dla obszaru.

Definicja 2.4. *([2], [91]) Niech $D \subset \mathbb{R}^k$ będzie ograniczonym obszarem i niech $0 < m \in \mathbb{N} \cup \infty$. Jeżeli istnieje funkcja $\rho : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ klasy C^m, taka że*

(i) $D = \{x \in \mathbb{R}^k : \rho(x) < 0\}$
(ii) $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^k : \rho(x) = 0\}$
(iii) grad $\rho(\mathrm{x}) \neq 0$ *w każdym punkcie $x \in \partial D$,*

to mówimy, że obszar D jest obszarem o brzegu klasy C^m (lub, że jest obszarem klasy C^m), a funkcję ρ nazywamy funkcją definiującą dla obszaru D.

Jeżeli $x \in \partial D$, to zbiór

$$T_x(\partial D) = \{w = (w_1, ..., w_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(x) w_j = 0\}$$

nazywamy płaszczyzną styczną do brzegu ∂ w punkcie x.

Dalej mamy

Definicja 2.5. *([2], [91], [107]) Jeżeli ograniczony obszar $D \subset \mathbb{R}^k$ jest obszarem o brzegu klasy C^2 i $\rho : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest funkcją definiującą dla D, taką że w punkcie $x \in \partial D$ mamy*

$$H_{\rho,x}(w,w) = \sum_{j,j'=1}^{k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_{j'}}(x) w_j w_{j'} > 0$$

dla wszystkich $0 \neq w = (w_1, ..., w_k) \in T_x(\partial D)$ (tzn. rzeczywisty Hessian $H_{\rho,x}$ jest dodatnio określony na $T_x(\partial D)$), to obszar D nazywamy silnie wypukłym w punkcie x. Jeżeli dla pewnej funkcji definiującej ρ dla D Hessian $H_{\rho,x}$ jest dodatnio określony na $T_x(\partial D)$ w każdym punkcie $x \in \partial D$, to obszar D nazywamy silnie wypukłym.

Ograniczony i silnie wypukły obszar $D \subset \mathbb{R}^k$ o brzegu klasy C^2 jest zawsze obszarem ściśle wypukłym ([2]).

Przypominam, że głównym narzędziem w dowodzie klasycznego twierdzenia Wolffa-Denjoya jest tzw. horocykl $\mathcal{D}(\xi, R)$ czyli koło wewnętrznie styczne do Δ w punkcie $\xi \in \partial\Delta$ zadane wzorem

$$\mathcal{D}(\xi, R) = \left\{ z \in \Delta : \frac{|1 - z\bar{\xi}|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}.$$

Okazuje się, że można opisać ten horocykl przy pomocy odległości Poincaré'ego. Istotnie w 1978 roku P. Yang udowodnił następujący wzór

$$\lim_{\Delta \ni w \to \xi} \left[k_\Delta(z,w) - k_\Delta(0,w) \right] = \frac{1}{2} \log \frac{\left|1 - z\bar{\xi}\right|^2}{1 - |z|^2},$$

gdzie $z \in \Delta$ i $\xi \in \partial\Delta$ ([158]). Dlatego mamy równoważną definicję horocyklu $D(\xi, R)$ w Δ

$$\mathcal{D}(\xi, R) = \left\{ z \in \Delta : \frac{|1 - \bar{\xi} z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\} =$$

$$= \left\{ z \in \Delta : \lim_{\Delta \ni w \to \xi} \left[k_\Delta(z,w) - k_\Delta(0,w) \right] < \frac{1}{2} \log R \right\}$$

([158]). Dalej w dowodzie twierdzenia Wolffa-Denjoya dla jednostkowej kuli B_k w $\mathbb{C}^k$ ze standardową normą, jak i dla kuli Hilberta B_H w przestrzeni Hilberta H, rolę horocyklu odgrywa elipsoida

$$E(\xi, R) = \left\{ x \in B_n : \frac{|1 - (x,\xi)|^2}{1 - \|x\|^2} < R \right\}, \qquad R > 0,$$

gdzie $(\cdot,\cdot)$ jest iloczynem skalarnym, a $\|\cdot\|$ normą w $\mathbb{C}^k$ i odpowiednio

$$E(\xi, R) = \left\{ x \in B_H : \frac{|1 - (x,\xi)|^2}{1 - \|x\|^2} < R \right\}, \qquad R > 0,$$

gdzie $(\cdot,\cdot)$ jest iloczynem skalarnym, a $\|\cdot\|$ normą ([35], [36], [59], [60], [66], [93], [103], [104], [109], [135]). Mając ten wzór możemy pokazać, że elipsoida może być równoważnie zadana wzorem

$$E(\xi,R)=\left\{z\in B_H : \lim_{B_H\ni w\to\xi}\left[k_{B_H}(z,w)-k_{B_H}(0,w)\right]<\frac{1}{2}\log R\right\},$$

gdzie $\xi\in\partial B_H$ i $R>0$. Podobnie jest w kuli B_k ([158]).

To pozwoliło M. Abate wprowadzić następujące dwa rodzaje horosfer w obszarze wypukłm i ograniczonym D w $\mathbb{C}^k$.

Definicja 2.6. *([1], patrz także [2]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$. Dla $x\in D$, $\xi\in\partial D$, $R>0$, mała horosfera $E_x(\xi,R)$ i duża horosfera $F_x(\xi,R)$ o środku w x i promieniu R są określone wzorami*

$$E_x(\xi,R)=\left\{y\in D : \limsup_{w\to\xi}\left[k_D(y,w)-k_D(x,w)\right]<\frac{1}{2}\log R\right\}$$

i

$$F_x(\xi,R)=\left\{y\in D : \liminf_{w\to\xi}\left[k_D(y,w)-k_D(x,w)\right]<\frac{1}{2}\log R\right\}.$$

Używając silnej wypukłości M. Abate roku udowodnił w 1989 roku następujące twierdzenie o horosferach.

Twierdzenie 2.13. *([1], [2]) Niech D będzie ograniczonym i silnie wypukłym obszarem z brzegiem klasy C^2 w $\mathbb{C}^k$. Wtedy dla każdego $x\in D$, każdego $\xi\in\partial D$ i każdego $R>0$ mamy*

(i) $\emptyset\neq\overline{E_x(\xi,R)}^{\|\cdot\|}\subset\overline{F_x(\xi,R)}^{\|\cdot\|}$;
(ii) $\overline{E_x(\xi,R)}^{\|\cdot\|}\cap\partial D=\{\xi\}$;
(iii) $\overline{F_x(\xi,R)}^{\|\cdot\|}\cap\partial D=\{\xi\}$.

Następnie biorąc odpowiedni ciąg aproksymacyjny $\{x_n\}$ dla holomorficznego odwzorowania M. Abate udowodnił

Twierdzenie 2.14. *([1], [2]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$. Jeżeli odwzorowanie $f:D\to D$ jest holomorficzne i nie ma punktów stałych, to istnieje $\xi\in\partial D$, takie że*

$$f^n(E_x(\xi,R))\subset E_x(\xi,R)$$

dla każdego $x\in D$, $R>0$ i $n\in\mathbb{N}$.

Powyższe fakty dają nam natychmiast

Twierdzenie 2.15. *([1], [2]) Jeżeli $D\subset\mathbb{C}^k$ jest ograniczonym i silnie wypukłym obszarem mającym brzeg klasy C^2 i holomorficzne odwzorowanie $f:D\to D$ nie ma punktu stałego, to istnieje $\xi\in\partial D$, takie* *że ciąg iteracji $\{f^n\}$ odwzorowania f jest zbieżny w topologii zwarto-otwartej do odwzorowania stałego przyjmującego wartość ξ.*

W 1990 stosując dodatkowo twierdzenie Całki (tzn. twierdzenie 1.2) T. Kuczumow i A. Stachura udowodnili, że twierdzenie 2.15 jest również prawdziwe dla k_D-nieoddalających odwzorowań.

Twierdzenie 2.16. *[103] Jeżeli $D \subset \mathbb{C}^k$ jest ograniczonym i silnie wypukłym obszarem mającym brzeg klasy C^2 i k_D-nieoddalające odwzorowanie $f : D \to D$ nie ma punktu stałego, to istnieje $\xi \in \partial D$, takie że ciąg iteracji $\{f^n\}$ odwzorowania f jest zbieżny w topologii zwarto-otwartej do odwzorowania stałego przyjmującego wartość ξ.*

Z naszych dotychczasowych rozważań w punktach 1) i 1') wynika, że w znanych dotychczas dowodach uogólnień twierdzenia Wolffa-Denjoya kluczową rzeczą było pokazanie, że każda odpowiednio wybranego rodzaju horosfera jest niepustym zbiorem. Niestety w chwili rozpoczęcia moich badań fakt ten nie był znany nawet dla ograniczonych i ściśle wypukłych obszarów w $\mathbb{C}^k$.

2) Orbity półgrup $S = \{f_t\}_{t \geqslant 0}$ złożonych z holomorficznych (k_D-nieoddalających) odwzorowań i ich zbieżność

Definicja 2.7. *Jeżeli D jest ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, dla każdego $t \geqslant 0$ odwzorowanie f_t jest odwzorowaniem holomorficznym (k_D-nieoddalającym) obszaru D w siebie, $f_0 = I$ i $(f_t \circ f_s)(x) = f_{t+s}(x)$ dla wszystkich $s, t \geqslant 0$, to mówimy, że $S = \{f_t\}_{t \geqslant 0}$ jest półgrupą odwzorowań holomorficznych (k_d-nieoddalających) w D.*

Łatwo stwierdzić, że prawostronna ciągłość takiej półgrupy S w 0 (tzn. dla każdego $x \in D$ mamy wówczas $\lim_{t \to 0^+} f_t(x) = f_0(x) = x$ w $(X, \|\cdot\|)$) jest równoważna ciągłości punktowej w D półgrupy S, tzn. $\lim_{s \to t} f_s(x) = f_t(x)$ dla każdego $t \geqslant 0$ i każdego $x \in D$ i że jest również równoważna ciągłości funkcji $\{f_t(x)\}_{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times D}$ w $\mathbb{R}^+ \times D$.

Przydatna też jest silniejsza ciągłość półgrupy zwana T-ciągłością półgrupy.

Definicja 2.8. *([69], [128]) Przy założeniach definicji 2.7 mówimy, że półgrupa holomorficznych (k_D-nieoddalających) odwzorowań $S = \{f_t\}_{t \geqslant 0}$ jest lokalnie jednostajnie ciągła w 0, gdy*

$$\lim_{t \to 0^+} \sup_{x \in B} \|f_t(x) - f_0(x)\| = \lim_{t \to 0^+} \sup_{x \in B} \|f_t(x) - f_0(x)\| = 0$$

dla każdej kuli B w D, k_D).

Tak jak poprzednio można udowodnić, że lokalnie jednostajna ciągłość w 0 półgrupy S przekształceń holomorficznych (k_D-nieoddalających) jest równoważna lokalnej jednostajnej ciągłości półgrupy S, tzn.

$$\lim_{s\to t}\sup_{x\in B}\|f_s(x)-f_t(x)\|=0$$

dla każdej kuli B w $D, k_D)$ i dla każdego $t \geqslant 0$. Piszemy wtedy $T-\lim_{s\to t} f_s = f_t$ i mówimy, że półgrupa T-ciągłą półgrupą ([128]).

Zauważmy teraz, że gdy $X=\mathbb{C}^k$, to T-ciągłość półgrupy S w D jest równoważna ciągłości półgrupy S ([128]).

Mamy silny związek między maksymalnymi ($\equiv$ wysyconymi) rozwiązaniami zadania Cauchy'ego równań różniczkowych a półgrupami odwzorowań holomorficznych (k_d-nieoddalających). Mianowicie, gdy D jest ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, f jest ustalonym holomorficznym polem wektorowym na D (tzn. $f : D \to X$ jest odwzorowaniem holomorficznym), takim że dla każdego $x \in D$ zadanie Cauchy'ego

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+f\circ u=0\\ \lim_{t\to 0^+} u(0,x)=x\end{cases}$$

ma maksymalne ($\equiv$ wysycone) rozwiązanie $u:\mathbb{R}^+\times D\to D$, to przyjmując $f_t(x)=u(t,x)$ dla $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times D$ dostajemy holomorficzną pógrupą $S=\{f_t\}_{t\geqslant 0}$ ([31], [68], [118]).

Podobnie, gdy D jest ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, f jest ciągłym polem wektorowym na D (tzn. $f : D \to X$ jest odwzorowaniem ciągłym), takim że dla każdego $x \in D$ problem Cauchy'ego

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+f\circ u=0\\ \lim_{t\to 0^+} u(0,x)=x\end{cases}$$

ma jedyne rozwiązanie (tzn. gdy dla $x \in D$ funkcje $\{u_1(t)\}_{t\in[0,t_1]}$, $\{u_2(t)\}_{t\in[0,t_2]}$, gdzie $t_1, t_2 > 0$, są rozwiązaniami powyższego zadania Cauchy'ego, to $u_1(t)=u_2(t)$ dla każdego $t\in[0,\min(t_1,t_2])$ i ma maksymalne rozwiązanie $u:\mathbb{R}^+\times D\to D$, to $S=\{f_t\}$, gdzie $f_t(x)=u(t,x)$ dla $(u,t)\in\mathbb{R}^+\times D$, jest ciągłą pógrupą.

Z drugiej strony w 1976 roku E. Berkson i H. Porta udowodnili następujące twierdzenie łączące półgrupą odwzorowań analitycznych z maksymalnymi rozwiązaniami zadania Cauchy'ego odpowiedniego równania różniczkowego.

Twierdzenie 2.17. *([16]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w $\mathbb{C}$ i niech $S=\{f_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie ciągłą półgrupą funkcji analitycznych w D. Wtedy istnieje funkcja analityczna $f : D \to \mathbb{C}$, taka* *że*

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} + f(f_t(z)) = 0$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}^+$ *i* $z \in D$. *Ponadto*

$$f(z) = \lim_{t \to 0^+} \frac{z - f_t(z)}{t}$$

i zbieżność ta jest jednostajna na zbiorach zwartych zawartych w D. *Półgrupa* $S = \{f_t\}_{t \geqslant 0}$ *jest też analityczna względem parametru* t.

Powyższy rezultat został uogólniony do przestrzeni $\mathbb{C}^k$ przez M. Abate.

Twierdzenie 2.18. *([3]) Niech* D *będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w* $\mathbb{C}^k$ *i niech* $S = \{f_t\}$ *będzie ciągłą półgrupą funkcji holomorficznych w* D. *Wtedy istnieje funkcja holomorficzna* $f : D \to \mathbb{C}^k$, *taka że*

$$\frac{\partial f_t(x)}{\partial t} + f(f_t(x)) = 0$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}^+$ *i* $x \in D$. *Ponadto*

$$f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{x - f_t(x)}{t}$$

i zbieżność ta jest zbieżnością jednostajną na zbiorach zwartych zawartych w D. *Półgrupa* $S = \{f_t\}$ *jest też analityczna względem parametru* t.

Ostatecznie S. Reich i D. Shoikhet uzyskali następujący rezultat.

Twierdzenie 2.19. *([128]) Niech* D *będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$ *i niech* $S = \{f_t\}_{t \geqslant 0}$ *będzie* T*-ciągłą półgrupą złożoną z odwzorowań holomorficznych z* D *w* D. *Wtedy istnieje odwzorowanie holomorficzne* $f : D \to X$, *takie że*

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = f(f_t(z))$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}^+$ *i* $z \in D$. *Ponadto*

$$f(z) = \lim_{t \to 0^+} \frac{z - f_t(z)}{t}$$

i zbieżność ta jest zbieżnością jednostajną na zbiorach zwartych zawartych w D.

Stąd mamy też następującą definicję.

Definicja 2.9. *Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $S = \{f_t\}_{t \geqslant 0}$ będzie ciągłą półgrupą złożoną z odwzorowań k_D-nieoddalających z D w D. Jeżeli istnieje odwzorowanie $f : D \to X$, takie że*

$$f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{x - f_t(x)}{t}$$

i zbieżność ta jest jednostajna na każdym zbiorze leżącym ściśle wewnątrz obszaru D, to f nazywamy infinitezymalnym generatorem (lub po prostu generatorem) półgrupy S i mówimy, że półgrupa S jest generowana przez f.

Uwaga 2.3. *Przy założeniach definicji 2.9 granicę*

$$f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{x - f_t(x)}{t}$$

można w tej definicji zastąpić granicą

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} k_D(x - tf(x), f_t(x)) = 0.$$

Mamy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.20. *([127]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $S = \{f_t\}_{t \geqslant 0}$ będzie ciągłą półgrupą złożoną z odwzorowań holomorficznych z D w D. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(a) S jest T-ciągłą półgrupą na $\mathbb{R}^+$,

(b) wszystkie odwzorowania

$$f_t = \frac{1}{t}(I - f_t),$$

gdzie $t > 0$, są jednostajnie ograniczone na każdym podzbiorze leżącym ściśle wewnątrz D,

(c) dla każdego $x \in D$ istnieje granica (w normie)

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(x - f_t(x)) = f(x),$$

i f jest odwzorowaniem ograniczonym na każdym podzbiorze leżącym ściśle wewnątrz D.

Uwaga 2.4. *W punkcie (c) mamy wtedy zbieżność lokalnie jednostajną, tzn. mamy $f = T - \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(I - f_t)$ ([127]).*

Uwaga 2.5. *Okazuje się, że w zespolonej przestrzeni Banacha o wymiarze nieskończonym istnieją ciągłe holomorficzne półgrupy, które nie są różniczkowalne względem parametru t. (patrz np. [126]).*

Stąd powstał naturalny problem opisu rodziny wszystkich holomorficznych (ciągłych) odwzorowań $f : D \to X$, które są generatorami ciągłych półgrup holomorficznych (k_D-nieoddalających) działających w ustalonym obszarze wypukłym i ograniczonym $D \subset X$. Będę oznaczać rodzinę wszystkich holomorficznych (k_D-nieoddalających) generatorów półgrup na D przez $HG(D)$ ($NG(D)$). Warto tutaj zaznaczyć, że mamy pełny opis rodziny wszystkich generatorów ciągłych półgrup holomorficznych działających w otwartej kuli jednostkowej $B \subset \mathbb{C}^k$([3], [20]).

Przy pomocy generatora możemy również opisać zbiór punktów stałych półgrupy.

Twierdzenie 2.21. *([3]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ półgrupą złożoną z odwzorowań holomorficznych z D w D i niech $f : D \to X$ będzie jej generatorem. Przy tych założeniach punkt $\tilde{x} \in D$ jest punktem stałym półgrupy S wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\tilde{x}) = 0$, tzn. mamy $Fix(S) = Null(f)$.*

Uwaga 2.6. *([126]) Z przytoczonego dalej twierdzenia 2.30 ([111]) i z ostatniego twierdzenia wynika, że przy założeniach tych twierdzeń zbiór miejsc zerowych generatora f jest holomorficznego retraktem obszaru D.*

Przejdziemy teraz do następnego pojęcia - nieliniowej rezolwenty.

Definicja 2.10. *Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $f : D \to X$ będzie odwzorowaniem, takim że dla każdego $s > 0$ mamy $D \subset (I + sf)(D)$ i istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie $J_s = (I + sf)^{-1} : D \to D$, tzn. dla każdego $s > 0$ i każdego $x \in D$ istnieje dokładnie jedno $y \in D$, takie że $(I + sf)y = x$. Mówimy wtedy, że odwzorowanie f spełnia warunek **RC** (lub, że ma własność **RC**) i że odwzorowanie $J_s = (I + sf)^{-1}$ obszaru D w siebie jest dobrze określone. Odwzorowanie J_s nazywamy wtedy nieliniową resolwentą odwzorowania f. Rodzinę wszystkich holomorficznych (ciągłych odwzorowań $f : D \to X$ mających własność **RC** i takich że ich resolwenta jest odwzorowaniem holomorficznym (k_D-nieoddalającym) oznaczamy przez $RH(D)$ ($RN(D)$).*

Mamy następującą tożsamość rezolwentową.

Lemat 2.4. *([126], [127], [128], [141]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech ciągłe odwzorowanie $f : D \to X$ spełnia warunek **RC**. Wtedy dla*

$0 \leqslant s \leqslant t$ prawdziwa jest równość

$$J_t = J_s\left(\frac{s}{t}I + \left(1 - \frac{s}{t}\right)J_t\right).$$

Dalsze twierdzenia wiążą rezolwentę z generatorem półgrupy.

Twierdzenie 2.22. *([126], [128]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ półgrupą złożoną z odwzorowań k_D-nieoddalających (holomorficznych) z D w D. Jeżeli $f = T - \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(I - f_t) : D \to D$ i $f : D \to X$ jest ciągłe, to $f \in RN(D)$ ($f \in HD(D)$).*

Twierdzenie 2.23. *([126], [128]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $f : D \to X$ będzie odwzorowaniem ograniczonym i jednostajnie ciągłym na każdym leżącym ściśle wewnątrz podzbiorze obszaru D. Jeżeli f ma własność **RC**, to f jest generatorem k_D-nieoddalającej półgrupy $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ z D w D. Półgrupa S może być wygenerowana przez wzory typu wykładniczego:*

$$f_t = \lim_{n\to\infty} J^n_{\frac{t}{n}} = \lim_{n\to\infty}(I + \frac{t}{n}f)^{-n}$$

lub

$$f_t = \lim_{n\to\infty} J^{[tn]}_{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}(I + \frac{1}{n}f)^{[-tn]}$$

dla $t \geqslant 0$ i zbieżność tutaj jest zbieżnością jednostajną na każdym leżącym ściśle wewnątrz podzbiorze obszaru D. Jeżeli dodatkowo f jest holomorficzne, to S jest także holomorficzną półgrupą.

Tym samym twierdzenie 2.23 pokazuje nam jak przy pomocy rezolwenty wygenerować półgrupę.

Dalej mamy

Twierdzenie 2.24. *([126], [128]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $f : D \to X$ będzie odwzorowaniem ograniczonym i jednostajnie ciągłym na każdym leżącym ściśle wewnątrz podzbiorze obszaru D. Przy tych założeniach $f \in GN(D)$ wtedy i tylko wtedy gdy $f \in RN(D)$.*

Twierdzenie 2.25. *([128]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $f : D \to X$ będzie odwzorowaniem holomorficznym. Przy tych założeniach odwzorowanie f generuje holomorficzną półgrupę na $\mathbb{R}^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy gdy dla pewnego $T > 0$ i dla każdego $0 < s < T$ odwzorowanie $J_s = (I+sf)^{-1}$ jest dobrze określonym holomorficznym odwzorowaniem obszaru D w siebie. W tym przypadku dla każdego $s > 0$ odwzorowanie*

$J_s = (I+sf)^{-1}$ jest dobrze określonym holomorficznym odwzorowaniem obszaru D w siebie.

Gdy $f : D \to X$ jest odwzorowaniem holomorficznym i lokalnie ograniczonym, to dostajemy

Twierdzenie 2.26. *([127], [128]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli $f : D \to X$ jest odwzorowaniem holomorficznym i jest lokalnie ograniczone (tzn. jest ograniczone na każdym zbiorze leżącym ściśle wewnątrz D), to $f \in HG(D)$ wtedy i tylko wtedy gdy $f \in HR(D)$.*

Przedstawię teraz znane już twierdzenia typu Wolffa-Denjoya dla interesujących mnie półgrup i ich resolwent.

Twierdzenie 2.27. *([126], [128]) Niech $D \subset \mathbb{C}^k$ będzie silnie wypukłym obszarem o brzegu klasy C^2 i niech $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie półgrupą złożoną z odwzorowań holomorficznych z D w D. Jeżeli S nie ma wspólnego punktu stałego, to istnieje punkt $\xi \in \partial D$, taki że*

a) $\lim_{t\to\infty} f_t(x) = \xi$ dla każdego $x \in D$,

b) $\lim_{t\to\infty} J_t(x) = (I - D_t f_0(x))^{-1} = \xi$ dla każdego $x \in D$, gdzie $D_t f_0(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f_t(x)-x}{t}$.

Natomiast w przypadku jednostkowej kuli otwartej B_H w przestrzeni Hilberta H mamy następujące twierdzenie (patrz definicja 2.3 rodziny $\mathcal{G}$).

Twierdzenie 2.28. *([100]) Niech $\mathcal{G}$ będzie podrodziną rodziny wszystkich k_{B_H}-nieoddalających odwzorowań B_H w siebie i niech $\mathcal{G}$ ma własność Wolffa-Denjoya. Jeżeli ciągła k_{B_H}-nieoddalająca półgrupa $S = \{f_t\}$ nie ma wspólnego punktu stałego w B_H i $f_{\tilde{t}} \in \mathcal{G}$ dla pewnego $\tilde{t} > 0$, to istnieje punkt $\xi \in \partial B_H$, taki że półgrupa $S = \{f_t\}$ jest zbieżna i to jednostajnie na każdym zbiorze zwartym w B_H do ξ, gdy $t \to \infty$.*

4) Graniczne zachowanie się rodziny holomorficznych (k_D-nieoddalających) retraktów z pustym przecięciem

Zacznę od przypomnienia definicji retrakcji i retraktu.

Definicja 2.11. *Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Odwzorowanie $r \in H(D)$ ($r \in N(D)$) nazywamy holomorficzną (k_D-nieoddalającą) retrakcją, gdy $r \circ r = r$. Zbiór $R = r(D)$ nazywamy wtedy holomorficznym (k_D-nieoddalającym) retraktem obszaru D.*

Znane są następujące fakty o takich retraktach.

Twierdzenie 2.29. *([132], [32]) Holomorficzny retrakt wypukłego i ograniczonego obszaru D w zespolonej przestrzeni Banacha jest spójną analityczną rozmaitością.*

Później w 1991 roku P. Mazet i J.-P. Vigué udowodnili następujące twierdzenie o zbiorze punktów stałych odwzorowania holomorficznego.

Twierdzenie 2.30. *([111]) Jeżeli D jest wypukłym i ograniczonym obszarem w refleksywnej zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i odwzorowanie $f \in H(D)$ ma punkt stały, to zbiór punktów stałych $Fix(f)$ tego odwzorowania jest holomorficznym retraktem obszaru D.*

Uwaga 2.7. *Okazuje się, że w l^∞ nie można zastosować dowodu podanego w [111], by uzyskać holomorficzny retrakt ([111]).*

Mamy także następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.31. *([100]) Niech D wypukłym i ograniczonym obszarem w refleksywnej zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli odwzorowanie $f : D \to D$ jest $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensujące, holomorficzne (k_D-nieoddalające) i $Fix(f) \neq \emptyset$, to zbiór $Fix(f)$ jest warunkowo zwarty w $(X, \|\cdot\|)$ i jest holomorficznym (k_D-nieoddalającym) retraktem obszaru D.*

Ponadto mamy

Twierdzenie 2.32. *([100], [103]) Niech D będzie wypukłym i ograniczonym obszarem w refleksywnej zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli $f : D \to D$ jest holomorficznym (k_D-nieoddalającym) odwzorowaniem z niepustym zbiorem punktów stałych $Fix(f)$ i niepusty podzbiór $M \subset D$ jest relatywnie zwarty w $(X, \|\cdot\|)$, f-niezmienniczy i jest holomorficznym (k_D-nieoddalającym) retraktem obszaru D, to przecięcie $Fix(f) \cap M$ jest niepuste i jest holomorficznym (k_D-nieoddalającym) retraktem obszaru D.*

Powyższe twierdzenia pozwoliły udowodnić następujące twierdzenie o skończonej komutującej rodzinie odwzorowań holomorficznych.

Twierdzenie 2.33. *([100]) Niech D będzie wypukłym i ograniczonym obszarem w refleksywnej zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli dla $j = 1, 2, ..., n$, odwzorowanie $f_j : D \to D$ jest holomorficzne (k_D-nieoddalające) z $Fix(f_j) \neq \emptyset$, przynajmniej jedno z nich jest odwzorowaniem $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensującym i wszystkie odwzorowania f_j, $j = 1, 2, ..., n$, są przemienne, to zbiór wspólnych punktów stałych $\emptyset \neq \bigcap_{j=1}^{n} Fix(f_j)$ jest relatywnie zwarty w $(X, \|\cdot\|)$ i jest holomorficznym (k_D-nieoddalającym) retraktem obszaru D.*

Stąd w przypadku wypukłego i ograniczonego obszaru D w $\mathbb{C}^k$ otrzymujemy (patrz twierdzenie 2.31)

Twierdzenie 2.34. *([2]) Jeżeli D jest wypukłym i ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i $\mathcal{F} \subset H(D)$ jest komutującą rodziną odwzorowań holomorficznych, takich że $Fix(f) \neq \emptyset$ dla każdego $f \in \mathcal{F}$, to rodzina $\mathcal{F}$ ma wspólny punkt stały w D.*

Wniosek 2.4. *([2]) Jeżeli D jest wypukłym i ograniczonym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i $\{R_n\}$ jest zstępującym ciągiem holomorficznych retraktów obszaru D, to $\bigcap_n R_n$ jest niepustym retraktem obszaru D.*

Twierdzenie 2.34 i wniosek 2.4 są nieprawdziwe w otwartej kuli jednostkowej Hilberta B_H, gdy $\dim H = +\infty$. Zauważmy najpierw, że w B_H mamy dokładny opis holomorficznych retraktów - są to po prostu przecięcia zespolonych hiperpłaszczyz z kulą B_H ([60], [134], [135], [145]). To i holomorficzna jednorodność kuli B_H pozwoliło T. Kuczumowowi, S. Reichowi i D. Shoikhetowi pokazać ([100]), że ostatnie twierdzenie nie jest prawdziwe w jednostkowej kuli otwartej B_H w zespolonej przestrzeni Hilberta H z $dimH = \infty$. Zauważyłam jednak, że z ich konstrukcji ciągu holomorficznych retraktów $\{R_n\}$ wynika, że $\lim_n diam_{\|\cdot\|}(R_n) = 0$ i że istnieje jedyne $\xi \in \partial B_H$, takie że $\lim_n dist_{\|\cdot\|}(\xi, R_n) = 0$. Stąd zadałam naturalne pytanie: czy w ten sposób zachowuje się każdy zstępujący ciąg retraktów w ograniczonym i wypukłym obszarze w zespolonej przestrzeni Banacha o wymiarze nieskończonym?

Uwaga 2.8. *Więcej wyników o twierdzeniu Wolffa-Denjoya i jemu podobnych można np. znaleźć w [2], [14], [15], [26], [27], [33], [39], [78], [99], [112], [115], [120], [122], [128], [141], [139] i [157] oraz w podanej tam literaturze.*

3. Wokół twierdzenia Wolffa-Denjoya - opis osiągnięcia naukowego

Jak już wcześniej wspomniałam w swoim osiągnięciu naukowym zajmuję się następującymi problemami:

1) iteracje funkcji holomorficznych (k_D-nieoddalających) bez punktów stałych przekształcających ograniczony i ściśle wypukły obszar D w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i ich zbieżność,

2) orbity półgrup $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ złożonych z holomorficznych (k_D-nieoddalających) odwzorowań bez punktów stałych i ich zbieżność,

3) graniczne zachowanie się rodziny holomorficznych (k_D-nieoddalających) retraktów z pustym przecięciem.

Przypominam, że problemy te były badane w następujących pracach wchodzących w skład mojego osiągnięcia naukowego:

B 1) M. Budzyńska, S. Reich, Intersections of holomorphic retracts in Banach spaces, J. Aust. Math. Soc 89 (2010), 297-307.

B 2) M. Budzyńska, The Denjoy-Wolff theorem in $\mathbb{C}^n$, Nonlinear Analysis 75 (2012), 22-29.

B 3) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, A Denjoy-Wolff theorem for compact holomorphic mappings in reflexive Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012), 504-512.

B 4) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, Theorems of Denjoy-Wolff type, Ann. Mat. Pura Appl. 192 (2013), 621-648.

B 5) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, A Denjoy-Wolff theorem for compact holomorphic mappings in complex Banach spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 38 (2013), 747-756.

B 6) M. Budzyńska, The Denjoy-Wolff theorem for condensing mappings in a bounded and strictly convex domain in a complex Banach space, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 39 (2014), 919-940.

B 7) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, Theorems of Denjoy-Wolff type for families of holomorphic retracts, J. Nonlinear Conv. Anal. 15, 637-645 (2014).

1) Iteracje funkcji holomorficznych (k_D-nieoddalających) bez punktów stałych przekształcających ograniczony i ściśle wypukły obszar D w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i ich zbieżność

W tej części rozdzielę twierdzenia związane z odwzorowaniami zwartymi od twierdzenia o odwzorowaniu $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensującym. Wynika to z innych idei dowodów tych twierdzeń.

Zacznę od wyniku w $\mathbb{C}^k$. Tutaj kluczową rzeczą było pokazanie, że każda horosfera jest niepustym zbiorem. Po skorzystaniu z lokalnej zwartości przestrzeni metrycznej i istnieniu odcinków metrycznych $[x, y]_{k_D}$ (patrz twierdzenie 1.9, ale w moim dowodzie nie wykorzystuję, jak w przypadku jednostkowych kul otwartych w przestrzeni Banacha, dokładnego opisu zespolonych geodezyjnych przechodzących przez 0) dostaję

Lemat 3.1. *([B 2] Lemma 5.1) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$. Niech $\xi \in \partial D$, $R > 0$ i niech ciąg $\{x_n\}$ będzie taki, że $x_n \in D$ dla $n = 1, 2, ...$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ i granica*

$$\lim_{n\to\infty} \left[k_D\left(y, x_n\right) - k_D\left(x, x_n\right)\right]$$

istnieje dla wszystkich $x, y \in D$. Wtedy horosfera $G\left(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\}\right)$ jest niepustym zbiorem dla każdego $\tilde{x} \in D$ i każdego $R > 0$.

Dlatego po zastosowaniu odpowiedniego ciągu aproksymacyjnego byłam w stanie powtórzyć dowód twierdzenia 2.9 i uwzględniając twierdzenia 1.16 i 2.6 otrzymać ostatecznie twierdzenie Wolffa-Denjoya dla ograniczonych i ściśle wypukłych obszarów w $\mathbb{C}^k$.

Twierdzenie 3.1. *([B 2] Theorem 5.3 i Theorem 5.6) Jeżeli D jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i $f : D \mapsto D$ jest odwzorowaniem k_D-nieoddalającym (w szczególności holomorficznym) i bez punktu stałego, to istnieje $\tilde{\xi} \in \partial D$, takie że ciąg iteracyjny $\{f^n\}$ funkcji f jest zbieżny w zwarto-otwartej topologii do odwzorowania stałego o wartości równej $\tilde{\xi}$.*

Następnie wspólnie z T. Kuczumowem i S. Reichem poprawiłam trochę twierdzenie 3.1. Zauważyliśmy bowiem, że $\tilde{\xi}$ jest równe granicy ciągu $\{x_n\}$. Mamy bowiem następujący lemat.

Lemat 3.2. *([B 4], Lemma 5.7) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$. Niech $\xi \in \partial D$, $R > 0$ i niech ciąg $\{x_n\}$ będzie, taki że $x_n \in D$ dla $n = 1, 2, ...$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ i granica*

$$\lim_{n\to\infty} \left[k_D\left(y, x_n\right) - k_D\left(x, x_n\right)\right]$$

istnieje dla wszystkich $x, y \in D$. Wtedy przecięcie wszystkich domkniętych w normie horosfer jest zbiorem jednopunktowym równym $\{\xi\}$, tzn.

$$\overline{D}^{\|\cdot\|} \cap \bigcap_{R>0} \overline{G\left(x, \xi, R, \{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|} = \partial D \cap \bigcap_{R>0} \overline{G\left(x, \xi, R, \{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|} = \{\xi\}.$$

Ostateczna wersja twierdzenia Wolffa-Denjoya dla ograniczonych i ściśle wypukłych obszarów w $\mathbb{C}^k$ jest więc następująca.

Twierdzenie 3.2. *([B 4] Theorem 6.2 i Theorem 6.3) Jeżeli D jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i $f : D \mapsto D$ jest odwzorowaniem k_D-nieoddalającym (w szczególności holomorficznym) odwzorowaniem bez punktu stałego, to ciąg iteracyjny $\{f^n\}$ funkcji f jest zbieżny w zwarto-otwartej topologii do odwzorowania stałego o wartości równej ξ.*

Uwaga 3.1. *Ostatnio M. Abate i J. Raissy podali inny dowód twierdzenia 3.2 ([4]).*

Punkt $\xi \in \partial D$, występujący w twierdzeniu 3.2 i równy $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ dla każdego $x \in D$ nazywamy punktem Wolffa odwzorowania f i nie zależy on od wyboru ciągu aproksymacyjnego. Dlatego prawdziwe są poniższe wnioski z ostatniego twierdzenia.

Wniosek 3.1. *([B 4] Corollary 6.4) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$, i niech $f : D \to D$ będzie odwzorowaniem holomorficznym (k_D-nieoddalającym) i bez punktu stałego. Niech $\{z_n\}$ będzie dowolnym ciągiem w D i niech ciąg $\{x_n\} \subset D$ będzie taki, że*

$$\{x_n\} = \{h_f(s_n, z_n)\} = \{f_{s_n,z_n}(x_n)\} = \{(1 - s_n) z_n + s_n f(x_n)\},$$

gdzie $0 < s_n < 1$ dla $n = 1, 2, ...,$ i $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Załóżmy, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny w normie i że granica

$$\lim_{n\to\infty} [k_D(w, x_n) - k_D(z, x_n)]$$

istnieje dla wszystkich $w, z \in D$. Wtedy ciąg $\{x_n\}$ ma granicę równą ξ, gdzie ξ jest punktem Wolffa odwzorowania f.

Wniosek 3.2. *([B 4] Corollary 6.5) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^n$, $f : D \mapsto D$ odwzorowaniem holomorficznym (k_D-nieoddalającym) bez punktu stałego i niech $\xi \in \partial D$ będzie punktem Wolffa odwzorowania f. Wprowadzamy $\{x(s, z)\}$ wzorem*

$$x(s, z) = h_f(s, z) = f_{s,z}(x(s, z)) = (1 - s) z + sf(x(s, z))$$

dla $0 < s < 1$ i $z \in D$. Jeżeli $s \to 1^-$, to $\{x(s, \cdot)\}$ dąży jednostajnie na D do odwzorowania stałego o wartości równej ξ.

Wniosek 3.3. *([B 4] Corollary 6.6) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^n$, $f : D \mapsto D$ odwzorowaniem holomorficznym (k_D-nieoddalającym) bez punktu stałego i niech $\xi \in \partial D$ będzie punktem Wolffa odwzorowania f. Wprowadzamy $\{x(s, z)\}$ wzorem*

$$x(s, z) = h_f(s, z) = f_{s,z}(x(s, z)) = (1 - s) z + sf(x(s, z))$$

dla $0 < s < 1$ i $z \in D$. Jeżeli $s \to 1^-$, to $\{x(s, \cdot)\}$ dąży jednostajnie na D do odwzorowania stałego o wartości równej ξ. Wtedy

$$\lim_{s\to 1^-} diam_{\|\cdot\|} x(s, D) = 0.$$

Okazało się po analizie dowodu twierdzenia 3.1, że nie musimy wiedzieć, że wszystkie horosfery są niepuste - wystarczy by niepuste były horosfery generowane przez zbieżny do punktu brzegowego ciąg aproksymacyjny. Zajęłam się więc z T. Kuczumowem i S. Reichem odwzorowaniami zwartymi. W naszych dowodach zastąpiliśmy horosferę $G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ przez horosferę $H(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$, ponieważ przestrzenie Banacha nie muszą być ośrodkowe. Podstawowym narzędziem okazało się następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.3. *([B 3] Theorem 3.3) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha w $(X, \|\cdot\|)$ i niech $f : D \mapsto D$ będzie zwartym, k_D-nieoddalającym odwzorowaniem bez punktów stałych. Niech $\tilde{x} \in D$ i ciąg $\{z_n\} \subset D$ będą ustalone. Załóżmy, że ciągi $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ i $\{x_n\} \subset D$ spełniają następujące warunki*

$$0 < t_n < 1$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 1,$$

$$x_n = x_n(t_n, z_n) = h_f(t_n, z_n) = f_{t_n,z_n}(x_n(t_n, z_n))$$
$$= (1 - t_n)z_n + t_n f(x_n(t_n, z_n)) = (1 - t_n)z_n + t_n f(x_n)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \in \partial D.$$

Wtedy dla każdego $R > 0$ horosfera $H(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ jest niepustym zbiorem.

Przy okazji otrzymaliśmy też (patrz dowód Theorem 2.6 w [B 3]), że jeżeli D jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha i każda horosfera $H(x, \xi, R, \{x_n\})$ jest niepusta, to $\bigcap\limits_{R>0} \overline{H(x, \xi, R, \{x_n\})}^{\|\cdot\|} = \{\xi\}$, a jeżeli D jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha i $\bigcap\limits_{R>0} \overline{H(x, \xi, R, \{x_n\})} \neq \emptyset$, to również mamy $\bigcap\limits_{R>0} \overline{H(x, \xi, R, \{x_n\})}^{\|\cdot\|} = \{\xi\}$.

Stąd po zastosowaniu metody dowodowej twierdzenia 3.1 dostaliśmy

Twierdzenie 3.4. *([B 3] Theorem 4.1) Jeżeli D jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i odwzorowanie $f : D \mapsto D$ jest zwarte, k_D-nieoddalające i bez punktu stałego, to istnieje punkt $\xi \in \partial D$, taki że ciąg $\{f^n\}$ iteracji tego odwzorowania jest zbieżny w ograniczono-otwartej topologii do odwzorowania stałego o wartości równej ξ, tzn. na każdym k_D-ograniczonym podzbiorze C zbioru D, ciąg $\{f^n\}$ jest zbieżny jednostajnie do ξ.*

Ponownie analiza dowodu doprowadziła nas do wniosku, że możemy opuścić założenie refleksywności. Rzeczywiście, możemy zastosować funkcję Lemperta jako definicję odległości Kobayashiego (patrz definicja 1.12) i odpowiednie aproksymacje odcinków metrycznych, by otrzymać następujące uogólnienie twierdzenia 3.3.

Twierdzenie 3.5. *([B 5] Theorem 3.3) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $f : D \mapsto D$ będzie zwartym, k_D-nieoddalającym odwzorowaniem bez punktów stałych. Niech $\tilde{x} \in D$ i ciąg $\{z_n\} \subset D$ będą ustalone. Załóżmy, że ciągi $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ i $\{x_n\} \subset D$ spełniają następujące warunki*

$$0 < t_n < 1$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 1,$$

$$x_n = x_n(t_n, z_n) = h_f(t_n, z_n) = f_{t_n,z_n}(x_n(t_n, z_n))$$
$$= (1 - t_n)z_n + t_n f(x_n(t_n, z_n)) = (1 - t_n)z_n + t_n f(x_n)$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \in \partial D.$$

Wtedy dla każdego $R > 0$ horosfera $H(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ jest niepustym zbiorem.

Wystarczy teraz zauważyć, że przy założeniach ostatniego twierdzenia każda określona w tym twierdzeniu horosfera $H(x, \xi, R, \{x_n\})$ jest niezmiennicza ze względu na odwzorowanie f, $\overline{H(x, \xi, R_1, \{x_n\})}^{\|\cdot\|} \subset \overline{H(x, \xi, R_2, \{x_n\})}^{\|\cdot\|}$ dla $0 < R_1 < R_2$, $\overline{f(H(x, \xi, R, \{x_n\}))}^{\|\cdot\|} \subset \overline{H(x, \xi, R, \{x_n\})}^{\|\cdot\|}$ dla każdego $R > 0$ i zbiór $\overline{f(H(x, \xi, R, \{x_n\}))}^{\|\cdot\|}$ jest zbiorem zwartym w $(X, \|\cdot\|)$, by dostać podobnie jak w Theorem 3.2 w [B 3], że $\bigcap_{R>0} \overline{H(x, \xi, R, \{x_n\})}^{\|\cdot\|} = \{\xi\}$.

Ostatecznie dostajemy

Twierdzenie 3.6. *([B 5] Theorem 4.1 i Theorem 4.2) Jeżeli D jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i odwzorowanie $f : D \to D$ jest zwarte, k_D-nieoddalające i bez punktu stałego, to istnieje punkt $\xi \in \partial D$, taki że ciąg $\{f^n\}$ iteracji tego odwzorowania jest zbieżny w ograniczono-otwartej topologii do odwzorowania stałego o wartości równej ξ, tzn.na każdym k_D-ograniczonym podzbiorze C zbioru D, ciąg $\{f^n\}$ jest zbieżny jednostajnie do ξ.*

Mamy też następujące wnioski z tego twierdzenia i jego dowodu.

Wniosek 3.4. *([B 5] Corollary 4.3) Jeżeli D jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, odwzorowanie $f : D \mapsto D$ jest zwarte, k_D-nieoddalające i bez punktu stałego, $\{z_j\}$ jest ciągiem w D i jeżeli ciąg $\{x_j\} \subset D$ jest zadany wzorem*

$$\{x_j\} = \{h_f(s_j, z_j)\} = \left\{f_{s_j, z_j}(x_j)\right\} = \{(1 - s_j) z_j + s_j f(x_j)\},$$

gdzie $0 < s_j < 1$ dla $j = 1, 2, ...,$ i $\lim_{j\to\infty} s_j = 1$, to ciąg $\{x_j\}$ jest zbieżny, przy $j \to \infty$, do punktu Wolffa ξ odwzorowania f.

Wniosek 3.5. *([B 5] Corollary 4.4) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, $f : D \to D$ odwzorowaniem zwartym, holomorficznym (k_D-nieoddalającym) i bez punktów stałych i niech $\xi \in \partial D$ będzie punktem Wolffa dla f. Dla każdego $z \in D$ krzywą aproksymacyjną $\{x(s, z) : 0 < s < 1\}$ wprowadzamy wzorem*

$$x(s, z) = h_f(s, z) = f_{s,z}(x(s, z)) = (1 - s) z + sf(x(s, z)).$$

Wtedy, przy $s \to 1^-$, odwzorowania $\{x(s, \cdot)\}$ dążą jednostajnie na D do odwzorowania stałego $g = \xi$.

Wniosek 3.6. *([B 5] Corollary 4.5) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, $f : D \to D$ odwzorowaniem zwartym, holomorficznym (k_D-nieoddalającym) i bez punktów stałych i niech $\xi \in \partial D$ będzie punktem Wolffa dla f. Dla każdego $z \in D$ krzywą aproksymacyjną $\{x(s, z) : 0 < s < 1\}$ wprowadzamy wzorem*

$$x(s, z) = h_f(s, z) = f_{s,z}(x(s, z)) = (1 - s) z + sf(x(s, z)).$$

Wtedy $\lim_{s\to 1^-} diam_{\|\cdot\|} x(s, D) = 0$.

Niestety w przypadku odwzorowania $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensującego nie wiemy, czy wszystkie horosfery związane z ciągiem aproksymacyjnym są niepuste i dlatego musimy tutaj całkowicie zmienić ideę dowodu twierdzenia Wolffa-Denjoya. Będzie to dowód nie wprost, ale muszę zaznaczyć, że zastosuję w nim by dojść do sprzeczności odpowiednio zdefiniowaną horosferę. Mamy więc następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.7. *([B 6] Theorem 3.1) Jeżeli D jest ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i $f : D \to D$ jest k_D-nieoddalającym (w szczególności holomorficznym) i $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensującym odwzorowaniem bez punktu stałego, to istnieje $\xi \in \partial D$, takie że ciąg iteracyjny $\{f^n\}$ jest zbieżny w zwarto-otwartej topologii do odwzorowania stałego o wartości równej*

ξ. Ponadto krzywa aproksymacyjna $\{x(s,z)\}$ dana wzorem

$$x(s,z) = h_f(s,z) = f_{s,z}(x(s,z)) = (1-s)z + sf(x(s,z)),$$

gdzie $0 < s < 1$ i $z \in D$, jest również zbieżna, przy $s \to 1^-$, do ξ, a rodzina funkcji aproksymacyjnych $\{x(s,\cdot)\}$ jest zbieżna na D w zwarto-otwartej topologii do odwzorowania stałego ξ.

Ponieważ jest to najważniejsze twierdzenie w moim osiągnięciu naukowy, to podam teraz szkic jego dowodu. Dowód podzielę na kilka części. Jak już wcześniej zaznaczyłam jest to dowód nie wprost.

Krok 1. Przypomnę, że na podstawie twierdzeń 1.16 i 1.17 dla zbiorów A i B (A jest zbiorem punktów skupienia ciągu iteracyjnego $\{f^n(x)\}$ dla $x \in D$, a B jest zbiorem punktów skupienia B krzywej aproksymacyjnej $\{x(s,z)\}_{0 \leqslant s<1} = \{h_f(s,z)\}_{0 \leqslant s<1} = \{(1-s)z + sf(h_f(s,z))\}_{0 \leqslant s<1}$ przy gdy $s \to 1^-$ i $z \in D$) mamy

(i) $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$,
(ii) zbiór A jest zbiorem niezależnym od wyboru punktu $x \in D$ i zbiór B jest zbiorem niezależnym od wyboru punktu $z \in D$,
(iii) $A \subset \partial D$ i $B \subset \partial D$,
(iv) jeżeli $\emptyset \neq \tilde{C} \subset D$ jest wypukłym i f-niezmienniczym zbiorem, to $A \cup B \subset \overline{\tilde{C}}^{\|\cdot\|} \cap \partial D$.

Krok 2. Ponieważ zajmuję się też teorią przekształceń nieoddalających w przestrzeniach Banacha, to znam stosowane w niej dowody nie wprost na istnienie punktu stałego odwzorowania przy pomocy minimalnego zbioru niezmienniczego ([86], patrz także [6], [56], [57], [62], [76], [77], [110]). Zastosuję tę metodę w moim dowodzie. Załóżmy, że zbiór $A \cup B$ ma dwa różne elementy ξ_1 i ξ_2. Wtedy dla każdego niepustego, wypukłego, k_D-domkniętego i f-niezmienniczego zbioru $\tilde{C} \subset D$ cały otwarty odcinek liniowy (ξ_1, ξ_2) zawiera się w tym zbiorze. Stąd istnieje w D jedyny, niepusty, najmniejszy w sensie zawierania, wypukły, k_D-domknięty i f-niezmienniczy zbiór C. Oczywiście $(\xi_1, \xi_2) \subset C$ i $A \cup B \subset \overline{C}^{\|\cdot\|} \cap \partial D$. Ponieważ zbiór C jest niepusty, najmniejszy w sensie zawierania, wypukły, k_D-domknięty, f-niezmienniczy, a f jest odwzorowaniem $\alpha_{\|\cdot\|}$-kondensującym, to

$$\overline{conv(f(C))}^{\|\cdot\|} \cap D = C$$

i dlatego

$$\alpha_{\|\cdot\|}(f(C)) = \alpha_{\|\cdot\|}(\overline{conv(f(C))}^{\|\cdot\|} \cap D) = \alpha_{\|\cdot\|}(C).$$

Oznacza to, że zbiór $\overline{C}^{\|\cdot\|}$ jest zbiorem zwartym w normie $\|\cdot\|$. Tym samym przestrzeń metryczna $(\overline{C}^{\|\cdot\|} \cap D, k_{D|C\times C})$ jest przestrzenią zupełną i ograniczenie zwartą.

Krok 3. Wiemy, że podzbiory wypukłe i k_D-domknięte nie muszą zawierać odcinków metrycznych w k_D łączących dwa punkty należące do nich. Dlatego, aby zastosować odpowiednio zdefiniowaną horosferę, musimy skonstruować nową metrykę wewnętrzną $k_{D,C}$ w C. Dla $x, y \in C$ dana jest ona wzorem

$$k_{D,C}(x,y) = \lim_{\eta\to 0^+} \inf\{\Sigma_{j=1}^{n} k_D(w_{j-1}, w_j) : \{w_0, w_1, ..., w_n\} \in \mathcal{P}_{C,x,y,\eta}\},$$

gdzie $\mathcal{P}_{C,x,y,\eta}$ jest zbiorem wszystkich ciągów skończonych $\{w_0, w_1, ..., w_n\}$ takich, że $w_j \in C$ dla $j = 0, 1, 2, .., n$, $n \geqslant 1$, $w_0 = x$, $w_n = y$ i $k_D(w_{j-1}, w_j) \leqslant \eta$ dla $j = 1, 2, ..., n$.

Przy pomocy twierdzenia 1.3 można udowodnić, że dla każdego $\tilde{x} \in C$ i każdego $R > 0$ istnieje stała $M_{C,\tilde{x},R}$, taka że

$$\operatorname{arg\,tgh}\left(\frac{\|x-y\|}{diam_{\|\cdot\|} D}\right) \leqslant k_D(x,y) \leqslant k_{D,C}(x,y) \leqslant M_{C,\tilde{x},R}\,|x-y|$$

dla wszystkich $x, y \in \overline{B_{k_D}(\tilde{x}, R)}^{\|\cdot\|} = \overline{B_{k_D}(\tilde{x}, R)}^{k_D}$. Oznacza to, że metryka $k_{D,C}$ jest poprawnie określona i że w C zbieżność w normie $\|\cdot\|$ jest równoważna zbieżności w metryce $k_{D,C}$ i jest równoważna zbieżności w metryce k_D. Ponadto ograniczoność zbioru w $(C, k_{D|C\times C})$ jest równoważna ograniczoności tego zbioru w $(C, k_{D,C})$. Przestrzeń metryczna $(C, k_{D,C})$ jest przestrzenią zupełną.

Okazuje się, że metryka $k_{D,C}$ jest też metryką wewnętrzną, a to oznacza, że każde dwa różne punkty $w, z \in C$ można połączyć odcinkiem metrycznym $[w, z]_{k_{D,C}}$ leżącym w C.

Mamy również odpowiednik lematu 1.4, bo

(a) jeżeli $x, y, w, z \in C$ i $s \in [0, 1]$, to

$$k_{D,C}\left(sx + (1-s)\,y, sw + (1-s)\,z\right) \leqslant \max\left[k_{D,C}\left(x, w\right), k_{D,C}\left(y, z\right)\right];$$

(b) jeżeli $x, y \in C$ i $s, t \in [0, 1]$, to

$$k_{D,C}\left(sx + (1-s)\,y, tx + (1-t)\,y\right) \leqslant k_{D,C}\left(x, y\right).$$

Na koniec zauważmy, że jeżeli odwzorowanie $g : D \to D$ jest k_D-nieoddalające i C jest g-niezmiennicze, to $g_{|C} : C \to C$ jest $k_{D,C}$-nieoddalające i podobnie gdy odwzorowanie $g : D \to D$ jest kontrakcją ze stała $0 \leqslant k < 1$ w przestrzeni metrycznej (D, k_D) i C jest g-niezmiennicze, to $g_{|C} : C \to C$ jest także kontrakcją z tą samą stała $0 \leqslant k < 1$ w przestrzeni metrycznej $(C, k_{D,C})$. Pozwala to na zastosowanie horosfer w C do wyjściowego odwzorowania f obciętego do C, tzn. do $f_{|C} : C \to C$ (patrz krok 4).

Krok 4. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem w C z $\lim x_n = \tilde{\xi} \in \partial D$ i z istnieniem granic

$$\lim_{n\to\infty} [k_{D,C}(w, x_n) - k_{D,C}(z, x_n)]$$

dla wszystkich $w, z \in C$. Horosferę $G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right)$ w C określamy teraz podobnie jak horosferę $G(x, \xi, R, \{x_n\})$ (patrz definicja definicja 2.1), tzn.

$$G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right) = \left\{y \in C : \lim_{n\to\infty} [k_{D,C}(y, x_n) - k_{D,C}(x, x_n)] < \frac{1}{2}\log R\right\}.$$

Biorąc pod uwagę lokalną zwartość zbioru C w metryce $k_{D,C}$ i własności tej metryki można, analogicznie jak w przypadku horosfery $G(x, \xi, R, \{x_n\})$ zawartej w ograniczonym i ściśle wypukłym obszarze D w $\mathbb{C}^n$, udowodnić, że nasza horosfera $G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right)$ w C ma następujące własności:

(i) horosfera $G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right)$ jest zbiorem niepustym i wypukłym dla każdego $x \in C$ i każdego $R > 0$;

(ii) dla każdych $0 < R_1 < R_2$ mamy

$$\left[C \cap \overline{G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R_1, \{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|}\right] \subset G_{C,D}\left(x, \tilde{\xi}, R_2, \{x_n\}\right);$$

(iii) dla każdego $R > 1$ mamy $B_{k_{D,C}}\left(x, \frac{1}{2}\log R\right) \subset G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right)$;

(iv) dla każdego $0 < R < 1$ mamy

$$B_{k_{D,C}}\left(x, -\frac{1}{2}\log R\right) \cap G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right) = \emptyset;$$

(v) $\bigcup\limits_{R>0} G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right) = C$ i $\bigcap\limits_{R>0} G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right) = \emptyset$.

Krok 5. Doprowadzimy teraz do sprzeczności z minimalnością f-niezmienniczego zbioru C. Ponieważ $f_{|C}$ jest odwzorowaniem $k_{D,C}$-nieoddalającym i bez punktu stałego to z twierdzenia 1.13, zwartości domknięcia w normie $\overline{C}^{\|\cdot\|}$ obszaru C i twierdzenia 1.17 dostajemy ciąg

$$\{x_n\} = \{h_f(s_n, z_n)\} = \{f_{s_n,z_n}(x_n)\} = \{(1 - s_n) z_n + s_n f(x_n)\}$$

(gdzie $z_n \in C$, $0 < s_n < 1$ dla $n = 1, 2, ...,$ i $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$), który jest zbieżny do $\tilde{\xi} \in \partial D$. Dodatkowo biorąc pod uwagę ośrodkowość zbioru C i ewentualnie wyciągając podciąg możemy założyć, że

$$\lim_{n\to\infty} [k_{D,C}(w, x_n) - k_{D,C}(z, x_n)]$$

istnieje dla wszystkich $w, z \in C$.

Ustalmy punkt $x \in C$ i weźmy dowolne $y \in C$. Zauważmy, że wtedy mamy

$$\lim_{n\to\infty} k_{D,C}\left(f\left(y\right), f_{s_n,z_n}\left(y\right)\right) = \lim_{n\to\infty} k_{D,C}\left(f\left(y\right), \left(1-s_n\right)z_n + s_n f\left(y\right)\right) = 0.$$

Dlatego dostajemy

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left[k_{D,C}\left(f\left(y\right), x_n\right) - k_{D,C}\left(x, x_n\right)\right] \\ \leqslant \limsup_{n\to\infty} &\left[k_{D,C}\left(f\left(y\right), f_{s_n,z_n}\left(y\right)\right) + k_{D,C}\left(f_{s_n,z_n}\left(y\right), f_{s_n,z_n}\left(x_n\right)\right) - k_{D,C}\left(x, x_n\right)\right] \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\left[k_{D,C}\left(y, x_n\right) - k_{D,C}\left(x, x_n\right)\right]. \end{aligned}$$

Z tej nierówności dostajemy

$$f\left(C \cap \overline{G_{C,D}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|}\right) \subset C \cap \overline{G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|}$$

dla dowolnego $R > 0$, czyli każdy zbiór $C \cap \overline{G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|} \subset C$ jest niepusty, wypukły, k_D-domknięty i f-niezmienniczy. Dalej dla $0 < R < 1$ zbiór $C \cap \overline{G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|} \subset C$ jest istotnie różny od C (patrz własność (iv) horosfery $G_{D,C}\left(x, \tilde{\xi}, R, \{x_n\}\right)$), a to przeczy minimalności zbioru C. Otrzymaliśmy sprzeczność i dlatego zbiór $A \cup B$ musi być zbiorem jednopunktowym równym $\{\xi\}$, gdzie $\xi \in \partial D$. To dowodzi żądanej w twierdzeniu zbieżności ciągu iteracyjnego i krzywej iteracyjnej do ξ. Zbieżność w topologii zwarto-otwartej można udowodnić stosując lemat 1.5.

2) Orbity półgrup $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ złożonych z holomorficznych (k_D-nieoddalających) odwzorowań bez punktów stałych i ich zbieżność

Jako wniosek z twierdzenia 3.2 dostajemy następujące twierdzenie Denjoy-Wolffa dla półgrup przekształceń.

Twierdzenie 3.8. *([B 4] Theorem 7.2) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i niech $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie ciągłą półgrupą holomorficznych (k_D-nieoddalających) odwzorowań obszaru D w siebie. Jeżeli półgrupa $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ nie ma wspólnego punktu stałego w D, to istnieje punkt $\xi \in \partial D$, taki że półgrupa S jest zbieżna do ξ, przy t dążącym do ∞, i to jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze obszaru D.*

Następny lemat odgrywa główną rolę w dowodzie zbieżności resolwenty (Twierdzenie 3.9).

Lemat 3.3. *([B 4] Lemma 8.4) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i niech $S = \{f_t\}_{t\geqslant 0}$ będzie ciągłą półgrupą holomorficznych (k_D-nieoddalających) odwzorowań obszaru D w siebie. Niech $f : D \to \mathbb{C}^k$ będzie ciągłym i ograniczonym generatorem półgrupy S i dla każdego $s > 0$ niech $\mathcal{J}_s = (I + sf)^{-1}$ będzie resolwentą. Wtedy dla wszystkich $r, s > 0$ prawdziwa jest równość*

$$J_{(r+1)s} = J_s(I + r(I - J_s))^{-1}.$$

Lemat 3.3 z wnioskiem 3.1 zastosowanym do $f = J_s$ daje nam następujące twierdzenie dla resolwenty podobne do twierdzenia Wolffa-Denjoya.

Twierdzenie 3.9. *([B 4] Theorem 8.5) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{C}^k$ jest ciągłym i ograniczonym odwzorowaniem, które nie ma punktu zerowego. Jeżeli f jest generatorem k_D-nieoddalającej półgrupy w D i jeżeli $J_r = (I + rf)^{-1}$, $r > 0$ jest resolwentą tego generatora, to istnieje punkt $\xi_0 \in \partial D$, taki że*

$$\lim_{r\to\infty} J_r(z) = \lim_{r\to\infty}(I + rf)^{-1}(z) = \xi_0$$

dla każdego $z \in D$.

Dalej po zastosowaniu rezolwentowej tożsamości (lemat 2.4) i metody horosfer $G(x, \xi_0, R, \{x_n\})$ do resolwenty J_r otrzymujemy

Twierdzenie 3.10. *([B 4] Theorem 8.6) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{C}^k$ jest ciągłym i ograniczonym odwzorowaniem, które nie ma punktu zerowego. Jeżeli f jest generatorem k_D-nieoddalającej półgrupy w D i jeżeli $J_r = (I + rf)^{-1}$, $r > 0$ jest resolwentą tego generatora, to istnieje punkt $\xi_0 \in \partial D$ (niezależny od wyboru $r > 0$), taki że*

$$\lim_{n\to\infty} J_r^n = \lim_{n\to\infty}(I + rf)^{-n} = \xi_0$$

dla każdego $r > 0$, gdzie $\xi_0 \in \partial D$ jest punktem występującym w poprzednim twierdzeniu.

Ostatnie twierdzenie łączy twierdzenie 3.8 z twierdzeniami 3.9 i 3.10.

Twierdzenie 3.11. *([B 4] Theorem 8.8) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$. Załóżmy, że $f : D \to \mathbb{C}^k$ jest ciągłym i ograniczonym odwzorowaniem, które nie ma punktu zerowego. Jeżeli f jest generatorem k_D-nieoddalającej półgrupy $S = \{f_t\}$ on D w D i jeżeli $J_r = (I+rf)^{-1}$, $r > 0$ jest resolwentą tego generatora, to $\xi_0 = \xi \in \partial D$, gdzie*

$$\lim_{n\to\infty} J_r^n = \lim_{n\to\infty}(I + rf)^{-n} = \xi_0$$

i

$$\lim_{t\to\infty} f_t = \xi.$$

3) Graniczne zachowanie się rodziny holomorficznych (k_D-nieoddalających) retraktów z pustym przecięciem

Zanim przejdę do omawiania zachowania się rodziny k_D-nieoddalających (holomorficznych) retraktów mającej własność skończonego przecięcia i jednocześnie z pustym przecięciem całej rodziny podam wynik dotyczący niepustego przecięcia rodziny k_D-nieoddalających (holomorficznych) retraktów. Zacznę od definicji ścisłej wypukłości w sensie liniowym przestrzeni metrycznej (D, k_D).

Definicja 3.1. *([B 15]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Będziemy mówić, że przestrzeń metryczna (D, k_D) jest ściśle liniowo wypukła, gdy każda k_D-kula jest zbiorem ściśle wypukłym w przestrzeni liniowej X.*

Uwaga 3.2. *Ścisłą wypukłość w sensie liniowym przestrzeni metrycznej (D, k_D) omówię w następnym rozdziale w którym przedstawię rezultaty z prac, które nie wchodzą w skład mojego osiągnięcia naukowego.*

Potrzebna jest też definicja ścisłej retrakcji.

Definicja 3.2. *([B 1], patrz także [40]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli $\emptyset \neq F \subset D$, $r : D \to F$ jest holomorficzną (k_D-nieoddalającą) retrakcją obszaru D na F i jeżeli*

$$k_D(r(x), y) < k_D(x, y)$$

kala każdego $y \in F$ i każdego $x \in D \setminus F$, to mówimy, że r jest holomorficzną (k_D-nieoddalającą) ścisłą retrakcją D na F.

Dalej mamy techniczny lemat pokazujący jak można z retrakcji otrzymać ścisłą retrakcję.

Lemat 3.4. *([B 1] Lemma 5.2, patrz także [40]) Jeżeli D jest ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, przestrzeń metryczna (D, k_D) jest ściśle liniowo wypukła, $\emptyset \neq F \subset D$ i $R : D \mapsto F$ jest holomorficzną (k_D-nieoddalającą) retrakcją D na F, to odwzorowanie $r : D \mapsto F$ następująco określone*

$$r(x) = R(\frac{x + R(x)}{2})$$

(dla $x \in D$) jest holomorficzną (k_D-nieoddalającą) ścisłą retrakcją D na F.

Zastosowanie twierdzeń 1.6 i 1.7, lematu 3.4 i albo istotnie zmodyfikowanej metody W. J. Davisa i P. Enflo ([40]) znajdywania minimalnego odwzorowania albo istotnie zmodyfikowanej metody R. Brucka ([23]) znajdywania minimalnego odwzorowania (stąd dwa absolutnie różne dowody poniższego twierdzenia) doprowadza do

Twierdzenie 3.12. *([B 1] Theorem 5.4 i [B 4] Theorem 4.2) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli (D, k_D) jest przestrzenią ściśle wypukłą w sensie liniowym, $\mathcal{F}$ jest rodziną k_D-nieoddalających (holomorficznych) retraktów obszaru D i jeżeli $F = \bigcap_{\tilde{F}\in\mathcal{F}} \tilde{F} \neq \emptyset$, to przecięcie F jest również holomorficznym (k_D-nieoddalającym) retraktem obszaru D.*

Można też uogólnić twierdzenie 3.12 uwalniając się od refleksywności przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 3.13. *([B 1] Theorem 5.17) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha, $\mathcal{N}$ zbiorem normującym dla $(X, \|\cdot\|)$ i niech $D \subset X$ będzie ograniczonym i wypukłym obszarem, takim że jego domknięcie w normie $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ jest zwarte w topologii $\sigma(X, \mathcal{N})$. Jeżeli (D, k_D) jest przestrzenią ściśle wypukłą w sensie liniowym, $\mathcal{F}$ jest rodziną k_D-nieoddalających (holomorficznych) retraktów obszaru D i jeżeli $F = \bigcap_{\tilde{F}\in\mathcal{F}} \tilde{F} \neq \emptyset$, to przecięcie F jest również holomorficznym (k_D-nieoddalającym) retraktem obszaru D.*

Założenie ścisłej liniowej wypukłości przestrzeni metrycznej (D, k_D) jest istotne o czym świadczy następujący przykład.

Przykład 3.1. *([B 1] Example 5.15) Weźmy $D = \Delta \times \Delta \subset \mathbb{C}^2$. Niech*

$$F_1 = \{(z_1, z_2) \in D : z_2 = \frac{1}{2} z_1\},$$

gdzie

$$r_1(z_1, z_2) = (z_1, \frac{1}{2} z_1)$$

dla $(z_1, z_2) \in \Delta \times \Delta$ i niech

$$F_2 = \{(z_1, z_2) \in \Delta \times \Delta : z_2 = z_1^2\}$$

z

$$r_2(z_1, z_2) = (z_1, z_1^2)$$

dla $(z_1, z_2) \in D$. Wtedy dostajemy

$$F_1 \cap F_2 = \{(0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})\}$$

i to oznacza że $F_1 \cap F_2$ nie jest k_D-nieoddalającym retraktem obszaru D.

Wykorzystując ostatnie twierdzenie i fakt, że w $\mathbb{C}^k$ holomorficzny retrakt ograniczonego i wypukłego obszaru jest spójną analityczną rozmaitością (patrz twierdzenie 2.29) można udowodnić

Twierdzenie 3.14. *([4] Theorem 9.3) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i niech $\{F_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną holomorficznych retraktów obszaru D z własnością skończonego przecięcia, tzn. $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ dla każdego skończonego ciągu indeksów $\emptyset \neq J \subset I$. Przy tych założeniach przecięcie $\bigcap_{i\in I} F_i$ tej rodziny jest niepuste i jest również holomorficznym retraktem obszaru D.*

Natomiast, gdy przecięcie k_D-nieoddalających retraktów jest puste, to otrzymujemy twierdzenie typu Denjoy-Wolffa.

Twierdzenie 3.15. *([4] Theorem 9.4) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i niech $\{F_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną k_D-nieoddalających retraktów obszaru D z własnością skończonego przecięcia, tzn. $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ dla każdego skończonego ciągu indeksów $\emptyset \neq J \subset I$. Jeżeli $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, to istnieje $\xi \in \partial D$, takie że*

$$\lim_J dist_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} F_j), \xi) = \lim_J \sup_{x\in\bigcap_{j\in J} F_j} \|x - \xi\| = 0,$$

gdzie rodzina wszystkich skończonych ciągów indeksów $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.

W dowodzie tego twierdzenia, po zastosowaniu skończonych przecięć retraktów, ośrodkowości obszaru D, założenia $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ i twierdzenia Lindöloffa, wyznaczyliśmy odpowiedni zstępujący ciąg retraktów i wybierając z retraktów występujących w tym ciągu po jednym punkcie x_n $(n = 1, 2, ...)$ przeszliśmy do rozważania zachowania się horosfer $G(\tilde{x}, \xi, R, \{x_n\})$ i to doprowadziło nas do udowodnienia żądanych własności punktu ξ.

Z ostatniego twierdzenia możemy wyciągnąć następujące wnioski.

Wniosek 3.7. *([4] Corollary 9.5) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i niech $\{F_i\}_{i\in I}$ będzie mającą własność skończonego przecięcia rodziną k_D-nieoddalających retraktów obszaru D. Jeżeli $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, to $\lim_J diam_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} F_j) = 0$, gdzie rodzina wszystkich skończonych ciągów indeksów $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.*

Wniosek 3.8. *([4] Corollary 9.6) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w $\mathbb{C}^k$ i niech $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną komutujących k_D-nieoddalających odwzorowań obszaru D w siebie, takich* *że* $Fix(f_i) \neq \emptyset$ *dla każdego* $i \in I$*. Jeżeli rodzina* $\mathcal{F}$ *nie ma wspólnego punktu stałego w* D*, to istnieje punkt* $\xi \in \partial D$*, taki że*

$$\lim_J dist_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} Fix(f_j), \xi) = 0,$$

gdzie rodzina wszystkich skończonych ciągów indeksów $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ *jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.*

Wniosek 3.9. *([4] Corollary 9.7) Niech* D *będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w* $\mathbb{C}^k$ *i niech* $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ *będzie rodziną komutujących* k_D*-nieoddalających odwzorowań obszaru* D *w siebie, takich że* $Fix(f_i) \neq \emptyset$ *dla każdego* $i \in I$*. Jeżeli rodzina* $\mathcal{F}$ *nie ma wspólnego punktu stałego w* D*, to* $\lim_J diam_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} Fix(f_i)) = 0$*, gdzie rodzina wszystkich skończonych ciągów indeksów* $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ *jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.*

Natomiast w przypadku zespolonej przestrzeni Banacha o wymiarze nieskończonym mamy następujące wyniki - używamy tutaj podobnej metody dowodowej, zmieniając tylko rodzaj horosfery i musimy tutaj (z wyjątkiem kuli Hilberta) zadać dodatkowe założenia na rodzinę retraktów.

Twierdzenie 3.16. *([B 7] Theorem 5.1) Niech* D *będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$ *i niech* $\{F_i\}_{i\in I}$ *będzie mającą własność skończonego przecięcia rodziną* k_D*-nieoddalających retraktów obszaru* D*. Jeżeli* $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ *i istnieje skończony zbiór indeksów* $\emptyset \neq \tilde{J} \in I$*, taki że* $\overline{\bigcap_{j\in\tilde{J}} F_j}^{\|\cdot\|}$ *jest zbiorem zwartym w* $(X, \|\cdot\|)$*, to istnieje* $\xi \in \partial D$*, takie że* $\lim_J dist_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} F_j, \xi) = 0$*, gdzie rodzina wszystkich skończonych ciągów indeksów* $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ *jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.*

Bezpośrednio z ostatniego twierdzenia dostajemy wniosek

Wniosek 3.10. *([B 7] Corollary 5.3) Niech* D *będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$ *i niech* $\{F_i\}_{i\in I}$ *będzie mającą własność skończonego przecięcia rodziną* k_D*-nieoddalających retraktów obszaru* D*. Jeżeli* $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ *i istnieje skończony zbiór indeksów* $\emptyset \neq \tilde{J} \in I$*, taki że* $\overline{\bigcap_{j\in\tilde{J}} F_j}^{\|\cdot\|}$ *jest zbiorem zwartym w* $(X, \|\cdot\|)$*, to istnieje* $\xi \in \partial D$*, takie że* $\lim_J diam_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} F_j) = 0$*, gdzie rodzina wszystkich skończonych ciągów indeksów* $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ *jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.*

Również po zastosowaniu twierdzeń 2.30, 2.32, 3.12 i 3.13 otrzymujemy następne dwa rezultaty.

Twierdzenie 3.17. *([B 7] Theorem 5.4) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną komutujących k_D-nieoddalających odwzorowań obszaru D w siebie, takich że $Fix(f_i) \neq \emptyset$ dla każdego $i \in I$. Jeżeli rodzina $\mathcal{F}$ nie ma wspólnego punktu stałego w D i istnieje skończony zbiór indeksów $\emptyset \neq \tilde{J} \in I$, taki że $\overline{\bigcap_{j\in\tilde{J}} Fix(f_j)}^{\|\cdot\|}$ jest zbiorem zwartym w $(X, \|\cdot\|)$, to istnieje punkt $\xi \in \partial D$, taki że*

$$\lim_J dist_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} Fix(f_j), \xi) = 0,$$

gdzie rodzina wszystkich skończonych ciągów indeksów $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.

Wniosek 3.11. *([B 7] Corollary 5.5) Niech D będzie ograniczonym i ściśle wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i niech $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną komutujących k_D-nieoddalających odwzorowań obszaru D w siebie, takich że $Fix(f_i) \neq \emptyset$ dla każdego $i \in I$. Jeżeli rodzina $\mathcal{F}$ nie ma wspólnego punktu stałego w D i istnieje skończony zbiór indeksów $\emptyset \neq \tilde{J} \in I$, taki że $\overline{\bigcap_{j\in\tilde{J}} Fix(f_j)}^{\|\cdot\|}$ jest zbiorem zwartym w $(X, \|\cdot\|)$, to istnieje punkt $\xi \in \partial D$, taki że $\lim_J diam_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} Fix(f_i)) = 0$, gdzie rodzina wszystkich skończonych ciągów indeksów $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.*

W przypadku kuli jednostkowej w przestrzeni Banacha mamy silniejsze twierdzenie.

Twierdzenie 3.18. *([B 4] Theorem 10.2) Niech B będzie otwartą kulą jednostkową w ściśle wypukłej, refleksywnej i zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ i nich $\{F_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną k_D-nieoddalających retraktów kuli B z własnością skończonego przecięcia, tzn $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ dla każdego skończonego zbioru indeksów $\emptyset \neq J \subset I$. Jeżeli $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$ i $\lim_J \alpha(\bigcap_{j\in J} F_j) = 0$, gdzie rodzina wszystkich skończonych zbiorów indeksów $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ jest częściowo uporządkowana przez inkluzję i $\alpha_{\|\cdot\|}$ jest miarą niezwartości Kuratowskiego w $(X, \|\cdot\|)$, to istnieje punkt $\xi \in \partial B$, taki że $\lim_J dist_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} F_j), \xi) = \lim_J \sup_{x\in\bigcap_{j\in J} F_j} \|x-\xi\| = 0$.*

W kuli Hilberta mamy tego typu twierdzenie bez dodatkowego założenia o mierze Kuratowskiego skończonego przecięcia retraktów.

Twierdzenie 3.19. *([B 4] Theorem 11.5, patrz też Theorem 11.2) Niech B_H będzie kulą Hilberta i niech $\{F_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną k_{B_H}-nieoddalających retraktów tej kuli B_H mającą własność skończonego przecięcia, tzn. $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ dla każdego skończonego zbioru indeksów $\emptyset \neq J \subset I$.*

Jeżeli $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, *to istnieje* $\xi \in \partial B_H$, *takie że* $\lim_J dist_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} F_j), \xi) = \lim_J \sup_{x\in\bigcap_{j\in J} F_j} \|x - \xi\| = 0$, *gdzie rodzina wszystkich skończonych zbiorów indeksów* $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ *jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.*

W dowodzie twierdzenia wykorzystujemy elipsoidę $E(\xi, R)$ i następujący lemat (jest on uogólnieniem Lemma 2 w [96]), a w zasadzie wniosek z tego lematu.

Lemat 3.5. *([B 4] Lemma 11.3) Jeżeli ciągi uogólnione* $\{x_u\}_{u\in U}$ *i* $\{y_u\}_{u\in U}$ *o wyrazach z* B_H *są zbieżne w słabej topologii do* $x \in B_H$, *to dla każdego* $y \in B_H$ *mamy*

$$\mathcal{LIM}_{u\in U}\frac{\sigma(y_u, y)}{\sigma(x_u, x)} = \sigma(x, y)\, \mathcal{LIM}_{u\in U}\frac{1 - \|y_u\|^2}{1 - \|x_u\|^2},$$

gdzie $\mathcal{LIM}_{u\in U}$ *oznacza jedną z granic (po obu stronach równości jest ta sama granica)*

$$\liminf_{u\in U}\frac{\sigma(y_u, y)}{\sigma(x_u, x)}, \quad \frac{\liminf_{u\in U}\sigma(y_u, y)}{\liminf_{u\in U}\sigma(x_u, x)}, \quad \limsup_{u\in U}\frac{\sigma(y_u, y)}{\sigma(x_u, x)}, ...,$$

o ile granica ta ma sens.

Stąd dostajemy

Wniosek 3.12. *([B 4] Corollary 11.4) Przy założeniach lematu 3.5 i dodatkowym założeniu* $\|y_u\| \geqslant \|x_u\|$ *dla wszystkich* $u \in U$ *prawdziwa jest nierówność*

$$\mathcal{LIM}_{u\in U}\frac{\sigma(y_u, y)}{\sigma(x_u, x)} \leqslant \sigma(x, y).$$

Podam teraz ostatni już wniosek w tej części mojego autoreferatu - jest to wniosek z twierdzenia 3.18.

Wniosek 3.13. *([B 4] Corollary 11.6) Niech* B_H *będzie kulą Hilberta i niech* $\{F_i\}_{i\in I}$ *będzie rodziną* k_{B_H}*-nieoddalających retraktów tej kuli* B_H *mającą własność skończonego przecięcia, tzn.* $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ *dla każdego skończonego zbioru indeksów* $\emptyset \neq J \subset I$. *Jeżeli* $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, *to* $\lim_J diam_{\|\cdot\|}(\bigcap_{j\in J} F_j) = 0$, *gdzie rodzina wszystkich skończonych zbiorów indeksów* $\{\emptyset \neq J \subset I\}$ *jest częściowo uporządkowana przez inkluzję.*

4. Inne osiągnięcia naukowo-badawcze

Omówię tutaj wyniki z pozostałych moich prac:

B 8) M. Budzyńska, W. Kaczor, M. Koter-Mórgowska, Asymptotic normal structure, semi-Opial property and fixed points, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 50 (1996), 33-41.

B 9) M. Budzyńska, W. Kaczor, M. Koter-Mórgowska, T. Kuczumow, Asymptotic normal structure and the semi-Opial property, Nonlinear Analysis 30 (1997), 3505-3515.

B 10) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, Uniform asymptotic normal structure, the uniform semi-Opial property and fixed points of asymptotically regular uniformly Lipschitzian semigroups. Part I, Abstr. Appl. Anal. 3 (1998), 133-151, MR 2000j:47096.

B 11) M. Budzyńska, T. Kuczumow, S. Reich, Uniform asymptotic normal structure, the uniform semi-Opial property and fixed points of asymptotically regular uniformly Lipschitzian semigroups. Part II, Abstr. Appl. Anal. 3 (1998), 247-263, MR 1 749 411.

B 12) M. Budzyńska, T. Kuczumow, T. Sękowski, Total sets and semicontinuity of the Kobayashi distance, Nonlinear Analysis 47 (2001), 2793 -2803.

B 13) M. Budzyńska, T. Kuczumow, A new proof of the Shafrir lemma, Lecture Notes in Nonlinear Analysis 3 (2002), 37-40

B 14) M. Budzyńska, Existence of a holomorphic retraction onto a common fixed point set of a family of commuting holomorphic self-mappings of B_H^n, Nonlinear Analysis 53 (2003), 139-146.

B 15) M. Budzyńska, T. Kuczumow, A. Stachura, Properties of the Kobayashi distance, Proceedings of the Second Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Eds. W. Takahashi and T. Tamaka), Yokohama Publishers, 2003, 25-36.

B 16) M. Budzyńska, Local uniform linear convexity with respect to the Kobayashi distance, Abstr. Anal. Appl. vol 2003, no 6 (2003), 367-373.

B 17) M. Budzyńska, Domains which are locally uniformly linearly convex in the Kobayashi distance, Abstr. Anal. Appl. vol 2003, no 8 (2003), 513-519.

B 18) M. Budzyńska, An example in holomorphic fixed point theory, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 2771-2777.

B 19) M. Budzyńska, T. Kuczumow, A strict convexity of the Kobayashi distance, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 4 (Ed. Y. J. Cho) (2003), Nova Science Publishers, Inc., 27-33.

B 20) M. Budzyńska, T. Kuczumow, A structure of common fixed point sets of commuting holomorphic mappings in finite powers of domains, Ann. Univ. Mariae Curie Skłodowska 57 (2003), 23-33.

B 21) M. Budzyńska, Holomorphic retracts in domains with the locally uniformly linearly convex Kobayashi distance, Contemp. Math. 364 (2004), 27-34.

B 22) M. Budzyńska, T, Kuczumow, Common fixed points of holomorphic mappings and retracts of B_H^∞, Contemp. Math. 364 (2004), 35-40.

B 23) M. Budzyńska, S. Reich, Infinite products of holomorphic mappings, Abstr. Anal. Appl. vol. 2005 no 4 (2005), 327-341.

B 24) M. Budzyńska, M. A. Khamsi, Holomorphic retracts in B_H^∞, J. Math.Anal. Appl. 317 (2006), 707-713.

B 25) M. Budzyńska, T. Kuczumow, M. Michalska, The Γ-Opial property, Bull. Austr. Math. Soc. 73 (2006), 473-476.

B 26) M. Budzyńska, T. Kuczumow, Linear strict convexity of the Kobayashi distance in nonreflexive Banach spaces, Fixed Point Theory and Applications (Eds. H. Fetter Nathansky, B. Gamboa de Buen, K. Goebel, W. A. Kirk, B. Sims), Yokohama Publishers, 2006, 1-9.

B 27) M. Budzyńska, T. Kuczumow, The common fixed point set of commuting nonexpansive mappings in infinite products of unit balls, Complex analysis and dynamical systems III, Contemp. Math. 455, 2008, 53-62.

B 28) M. Budzyńska, T. Kuczumow, M. Michalska, The common fixed point set of commuting nonexpansive mappings in Cartesian products of Banach spaces with the Opial property, J. Nonlinear Conv. Anal. 15, 637-645 (2014).

Problemy poruszane w wyżej wymienionych pracach można podzielić na 2 części:;

1) własności przestrzeni Banacha i ich zastosowanie w teorii punktów stałych przekształceń jednakowo lipschitzowskich (prace [B 8], [B 9], [B 10], [B 11], [B 25], [B 28]),

2) własności liniowo-topologiczne odległości Kobayashi'ego ich zastosowanie w teorii punktów stałych przekształceń k_D-nieoddlających, a w szczególnośći przekształceń holomorficznych (prace [B 12], [B 13], [B 14], [B 15], [B 16], [B 17], [B 18], [B 19], [B 20], [B 21], [B 22], [B 23], [B 24], [B 26], [B 27]).

1) Własności przestrzeni Banacha i ich zastosowanie w teorii punktów stałych przekształceń jednakowo lipschitzowskich

Zanim omówię wyniki podane w tych pracach muszę wprowadzić parę definicji. Zacznę od definicji asymptotycznego centrum.

Definicja 4.1. *([53]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha i niech $C \subset X$ będzie niepustym zbiorem. Jeżeli $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ ($\{x_\beta\}_{\beta\in J}$) jest ograniczonym ciągiem (ciągiem uogólnionym) w C, to asymptotyczny promień $r_a(\{x_n\}, C)$ ($r_a(\{x_\beta\}_{\beta\in J}, C)$) ciągu (ciągu uogólnionego) $\{x_n\}$ ($\{x_\beta\}_{\beta\in J}$) względem zbioru C jest wprowadzony wzorem*

$$r_a(\{x_n\}, C) = \inf\{r_a(\{x, \{x_n\}\}) = \limsup_n \|x - x_n\| : x \in C\}$$

$$\left(r_a(\{x_\beta\}_{\beta\in J}, C) = \inf\{r_a(\{x, \{x_\beta\}_{\beta\in J}\}) = \limsup_{\beta\in J} \|x - x_\beta\| : x \in C\}\right).$$

Zbiór

$$Ac(\{x_n\}, C) = \{x \in C : r_a(x, \{x_n\}) = \limsup_n \|x - x_n\| = r_a(\{x_n\}, C)\}$$

$$\left(Ac(\{x_\beta\}_{\beta\in J}, C) = \{x \in C : r_a(x, \{x_\beta\}_{\beta\in J}) = \limsup_{\beta\in J} \|x - x_\beta\| = r_a(\{x_\beta\}_{\beta\in J}, C)\}\right)$$

nazywamy asymptotycznym centrum ciągu (ciągu uogólnionego) $\{x_n\}$ ($\{x_\beta\}_{\beta\in J}$) ze względu na zbiór C.

Natomiast asymptotyczną średnicę ciągu $\{x_n\}$ *określamy następująco*

$$diam_{a,\|\cdot\|}(\{x_n\}) = \lim_k diam_{\|\cdot\|}\left(\{x_n\}_{n \geqslant k}\right).$$

Jeżeli $C = \overline{conv\left(\{x_n\}\right)}^{\|\cdot\|}$, *to asymptotyczny promień ciągu* $\{x_n\}$ *będę zapisywać krócej -* $r_a\left(\{x_n\}\right)$ *i podobnie* $Ac(\{x_n\})$ *będzie wtedy oznaczać asymptotyczne centrum ciągu* $\{x_n\}$.

W 1967 roku Z. Opial wprowadził własność przestrzeni Banacha nazwaną później jego imieniem ([119]). Była ona wtedy związana tylko z ciągami i ze słabą topologią. Ja potrzebowałam w swoich pracach jej ogólniejsze wersje.

Definicja 4.2. *(patrz np. [81] i [83]) Niech* $(X, \|\cdot\|)$ *będzie przestrzenią Banach i niech* $\mathcal{T}$ *będzie liniową topologią Hausdorffa w* X. *Będziemy mówić, że niepusty zbiór* $C \subset X$ *ma własność Opiala (własność Opiala dla ciągów uogólnionych) ze względu na topologię* $\mathcal{T}$, *gdy dla każdego ograniczonego ciągu* $\{x_n\}$ *o wyrazach w* C *(dla każdego ograniczonego ciągu uogólnionego* $\{x_\beta\}_{\beta \in J}$*) o wyrazach w* C, *który jest zbieżny w topologii* $\mathcal{T}$ *do* $x \in C$ *i* $y \in C \backslash \{x\}$, *prawdziwa jest nierówność*

$$r_a(x, \{x_n\}) = \limsup\nolimits_n \|x_n - x\| < r_a(y, \{x_n\}) = \limsup\nolimits_n \|x_n - y\|$$

$$\Big(r_a\left(x, \{x_\beta\}_{\beta \in J}\right) = \limsup\nolimits_{\beta \in J} \|x_\beta - x\| <$$

$$< r_a\left(y, \{x_\beta\}_{\beta \in J}\right) = \limsup\nolimits_{\beta \in J} \|x_\beta - y\|\Big)$$

dla każdego $y \in C \backslash \{x\}$.

Ponieważ w wielu zastosowaniach liniowe topologie są generowane przez odpowiednie rodziny ciągłych funkcjonałów liniowych to teraz definicję zbioru normującego Γ, którą się będziemy dalej posługiwać i która jest zawężeniem definicji 1.16.

Definicja 4.3. *([B 25]) Niech* $(X, \|\cdot\|)$ *będzie przestrzenią Banacha i niech* Γ *będzie podprzestrzenią przestrzeni sprzężonej* X^*. *Jeżeli dla każdego* $x \in X$ *mamy*

$$\sup\left\{f(x) : f \in \Gamma, \|f\| = 1\right\} = \|x\|.$$

to Γ *nazywamy zbiorem normującym dla* X.

Jest rzeczą oczywistą, że zbiór normujący Γ generuje liniową topologię Hausdorffa $\sigma(X, \Gamma)$ w X, która jest słabsza od słabej topologii $\sigma(X, X^*)$.

W [B 25] udowodniłam razem z T. Kuczumowem i M. Michalską następujące twierdzenie o równoważności własności Opiala dla ciągów z własnością Opiala dla ciągów uogólnionych.

Twierdzenie 4.1. *([B 25], Theorem 3.1) Niech* $(X, \|\cdot\|)$ *będzie przestrzenią Banacha,* Γ *zbiorem normującym dla* X *i niech* C *będzie niepustym, ograniczonym i ciągowo zwartym w topologii* $\sigma(X,\Gamma)$ *podzbiorem w* X*. Wtedy w topologii* $\sigma(X,\Gamma)$ *własność Opiala jest równoważna z własnością Opiala dla ciągów uogólnionych.*

Uwaga 4.1. *Dla słabej topologii twierdzenie 4.1 było udowodnione inną metodą przez W. Kaczor i S. Prusa w [72].*

W [B 28] razem z T. Kuczumowem i M. Michalską badałam wykorzystując własność Opiala dla ciągów uogólnionych strukturę zbioru wspólnych punktów stałych przekształceń nieoddalających. Udowodniliśmy w tej pracy następujące wyniki najpierw dla jednego odwzorowania, a później dla rodziny komutujących odwzorowań. W naszych twierdzeniach normą w iloczynie kartezjańskim $X_1 \times X_2$ dwóch przestrzeni Banacha $(X_1, \|\cdot\|_1)$ i $(X_2, \|\cdot\|_2)$ jest norma maksimum.

Twierdzenie 4.2. *([B 28] Theorem 3.3) Niech* $(X_1, \|\cdot\|_1)$ *i* $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *będą przestrzeniami Banacha z odpowiednio liniowymi topologiami Hausdorffa* $\mathcal{T}_1$ *i* $\mathcal{T}_2$*, i niech normy* $\|\cdot\|_1$ *i* $\|\cdot\|_2$ *w tych przestrzeniach Banacha będą dolnie półciągłe odpowiednio w tych topologiach* $\mathcal{T}_1$ *i* $\mathcal{T}_2$*. Niech niepuste, ograniczone i wypukłe zbiory* $C_1 \subset X_1$ *i* $C_2 \subset X_2$ *będą ciągowo zwarte odpowiednio w* $\mathcal{T}_1$ *i* $\mathcal{T}_2$*. Załóżmy, że* C_1 *ma własność Opiala względem topologii* $\mathcal{T}_1$*, a* C_2 *względem topologii* $\mathcal{T}_2$*. Jeżeli niepusty i wypukły podzbiór* C *iloczynu kartezjańskiego* $C_1 \times C_2$ *jest domknięty w topologii* $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$*, to* C *ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających, tzn. każde nieoddalające odwzorowanie* $f : C \to C$ *ma punkt stały.*

Twierdzenie 4.3. *([B 28], Theorem 3.4) Niech* $(X_1, \|\cdot\|_1)$ *i* $(X_2, \|\cdot\|_2)$ *będą przestrzeniami Banacha z odpowiednio liniowymi topologiami Hausdorffa* $\mathcal{T}_1$ *i* $\mathcal{T}_2$ *i niech normy* $\|\cdot\|_1$ *i* $\|\cdot\|_2$ *w tych przestrzeniach Banacha będą odpowiednio dolnie półciągłe w tych topologiach* $\mathcal{T}_1$ *i* $\mathcal{T}_2$*. Niech niepuste, ograniczone i wypukłe zbiory* $C_1 \subset X_1$ *i* $C_2 \subset X_2$ *będą zwarte odpowiednio w* $\mathcal{T}_1$ *i* $\mathcal{T}_2$*. Załóżmy, że* C_1 *ma własność Opiala dla ciągów uogólnionych względem topologii* $\mathcal{T}_1$*, a* C_2 *względem topologii* $\mathcal{T}_2$*. Jeżeli niepusty i wypukły podzbiór* C *iloczynu kartezjańskiego* $C_1 \times C_2$ *jest domknięty w topologii* $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$*, to* C *ma własność punktu stałego dla odwzorowań nieoddalających i dla każdego nieoddalającego odwzorowania* $f : C \to C$ *zbiór jego punktów stałych* $Fixf$ *jest nieoddalającym retraktem zbioru* C*.*

Twierdzenie 4.4. *([B 28], Theorem 4.2) Niech* $(X, \|\cdot\|)$ *będzie przestrzenią Banacha z liniową topologią Hausdorffa* $\mathcal{T}$ *i z własnością Opiala dla ciągów uogólnionych względem topologii* $\mathcal{T}$*. Niech norma* $\|\cdot\|$ *będzie* *dolnie półciągła w topologii $\mathcal{T}$. Jeżeli niepusty, ograniczony i wypukły zbiór $C \subset X$ jest zwarty w $\mathcal{T}$, to dla każdej komutującej rodziny $\mathcal{M} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ przekształceń nieoddalających zbioru C w siebie zbiór jej wspólnych punktów stałych $Fix(\mathcal{M}) = \bigcap_{\beta \in J} Fix(f_\beta)$ jest niepustym nieoddalającym retraktem zbioru C.*

W twierdzeniu 4.4 wystarczy założenie, że C ma własność Opiala dla ciągów uogólnionych względem topologii $\mathcal{T}$, a nie cała przestrzeń X.

Twierdzenie 4.5. *([B 28], Theorem 4.3) Niech $(X_1, \|\cdot\|_1)$ i $(X_2, \|\cdot\|_2)$ będą przestrzeniami Banacha z odpowiednio liniowymi topologiami Hausdorffa $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ i niech normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ w tych przestrzeniach Banacha będą odpowiednio dolnie półciągłe w tych topologiach $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$. Niech niepuste, ograniczone i wypukłe zbiory $C_1 \subset X_1$ i $C_2 \subset X_2$ będą zwarte odpowiednio w $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$. Załóżmy, że C_1 ma własność Opiala dla ciągów uogólnionych względem topologii $\mathcal{T}_1$, a C_2 względem topologii $\mathcal{T}_2$. Jeżeli niepusty, ograniczony i wypukły podzbiór C iloczynu kartezjańskiego $C_1 \times C_2$ jest domknięty w topologii $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$, to dla każdej komutującej rodziny $\mathcal{M} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ przekształceń nieoddalających zbioru C w siebie zbiór jej wspólnych punktów stałych $Fix(\mathcal{M}) = \bigcap_{\beta \in J} Fix(f_\beta)$ jest niepustym nieoddalającym retraktem zbioru C.*

Istotne jest tutaj to, że nasze wyniki dotyczą podzbioru C w iloczynie kartezjańskim $C_1 \times C_2$, a nie całego iloczynu kartezjańskiego $C_1 \times C_2$. Dlatego w dowodach stosuje się dwukrotnie asymptotyczne centrum, otrzymać domknięty zbiór w odpowiedniej topologii!

W pracach [B 8], [B 9], [B 10], [B 11] zawartych jest część wyników z mojej pracy doktorskiej. Zacznę od kilku definicji.

Definicja 4.4. *([21]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Ograniczony ciąg $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ w X spełniący warunek $x_n - x_{n+1} \to 0$ nazywamy ciągiem asymptotycznie regularnym.*

Definicja 4.5. *([21]) Będziemy mówić, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma asymptotyczną strukturę normalną (ze względu na słabą topologię), czyli ANS (w-ANS), jeżeli dla każdego ograniczonego, domkniętego (słabo zwartego) i wypukłego zbioru C w X z $\overline{\overline{C}} \geqslant 2$ i każdego asymptotycznie regularnego ciągu $\{x_n\}$ w C istnieje punkt $x \in C$, taki że*

$$\liminf_n \|x - x_n\| < diam_{\|\cdot\|}(C) .$$

W [B 10] wprowadziłam razem z T. Kuczumowem i S. Reichem współczynnik $AN(X)$.

Definicja 4.6. *([B 10]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Współczynnik asymptotycznej struktury normalnej $AN(X)$ dany jest wzorem*

$$AN(X) = \sup\{k : k \cdot \inf_{\{x_{n_i}\}_{i\geqslant 1}} r_a\left(\{x_{n_i}\}_{i\geqslant 1}\right) \leqslant diam_{a,\|\cdot\|}(\{x_n\})$$

$$\textit{dla każdego ograniczonego ciągu } \{x_n\}_{n\geqslant 1} \ z \ x_n - x_{n+1} \to 0\}.$$

Współczynnik ten "mierzy" minimalną odległość podciągów asymptotycznie regularnych ciągów do najbliższego punktu.

Jeżeli w definicji współczynnika $AN(X)$ dodamy założenie, że dla ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ jego domknięta otoczka wypukła $\overline{conv}\left(\{x_n\}_{n\geqslant 1}\right)$ jest zbiorem słabo zwartym, to dostaniemy następny współczynnik.

Definicja 4.7. *([B 10]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Współczynnik dany wzorem*

$$w\text{-}AN(X) = \sup\{k : k \cdot \inf_{\{x_{n_i}\}_{i\geqslant 1}} r_a\left(\{x_{n_i}\}_{i\geqslant 1}\right) \leqslant diam_{a,\|\cdot\|}(\{x_n\})$$

dla każdego ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, takiego że jego domknięta wypukła otoczka

$$\overline{conv\left(\{x_n\}_{n\geqslant 1}\right)}^{\|\cdot\|} \textit{ jest zbiorem słabo zwartym i} x_n - x_{n+1} \to 0\}$$

nazywamy współczynnikiem asymptotycznej struktury normalnej ze względu na słabą topologię.

Definicja 4.8. *([B 10]) Gdy $AN(X) > 1$, to mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma jednostajną asymptotyczną strukturę normalną, krótko ma UAN.*

Gdy $w\text{-}AN(X) > 1$, to mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma jednostajną asymptotyczną strukturę normalną ze względu na słabą topologię, krótko ma $w\text{-}UAN$.

Definicja 4.9. *([B 10]) Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma prawie własność Opiala (prawie własność Opiala ze względu na słabą topologię), krótko ma własność SO ($w\text{-}SO$), jeżeli dla każdego ograniczonego i asymptotycznie regularnego ciągu $\{x_n\}$ (ze słabo zwartą domkniętą wypukłą otoczką), który nie jest ciągiem stałym, istnieje podciąg $\{x_{n_i}\}$ zbieżny słabo do x, taki że*

$$\liminf_n \|x - x_n\| < diam(\{x_n\}).$$

W [B 8] udowodniliśmy następujące twierdzenie o punkcie stałym odwzorowań nieoddalających w sumie dwóch zbiorów.

Twierdzenie 4.6. *([B 8]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha mającą w-SO i niech C_1 i C_2 będą dwoma wypukłymi i słabo zwartymi zbiorami w X z niepustym przecięciem $C_1 \cap C_2$. Wtedy każde nieoddalające przekształcenie $f : C_1 \cup C_2 \to C_1 \cup C_2$ ma punkt stały.*

Przejdźmy teraz do następnych współczynników charakteryzujących przestrzeń Banacha.

Definicja 4.10. *([B 10]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Podobnie jak poprzednio możemy dla tej przestrzeni wprowadzić współczynnik w-SOC prawie własności Opiala ze względu na słabą topologię:*

$$w\text{-}SOC\,(X) = \sup\{k : k\cdot \inf_{\{x_{n_i}\}_{i\geqslant 1}, x_{n_i} \rightharpoonup y} r_a\left(y, \{x_{n_i}\}_{i\geqslant 1}\right) \leqslant diam_{a,\|\cdot\|}\left(\{x_n\}\right)$$

$$\textit{dla każdego ciągu } \{x_n\}_{n\geqslant 1}\,, \textit{ takiego że}$$

$$\overline{conv\left(\{x_n\}_{n\geqslant 1}\right)}^{\|\cdot\|} \textit{ jest zbiorem słabo zwartym i } x_n - x_{n+1} \to 0\}.$$

Współczynnik $w\text{-}SOC\,(X)$ "mierzy" minimalną odległość od słabej granicy słabo zbieżnych podciągów asymptotycznie regularnych ciągów.

Definicja 4.11. *([B 10]) Jeżeli $w\text{-}SOC\,(X) > 1$, to przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma jednostajną prawie własność Opiala ze względu na słabą topologię, krótko ma w-USO.*

W pracach [B 9] i [B 10] pokazaliśmy związki pomiędzy wyżej wymienionymi własnościami przestrzeni Banacha, a także między nimi innymi wcześniej znanymi własnościami oraz związki między wyżej zdefiniowanymi współczynnikami. Zajęliśmy się też problemem zachowania się tych własności w iloczynie kartezjańskim przestrzeni i problemem związku między współczynnikami dwóch przestrzeni i odległością Banacha Mazura między tymi przestrzeniami.

W pracy [B 11] przedstawiono kilka twierdzeń o punktach stałych półgrup przekształceń asymptotycznie regularnych i jednakowo k-lipschitzowskich. Zanim je przedstawię podam dwie definicje. Będę potrzebować ogólniejszej definicji półgrupy niż ta podana w rozdziale 2 (definicja 2.7).

Definicja 4.12. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha, C niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym zbiorem w X, G nieograniczonym zbiorem w $[0, \infty)$, takim że*

$$t + h \in G \textit{ dla wszystkich } t, h \in G,$$

$$t - h \in G \textit{ dla wszystkich } t, h \in G \textit{ z } t \geqslant h,$$

i niech $S = \{f_t : t \in G\}$ *będzie rodziną odwzorowań zbioru* C *w* C. *Rodzinę* S *nazywamy półgrupą odwzorowań, gdy* S *spełnia warunki:*

i) $f_{s+t}(x) = (f_s \circ f_t)(x)$ *dla wszystkich* $s, t \in G$ *i* $x \in C$,
ii) *dla każdego* $x \in C$, *odwzorowanie* $t \to f_t(x)$ *z* G *w* C *jest ciągłe przy topologii w* G *generowanej przez standardową topologię w* $[0, \infty)$.

Jeżeli dla półgrupy S *istnieje dodatkowo liczba* $k > 0$, *taka że*

$$\|f_t(x) - f_t(y)\| \leqslant k\, \|x - y\|$$

dla wszystkich $x, y \in C$ *i* $t \in G$, *to mówimy, że* S *jest półgrupą przekształceń jednakowo lipschitzowskich (k-lipschitzowskich) na zbiorze* C.

Jeżeli dla półgrupy S *mamy*

$$\lim_{t\to\infty} \|f_{t+h}(x) - f_t(x)\| = 0,$$

dla wszystkich $x \in C$ *i* $h \in G$, *to mówimy, że półgrupa* S *jest asymptotycznie regularna ([20]).*

Definicja 4.13. *([49], [B 11]) Jeżeli* $(X, \|\cdot\|)$ *jest przestrzenią Banach i* $C \subset X$ *jest zbiorem niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym, to*

i) *liczba* $b \geqslant 0$ *ma własność* (P_ω) *ze względu na zbiór* C, *gdy istnieje liczba* $a > 1$, *taka że dla wszystkich* $x, y \in C$ *i* $r > 0$ *z* $\|x - y\| \geqslant r$ *oraz dla każdego słabo zbieżnego ciągu* $\{z_n\}$ *o wyrazach z* C *i spełniającego warunki* $\limsup_n \|x - z_n\| \leqslant ar$ *i* $\limsup_n \|y - z_n\| \leqslant br$ *istnieje* $z \in C$ *dla którego mamy* $\liminf_n \|z - z_n\| \leqslant r$;
ii) $\kappa_\omega(C) = \sup\{b > 0 : b$ *ma własność* (P_ω) *ze względu na zbiór* $C\}$;
iii) $\kappa_\omega(X) = \inf\{\kappa_\omega(C) : C$ *jest niepustym, domkniętym, ograniczonym i wypukłym zbiorem w* $X\}$.

Następujące twierdzenia są dwoma głównymi twierdzeniami o punktach stałych w [B 11].

Twierdzenie 4.7. *([B 11], Theorem 3.3) Niech* C *będzie wypukłym i słabo zwartym zbiorem w przestrzeni Banacha* $(X, \|\cdot\|)$ *z* $w\text{-}SOC(X) > 1$. *Wtedy każda asymptotycznie regularna półgrupa* $S = \{f_t : t \in G\}$ *k-lipschitzowskich przekształceń zbioru* C *w siebie z* $k < [w\text{-}SOC(X)]^{\frac{1}{2}}$ *ma wspólny punkt stały.*

Twierdzenie 4.8. *([B 11] Theorem 3.4) Niech* $(X, \|\cdot\|)$ *będzie przestrzenią Banacha z* $w\text{-}SOC(X) > 1$, C *wypukłym i słabo zwartym zbiorem w* X *i niech* $S = \{f_t : t \in G\}$ *będzie asymptotycznie regularną* *półgrupą k-lipschitzowskich przekształceń zbioru C w siebie. Jeżeli*

$$k < \frac{1+\sqrt{1+4\cdot[w\text{-}SOC\,(X)]\cdot(\kappa_\omega\,(X)-1)}}{2},$$

to S ma wspólny punkt stały.

2) Własności liniowo-topologiczne odległości Kobayashiego i ich zastosowanie w teorii punktów stałych przekształceń k_D-nieoddlających, a w szczególnośći przekształceń holomorficznych

Zacznę od omówienia mojej pierwszej pracy [B 12] z tego tematu, którą napisałam wspólnie z T. Kuczumowem i T. Sękowskim. W 1958 roku A. Alexiewicz ([7], patrz także [8]) wprowadził pojęcie zbioru totalnego dla przestrzeni Banacha i przy jego pomocy scharakteryzował odwzorowania holomorficzne w podobny sposób do tego przy użyciu zbioru normującego $\mathcal{N}$ (twierdzenie 1.5).

Definicja 4.14. *([7]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha i niech $\mathcal{T}$ będzie niepustym zbiorem w przestrzeni sprzężonej X^* (tzn. przestrzeni wszystkich ciągłych funkcjonałów liniowych na X). Jeżeli z warunku $u(x) = 0$ dla każdego $u \in \mathcal{T}$ wynika $x = 0$, to rodzinę $\mathcal{T}$ nazywamy totalną dla X.*

Zbiór totalny, podobnie jak zbiór normujący, generuje liniową topologię Hausdorffa $\sigma(X, \mathcal{T})$ w X. Okazuje się, że dla topologii $\sigma(X, \mathcal{T})$ można udowodnić wyniki podobne do twierdzeń 1.6 i 1.7.

Głównym twierdzeniem w pracy [B 12] jest twierdzenie o dolnej półciągłości odległości Kobayashiego względem topologii $\sigma(X, \mathcal{T})$.

Twierdzenie 4.9. *([B 12 Theorem 3.1) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha, $\mathcal{T}$ zbiorem totalnym dla X i niech $D \subset X$ będzie ograniczonym i wypukłym obszarem, takim że jego domknięcie $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ w normie $\|\cdot\|$ jest zwarte w topologii $\sigma(X, \mathcal{T})$. Jeżeli $\{x_\beta\}_{\beta\in J}$ i $\{y_\beta\}_{\beta\in J}$ są uogólnionymi ciągami w D i są one zbieżne w topologii $\sigma(X, \mathcal{T})$ odpowiednio do $x \in D$ i $y \in D$, to prawdziwa jest nierówność*

$$k_D(x, y) \leqslant \liminf_{\beta\in J} k_D(x_\beta, y_\beta).$$

Jeżeli rozważamy tylko ciągi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, to zwartość w topologii $\sigma(X, \mathcal{T})$ zbioru $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ może być zastąpiona przez ciągową zwartość zbioru $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ w topologii $\sigma(X, \mathcal{T})$.

Jako wniosek otrzymujemy Lemma 4.1 w [B 12], który jest analogiem twierdzenia 1.7.

Lemat 4.1. *Niech D_1, D_2 będą ograniczonymi i wypukłymi obszarami odpowiednio w przestrzeniach Banacha $(X_1, \|\cdot\|_1)$ i $(X_2, \|\cdot\|_2)$, i niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem totalnym dla $(X_2, \|\cdot\|_2)$. Jeżeli $\overline{D_2}^{\|\cdot\|_2}$ jest zbiorem zwartym w topologii $\sigma(X_2, \mathcal{T})$, $\{f_\lambda\}_{\lambda \in J}$ jest ciągiem uogólnionym odwzorowań $f_\lambda : D_1 \to D_2$ nieoddalających ze względu na odległość Kobayashiego, który jest punktowo zbieżny w topologii $\sigma(X_2, \mathcal{T})$ do funkcji $f : D_1 \to \overline{D_2}^{\|\cdot\|_2}$ i istnieje punkt $z_0 \in D_1$, taki że $w_0 = f(z_0) \in D_2$, to f odwzorowuje D_1 w D_2 i jest nieoddalające ze względu na odległość Kobayashiego.*

Aby otrzymać otrzymać wynik silniejsze od tego z lematu 1.5 musimy wprowadzić własność Kadeca-Klee'ego przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ze względu na topologię $\sigma(X, \mathcal{T})$.

Definicja 4.15. *([10], [57], [81]) Niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem totalnym dla przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Mówimy, że przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ ma własność Kadeca-Klee'ego ze względu na topologię $\sigma(X, \mathcal{T})$, gdy dla każdego ciągu $\{x_k\}$ w X prawdziwa jest następująca implikacja*

$$\left.\begin{array}{l} \|x_k\| \leqslant 1 \\ \operatorname{sep}\{x_k\} = \inf\{\|x_k - x_j\| : j \neq k\} > 0 \\ \sigma(X, \mathcal{N}) - \lim_{k\to\infty} x_k = x \end{array}\right\} \Rightarrow \|x\| < 1.$$

Możemy teraz wypowiedzieć nasz lemat.

Lemat 4.2. *([B 12] Lemma 4.2) Niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem totalnym w ściśle wypukłej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, B otwartą kulą jednostkową w $(X, \|\cdot\|)$, taką że jej domknięcie w normie $\overline{B}^{\|\cdot\|}$ jest ciągowo zwarte w topologii $\sigma(X, \mathcal{T})$. Jeżeli $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ są ciągami w B, ciąg $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|$ do $\xi \in \partial B$ i*

$$\sup\{k_B(x_k, y_k) : k = 1, 2, ...\} = c < \infty,$$

to $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jest także silnie zbieżny do ξ.

Opierając się na twierdzeniu 2.9 i ostatnim lemacie udowodniliśmy w [B 12] następujące twierdzenie o lokalnej jednostajnej zbieżności ciągu iteracyjnego w twierdzeniu Wolffa-Denjoya.

Twierdzenie 4.10. *([B 12] Theorem 4.2) Niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem totalnym w ściśle wypukłej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, B otwartą kulą jednostkową w $(X, \|\cdot\|)$, taką że domknięcie w normie $\overline{B}^{\|\cdot\|}$ jest ciągowo zwarte w topologii $\sigma(X, \mathcal{T})$. Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ ma własność Kadeca-Klee'ego ze względu na topologię $\sigma(X, \mathcal{T})$ i odwzorowanie $f : B \to B$ jest k_B-nieoddalające i kondensujące ze względu na miarę niezwartości Kuratowskiego $\alpha_{\|\cdot\|}$ oraz f nie ma punktu stałego, to istnieje punkt $\xi \in \partial B$,* *taki że ciąg iteracji $\{f^n\}$ odwzorowania f jest zbieżny lokalnie jednostajnie do funkcji stałej o wartości równej ξ, tzn. zbieżność ta jest jednostajna na każdym zbiorze leżącym ściśle wewnątrz kuli B.*

Był to mój zresztą pierwszy wynik związany z uogólnieniami klasycznego twierdzenia Wolffa-Denjoya.

Znaczącą rolę w moich dalszych badaniach odegrały prace związane ze ścisłą liniową wypukłością kul w (D, k_D). Okazuje się, że gdy obszar D jest ściśle wypukły w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$, to mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.11. *([B 19] Theorem 3.1) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej i refleksywnej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli D jest ściśle wypukłe, to każda kula w przestrzeni metrycznej (D, k_D) jest także liniowo ściśle wypukła.*

W $\mathbb{C}^n$ twierdzenie to zostało udowodnione w 1984 roku przez G. Patrizio przy dodatkowym założeniu o brzegu ∂D, że jest klasy C^∞ i że Hessian funkcji definiującej jest dodatni na brzegu ∂D, ([121] Corollary 5.5). Następnie twierdzenie to zostało uogólnione (po zastosowaniu innego dowodu) do obszarów silnie wypukłych o brzegu klasy C^2 w $\mathbb{C}^n$ przez A. Stachurę ([144]). Ostatecznie w 1999 roku J.-P. Vigué pokazał, że twierdzenie 5.11 jest prawdziwe w $\mathbb{C}^k$ ([152]) bez założenia gładkości brzegu. W 2001 roku udowodniłam razem z T. Kuczumowem twierdzenie 5.11 wzorując się na dowodach danych w pracach [47], [152] i [144] oraz stosując własność aRNP przestrzeni refleksywnej. Okazało się, że niemal jednocześnie udowodnił je J.-P. Vigue ([153]), ale o tym wtedy nie wiedziałam - później zawsze cytuję jego pracę.

W [B 26] (jest to wspólna praca z T. Kuczumowem) uogólniono twierdzenie 5.11 następująco.

Twierdzenie 4.12. *([B 26] Theorem 2.9) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha, $\mathcal{N}$ zbiorem normującym dla X i niech $D \subset X$ będzie ściśle wypukłym obszarem, takim, że jego domknięcie w normie $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ jest zwarte w $\sigma(X, \mathcal{N})$. Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ ma aRNP, to każda kula w przestrzeni metrycznej (D, k_D) jest liniowo ściśle wypukła.*

W pracy [B 15] wspólnie z T. Kuczumowem i A. Stachurą podałam przykład ograniczonego i wypukłego obszaru $D \subset \mathbb{C}$, który nie jest ściśle wypukły i jednocześnie każda kula w (D, k_D) jest liniowo ściśle wypukła i stąd mamy definicję 3.1.

W pracach [B 15], [B 19] i [B 26] pojęcie ścisłej wypukłości przestrzeni metrycznej (D, k_D) zostało użyte w twierdzeniach stwierdzających, że niepusty zbiór (wspólnych) punktów stałych odwzorowania (rodziny odwzorowań) jest odpowiednio holomorficznym lub k_D-nieoddalającym retraktem. Metoda Brucka ([22], [23]) była główny narzędziem w dowodach tych twierdzeń. Podam teraz przykładowe twierdzenie tego typu.

Twierdzenie 4.13. *([B 26] Theorem 3.2) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha, $\mathcal{N}$ zbiorem normującym dla X i niech $D \subset X$ będzie wypukłym obszarem, takim że jego domknięcie w normie $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ jest zwarte w $\sigma(X, \mathcal{N})$. Załóńy, że przestrzeń metryczna (D, k_D) jest liniowo ściśle wypukła. Jeżeli odwzorowanie $f : D \to D$ jest k_D-nieoddalające (holomorficzne), to zbiór punktów stałych $Fix(f)$ jest albo zbiorem pustym albo k_D-nieoddalającym (holomorficznym) retraktem obszaru D.*

Przejdę teraz do opisu zbioru punktów stałych w iloczynie kartezjańskim przestrzeni Banacha.

W mojej pracy [B 14] udowodniłam najpierw następujące własności Opiala w kuli Hilberta B_H i w iloczenie kartezjańskim B_H^n kul Hilberta (patrz także [60]).

Twierdzenie 4.14. *([B 14] Proposition 3.1) Jeżeli ograniczony w k_{B_H} ciąg uogólniony $\{x_j\}_{j\in J}$ o wyrazach w (B_H, k_{B_H}) jest słabo zbieżny do $x \in B_H$, to*

$$\limsup_j k_{B_H}(x_j, x) < \limsup_j k_{B_H}(x_j, y)$$

dla każdego $y \in B_H \setminus \{x\}$.

Wniosek 4.1. *([B 14] Corollary 3.1) Przestrzeń metryczna $\left(B_H^n, k_{B_H^n}\right)$ ma słabą własność Opiala (ze względu na słabą topologię w H^n) dla ciągów uogólnionych, tzn. jeżeli ograniczony w $\left(B_H^n, k_{B_H^n}\right)$ ciąg uogólniony jest słabo zbieżny do $x \in B_H^n$, to*

$$\limsup_j k_{B_H^n}(x_j, x) \leqslant \limsup_j k_{B_H^n}(x_j, y)$$

dla każdego $y \in B_H^n$.

Mamy też następujące twierdzenie należące do T. Kuczumowa.

Twierdzenie 4.15. *([95]) Dana jest rodzina $\{f_1, ..., f_m\}$ złożona z m komutujących $k_{B_H^n}$-nieoddalających (holomorficznych) odwzorowań z B_H^n w B_H^n, taka że $Fix(f_j) \neq \emptyset$ dla $1 \leqslant j \leqslant m$. Wtedy zbiór wspólnych punktów stałych tej rodziny $\bigcap_{j=1}^m Fix(f_j)$ jest niepusty i jest $k_{B_H^n}$-nieoddalającym (holomorficznym) retraktem obszaru B_H^n.*

To wszystko oraz dolna półciągłość odległości Kobayashiego $k_{B_H^n}$ względem słabej topologii (patrz twierdzenie 1.6) pozwoliło mi w po zastosowaniu metody Brucka ([23]) i metody asymptotycznego centrum udowodnić twierdzenie o zbiorze wspólnych punktów stałych komutującej rodziny przekształceń w B_H^n.

Twierdzenie 4.16. *([B 14] Theorem 4.2) Dla każdej komutującej rodziny $\mathcal{F} = \{f_\beta\}_{\beta \in I}$ holomorficznych ($k_{B_H^n}$-nieoddalających) odwzorowań z B_H^n w B_H^n z niepustym zbiorem $Fix(\mathcal{F}) = \bigcap_{\beta \in I} Fix(f_\beta)$ wspólnych punktów stałych, zbiór $Fix(\mathcal{F})$ jest holomorficznym ($k_{B_H^n}$-nieoddalającyme) retraktem obszaru B_H^n.*

W pracy [B 18] podaję rozwiązanie następującego problemu w teorii punktów stałych przekształceń holomorficznych ściśle związanego z B_H^n: czy istnieje zespolona przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$, taka że

i) $\dim X = \infty$,
ii) otwarta kula jednostkowa B w $(X, \|\cdot\|)$ nie jest holomorficznie równoważna kartezjańskiemu iloczynowi $\prod_{j=1}^m B_{H_j}$ skończonej liczby kul Hilberta,
iii) każde holomorficzne przekształcenie f otwartej kuli B w siebie ma punkt stały wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f^n(x)\| < 1$ dla pewnego $x \in B$?

Warto tutaj przypomnieć, że gdy J jest nieskończonym zbiorem indeksów,

$$l^\infty(H) = \left\{ x = \{x_j\}_{j\in J} \in \prod_{j\in J} H : \sup_{j\in J} \|x_j\| < \infty \right\},$$

i B_H^∞ jest otwartą kulą jednostkową w $l^\infty(H)$ z normą supremum, to B_H^∞ nie jest holomorficznie równoważne kartezjańskiemu iloczynowi $\prod_{j=1}^m B_{H_j}$ skończonej liczby kul Hilberta i że istnieje holomoficzne odwzorowanie f z B_H^∞ w B_H^∞, które nie ma punktu stałego i jednocześnie mamy $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f^n(x)\| < 1$ dla każdego $x \in B_H^\infty$ ([99], [101]).

W mojej pracy [B 18] pokazałam, że iloczyn kartezjański $l^2 \times l^2$ z l^p-normą $\|\cdot\|$, gdzie $1 < p < \infty$ i $p \neq 2$, ma podane wyżej własności i) - iii). Aby uzyskać iii) wprowadziłam tutaj po raz pierwszy pojęcie lokalnie jednostajnej liniowej wypukłości odległości Kobayashiego k_{B_H}. Udowodniłam bowiem, używając ścisłej wypukłości kuli i sprowadzając rozważania do przestrzeni o wymiarze 6, następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.17. *([B 18] Theorem 3.1) Jeżeli B jest otwartą kulą jednostkową w iloczynie kartezjańskim $l^2 \times l^2$ z l^p-normą, gdzie $1 < p < \infty$ i $p \neq 2$, to przestrzeń metryczna (B, k_B) jest lokalnie jednostajnie* *liniowo wypukła, tzn. dla każdych* $z \in B$*,* $R > 0$ *i* $0 < \epsilon < 2$ *mamy*

$$\left.\begin{array}{l} k_B(z,x) \leqslant R \\ k_B(z,y) \leqslant R \\ k_B(x,y) = \epsilon R \end{array}\right\} \Rightarrow k_B\left(z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant (1 - \delta(z,R,\epsilon)) R$$

i

$$\delta(R_1, R_2, R_3, \epsilon_1, \epsilon_2)$$

$$= \inf\{\delta(z,R,\epsilon) : \epsilon_1 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon_2, \quad \|z\| \leqslant R_1 \quad R_2 \leqslant R \leqslant R_3\} > 0$$

dla wszystkich $0 < R_1$*,* $0 < R_2 \leqslant R_3$ *i* $0 < \epsilon_1 \leqslant \epsilon_2 < 2$*.*

Stąd dostałam twierdzenie pomocnicze.

Twierdzenie 4.18. *([B 18] Proposition 3.1) Niech* B *będzie otwartą kulą jednostkową w iloczynie kartezjańskim* $l^2 \times l^2$ *z* l^p*-normą, gdzie* $1 < p < \infty$ *i* $p \neq 2$*. Wtedy każdy* k_B*-ograniczony ciąg* $\{x_n\}$ *w* B *ma jedyne asymptotyczne centrum względem niepustego* k_B*-dmkniętego i wypukłego podzbioru* C *kuli* B*.*

Ostatecznie stosując metodę asymptotycznego centrum otrzymałam żądany wynik.

Twierdzenie 4.19. *([B 18] Theorem 4.1) Niech* B *będzie otwartą kulą jednostkową w iloczynie kartezjańskim t* $l^2 \times l^2$ *z* l^p*-normą, gdzie* $1 < p < \infty$ *i* $p \neq 2$*, i niech* $f : B \to B$ *będzie* k_B*-nieoddalającym odwzorowaniem. Wtedy następujące zdania są równoważne*

i) f *ma punkt stały;*
ii) *istnieje punkt* x *w* B*, taki że ciąg iteracji* $\{f^n(x)\}$ *jest* k_B*-ograniczony;*
iii) *ciąg iteracji* $\{f^n(x)\}$ *jest* k_B*-ograniczony dla każdego* x *w* B*;*
iv) *istnieje* k_B*-ograniczony ciąg aproksymacyjny* $\{x_n\}$ *dla* f*, tzn.* $\|x_n - f(x_n)| \to 0$ *i* $\{x_n\}$ *jest ciągiem* k_B*-ograniczonym;*
v) *istnieje domknięta i* f*-niezmiennicza kula w* (B, k_B)*;*
vi) *istnieje niepusty, domknięty, wypukły,* k_B*-ograniczony i* f*-niezmienniczy podzbiór* C *kuli* B*.*

Okazuje się, że wprowadzone przeze mnie w twierdzeniu 4.17 własność lokalnie jednostajnej liniowej wypukłości przestrzeni metrycznej (B, k_B) mogłam uogólnić do wypukłego i ograniczonego obszaru D w zespolonej przestrzeni Banacha i ta własność odgrywa kluczową rolę w badaniach struktury wspólnych punktów stałych przekształceń pewnych obszarów w siebie w iloczynach kartezjańskich zespolonych przestrzeni Banacha z normą supremum.

Definicja 4.16. *([B 16]) Niech D będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w zespolonej przestrzeni Banacha. Przestrzeń metryczna (D, k_D) jest lokalnie jednostajnie liniowo wypukła, gdy istnieje $w \in D$ i funkcja*

$$\delta(w, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$$

taka że dla każdych $R_1 > 0$, $z \in D$ z $k_D(w, z) \leqslant R_1$, $0 < R_2 \leqslant R \leqslant R_3$ i $0 < \epsilon_1 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon_2 < 2$ mamy

$$\delta\left(w, R_1, R_2, R_3, \epsilon_1, \epsilon_2\right) > 0$$

i

$$\left.\begin{array}{l} k_D\left(z, x\right) \leqslant R \\ k_D\left(z, y\right) \leqslant R \\ k_D\left(x, y\right) = \epsilon R \end{array}\right\} \Rightarrow k_D\left(z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \left(1 - \delta\left(w, R_1, R_2, R_3, \epsilon_1, \epsilon_2\right)\right) R.$$

Funkcję $\delta(w, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ nazywamy modułem liniowej wypukłości dla odległości Kobayashiego (dla przestrzeni metrycznej (D, k_D) lub równoważnie dla obszaru D).

Uwaga 4.2. *W powyższej definicji możemy zastąpić równość $k_D\left(x, y\right) = \epsilon R$ dla $0 < \epsilon_1 \leqslant \epsilon \leqslant \epsilon_2 < 2$ przez nierówność $k_D\left(x, y\right) \geqslant \epsilon R$ dla $0 < \epsilon_1 \leqslant \epsilon < 2$ i oczywiście mamy wtedy moduł liniowej wypukłości $\left\{\delta_1\left(w, R_1, R_2, R_3, \epsilon_1\right)\right\}$ zamiast $\left\{\delta\left(w, R_1, R_2, R_3, \epsilon_1, \epsilon_2\right)\right\}$.*

Dalej w definicji 4.16 punkt $w \in D$ możemy zastąpić dowolnym innym punktem z D. W przypadku otwartych kul jednostkowych mamy też inną równoważną definicję.

Definicja 4.17. *([B 27]) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha i niech B_X będzie otwartą kulą jednostkową w $(X, \|\cdot\|)$. Przestrzeń metryczna (B_X, k_{B_X}) jest lokalnie jednostajnie liniowo wypukła, gdy dla każdych $x, y, z \in B_X$, $R > 0$ i $0 < \epsilon \leqslant 2$ mamy*

$$\left.\begin{array}{r} k_{B_X}\left(z, x\right) \leqslant R \\ k_{B_X}\left(z, y\right) \leqslant R \\ k_{B_X}\left(x, y\right) \geqslant \epsilon R \end{array}\right\} \Rightarrow k_{B_X}\left(z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leqslant \left(1 - \tilde{\delta}_X\left(z, R, \epsilon\right)\right) R$$

i

$$\tilde{\delta}_X\left(R_1, R_2, R_3, \epsilon\right) = \inf\left\{\tilde{\delta}_X\left(z, R, \epsilon\right) : \|z\| \leqslant R_1, \quad R_2 \leqslant R \leqslant R_3\right\} > 0$$

dla wszystkich $0 < \epsilon \leqslant 2$, $0 < R_1 < 1$, $0 < R_2 \leqslant R_3$. Funkcja $\tilde{\delta}_X\left(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot\right)$ jest nazywana modułem liniowej wypukłości dla odległości Kobayashiego k_{B_X}.

Definicja 4.18. *([B 27]) Niech J będzie nieskończonym zbiorem indeksów. Dla każdego $j \in J$ niech $(X_j, \|\cdot\|_j)$ i B_{X_j} będą odpowiednio zespoloną przestrzenią Banacha i otwartą kulą jednostkową. Jeżeli mamy*

$$\inf_{j \in J} \tilde{\delta}_{X_j}(R_1, R_2, R_3, \epsilon) > 0$$

dla wszystkich $0 < \epsilon \leqslant 2$, $0 < R_1 < 1$, $0 < R_2 \leqslant R_3$, to mówimy, że rodzina kul jednostkowych $\{(B_{X_j}, \|\cdot\|_j)\}_{j \in J}$ jest lokalnie jednakowo jednostajnie liniowo wypukła lub że rodzina ta ma wspólny moduł liniowej wypukłości.

Oczywiście pojęcie lokalnie jednostajnej liniowej wypukłości przestrzeni metrycznej (D, k_D) wzorowałam na pojęciu jednostajnej wypukłości przestrzeni Banacha wprowadzonemu przez J. A. Clarksona ([37]). Podobnie jak jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha jest przestrzenią refleksywną ([37], patrz także [57]) tak i z lokalnie jednostajnej liniowej wypukłości ograniczonego i wypukłego obszaru D w zespolonej przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$ wynika refleksywność tej przestrzeni Banacha.

Twierdzenie 4.20. *([B 27] Theorem 3.2) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha i niech $D \subset X$ będzie ograniczonym i wypukłym obszarem w $(X, \|\cdot\|)$. Jeżeli przestrzeń metryczna (D, k_D) jest lokalnie jednostajnie liniowo wypukła, to przestrzeń Banacha X jest refleksywna.*

Dowód tego twierdzenia jest prostym zastosowaniem następującego twierdzenia Šmuliana.

Twierdzenie 4.21. *([142]) Przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest refleksywna wtedy i tylko wtedy gdy każdy zstępujący ciąg $\{C_n\}$ niepustych, domkniętych, ograniczonych i wypukłych zbiorów w X ma niepuste przecięcie $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.*

W przypadku kuli mamy jeszcze lepszy rezultat.

Twierdzenie 4.22. *([B 17] Theorem 4.1) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha i niech B będzie otwartą kulą jednostkową w tej przestrzeni. Jeżeli przestrzeń metryczna (B, k_B) jest lokalnie jednostajnie liniowo wypukła, to przestrzeń Banacha $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią jednostajnie wypukłą.*

Okazuje się, że lokalnie jednakowo jednostajną liniową wypukłość rodziny kul jednostkowych $\{(B_{X_j}, \|\cdot\|_j)\}_{j \in J}$ można skutecznie wykorzystać w dowodach o istnieniu holomorficznej retrakcji na zbiór wspólnych punktów stałych komutującej rodziny przekształceń jednostkowej kuli otwartej w $l^\infty(X_j, J)$. Zanim omówię wyniki podam kilka potrzebnych definicji.

Najpierw wprowadzę zespoloną przestrzeń Banacha $l^\infty(X_j, J)$.

Definicja 4.19. *Niech J będzie nieskończonym zbiorem indeksów i niech $(X_j, \|\cdot\|_j)$ będzie zespoloną i refleksywną przestrzenią Banacha dla każdego $j \in J$. Zespoloną przestrzeń Banacha $l^\infty(X_j, J)$ wprowadzamy następująco*

$$l^\infty(X_j, J) = \{x = \{x_j\}_{j\in J} \in \prod_{j\in J} X_j : \sup_{j\in J} \|x_j\|_j < \infty\}$$

i $\|\cdot\|_\infty$ jest jest tutaj normą supremum. $B^\infty = B_{l^\infty(X_j,J)}$ będzie oznaczać jednostkową kulę otwartą w $(l^\infty(X_j, J), \|\cdot\|_\infty)$.

W $(l^\infty(X_j, J), \|\cdot\|_\infty)$ dodatkowo mamy topologię $\sigma(X, \mathcal{N})$ generowaną przez zbiór normujący

$$\mathcal{N} = \{x^* = \{x_j^*\} \in (l^\infty(X_j, J))^* : x_j^* \in X_j^* \text{ dla każdego } j \in J \text{ i istnieje } j' \in J,$$

$$\text{takie że } x_{j''}^* = 0 \text{ dla każdego } j" \neq j'\}.$$

W pierwszym podejściu ([B 22] - praca napisana wspólnie z T. Kuczumowem) do pokazania, że niepusty zbiór wspólnych punktów stałych ciągu komutujących $k_{B_H^\infty}$-nieoddalających przekształceń jest $k_{B_H^\infty}$-nieoddalającym retraktem kuli B_H^∞ zastosowałam metodę Brucka podaną w [24], w której przy konstrukcji odpowiednich odwzorowań (patrz dowód Lemma 3.1) używa się punktów wziętych z metrycznych odcinków w $(B_H^\infty, k_{B_H^\infty})$ i dlatego otrzymana w [B 22] retrakcja jest tylko $k_{B_H^\infty}$-nieoddalająca i to nawet, gdy badana rodzina odwzorowań składa się z holomorficznych odwzorowań. Podsumowując udowodniłam wtedy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.23. *([B 22] Theorem 3.3) Dla każdego ciągu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ komutujących i holomorficznych ($k_{B_H^\infty}$-nieoddalających) odwzorowań kuli B_H^∞ w siebie z pustym zbiorem $Fix(\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Fix(f_n)$ wspólnych punktów stałych, zbiór $Fix(\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ jest $k_{B_H^\infty}$-nieoddalającym retraktem kuli B_H^∞.*

Wynik ten nie był satysfakcjonujący mnie. Twierdzenie to było bowiem dalekie od ideału. Później w trakcie rozmów podczas konferencji w Japonii z M. A. Khamsim doszliśmy do wniosku, że należy zastosować jego twierdzenie z [82] w połączeniu metodę Brucka z pracy [24] . Aby to wyjaśnić potrzebuję kilku kluczowych definicji i faktów z metrycznej teorii punktów stałych.

Definicja 4.20. *([82]) Niech* (Y, d) *będzie przestrzenią i niech* $B_c(x, r)$ *będzie domkniętą kulą (w tej przestrzeni metrycznej) o środku w* $x \in Y$ *i promieniu* $r \geqslant 0$. *Dla każdego ograniczonego zbioru* $G \subset Y$ *mamy*

$$\begin{aligned} r_x(G) &= \sup\{d(y, x) : x \in G\}, \quad y \in Y, \\ r(G) &= \inf\{r_x(G) : x \in G\}, \\ \delta(G) &= diam_d(G) = \sup\{r_x(G) : x \in G\} \\ &= \sup\{d(x, y) : x, y \in G\} \end{aligned}$$

Liczbę $r(G)$ *nazywamy promieniem Chebysheva zbioru* G.
Dalej dla ograniczonego zbioru G *w* Y *mamy*

$$cov(G) = \bigcap\{B_c(y, r) : y \in Y, G \subset B_c(y, r)\}.$$

Będziemy mówić, że G *jest zbiorem dopuszczalnym, gdy* $G = cov(G)$, *tzn.* G *jest przecięciem kul domkniętych. Rodzinę wszystkich dopuszczalnych zbiorów w* Y *będziemy oznaczać przez* $\mathfrak{A}(Y)$.
Rodzinę $\mathcal{S} \subset 2^Y$ *nazywamy strukturą wypukłości, gdy*
(i) $\emptyset, Y \in \mathcal{S}$,
(ii) $\{y\} \in \mathcal{S}$ *dla każdego* $y \in Y$,
(iii) $\mathcal{S}$ *zawiera wszystkie kule domknięte w* Y,
(iv) $\mathcal{S}$ *jest rodziną domkniętą ze względu na przecięcia.*
Będziemy mówić, że struktura wypukłości $\mathcal{S}$ *w* Y *jest zwarta, gdy każdy zstępujący łańcuch niepustych zbiorów w* $\mathcal{S}$ *ma niepuste przecięcie.*
Mówimy, że struktura wypukłości $\mathcal{S}$ *jest normalna, gdy dla każdego* $G \in \mathcal{S}$ *mamy albo* $\delta(G) = 0$ *albo* $r(G) < \delta(G)$.

Zauważmy, że najmniejszą strukturą wypukłości jest rodzina $\mathfrak{A}(Y)$ złożona z wszystkich zbiorów dopuszczalnych w Y.
Następujące twierdzenie jest kluczowe w dowodzie naszego twierdzenia o zbiorze wspólnych punktów stałych.

Twierdzenie 4.24. *[82] Niech* (Y, d) *będzie ograniczoną przestrzenią metryczną ze strukturą wypukłości* S. *Jeżeli rodzina* S *jest zwarta i normalna, to każda komutująca rodzina* $\mathcal{F}$ *nieoddalających przekształceń zbioru* Y *w zbiór* Y *ma wspólny punkt stały.*

Łatwo zauważyć, że następujący lemat jest prawdziwy.

Lemat 4.3. *([B 24] Lemma 4.1) Niech* $G = \prod_{j \in J} G_j$ *będzie* $k_{B_H^\infty}$*-ograniczonym iloczynem kartezjańskim niepustych, domkniętych i* *wypukłych podzbiorów kuli. Wtedy rodzina $\mathfrak{A}(G)$ wszystkich dopuszczalnych zbiorów w przestrzeni metrycznej $(G, k_{B_H^\infty})$ jest zwarta i normalna.*

Używając powyższego lematu i twierdzenia 4.24 udowodniliśmy metodą Brucka ([23]) główne twierdzenie w [B 24].

Twierdzenie 4.25. *([B 24], Theorem 4.4) Dla każdej komutującej rodziny $\mathcal{F}$ holomorficznych ($k_{B_H^\infty}$-nieoddalających) odwzorowań kuli Hilberta B_H^∞ w nią samą z niepustym zbiorem punktów stałych $Fix(\mathcal{F})$, zbiór $Fix(\mathcal{F})$ jest holomorficznym ($k_{B_H^\infty}$-nieoddalającym) retraktem kuli Hilberta B_H^∞.*

Bardziej szczegółowe rozważania prowadzą do ogólniejszego twierdzenia.

Twierdzenie 4.26. *([B 27] Theorem 6.1) Niech J będzie nieskończonym zbiorem indeksów i niech $(X_j, \|\cdot\|_j)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha dla każdego $j \in J$. Załóżmy, że wszystkie jednostkowe kule otwarte $(B_{X_j}, k_{B_{X_j}})$ są lokalnie jednakowo jednostajnie liniowo wypukłe. Wtedy dla każdej komutującej rodziny $\mathcal{F}$ holomorficznych (k_{B^∞}-nieoddalających) odwzorowań z B^∞ do B^∞ z niepustym zbiorem punktów stałych $\mathrm{Fix}(\mathcal{F})$, zbiór $\mathrm{Fix}(\mathcal{F})$ jest holomorficznym (k_{B^∞}-nieoddalającym) retraktem kuli B^∞.*

Dwie ostatnie przeze mnie omawiane prace są trochę innego rodzaju. Zacznę od pracy [B 23]. Przypomnę najpierw pojęcie porowatości.

Definicja 4.21. *([41], [42], [43], [45]) Niech (Y, d) zupełną przestrzenią metryczną i niech $B_c(y, R)$ oznacza domkniętą kulę (w tej przestrzeni) o środku w $y \in Y$ i promieniu $R > 0$. Podzbiór $E \subset Y$ nazywamy porowatym w przestrzeni metrycznej (Y, d), gdy istnieje $\alpha \in (0, 1)$ i $R_0 > 0$, takie że dla każdego $R \in (0, R_0)$ i każdego $y \in Y$, istnieje punkt $z \in Y$ dla którego mamy*

$$B_c(z, \alpha R) \subset B_c(y, R) \backslash E.$$

Podzbiór zbioru Y nazywamy σ-porowatym w (Y, d), gdy jest przeliczalną sumą zbiorów porowatych w (Y, d).

Niech teraz $(X, \|\cdot\|)$ będzie zespoloną przestrzenią Banacha, $\mathcal{N}$ zbiorem normującym dla X i niech $D \subset X$ będzie ograniczonym i wypukłym obszarem, takim że jego domknięcie w normie $\overline{D}^{\|\cdot\|}$ jest zwarte w topologii $\sigma(X, \mathcal{N})$. Niech zbiór $\emptyset \neq C \subset D$ leży ściśle wewnątrz D. W [B 23] badamy zbieżność na C złożenia przeliczalnej liczby odwzorowań z C w C, które mają holomorficzne rozszerzenie na D. Wyposażając przestrzeń złożoną z ciągów takich odwzorowań w odpowiednią metrykę pokazujemy, że podzbiór składający się z wszystkich ciągów dla których wspomniane wyżej złożenie nie jest zbieżne jest σ-porowaty ([B 23], Theorem 3.1).

Wprowadźmy teraz następujące oznaczenie. Niech B_H będzie kulą Hilberta. Wtedy symbol $N(\overline{B_H^n}^{\|\cdot\|})$ oznacza rodzinę wszystkich ciągłych w normie odwzorowań $f : \overline{B_H^n}^{\|\cdot\|} \to \overline{B_H^n}^{\|\cdot\|}$, takich że $tf_{|B_H^n}$ jest dla każdego $0 < t < 1$ odwzorowaniem $k_{B_H^n}$- nieoddalającym ([95]). Rodzina ta zawiera wszystkie holomorficzne funkcje $f : B_H^n \to \overline{B_H^n}^{\|\cdot\|}$, które mają ciągłe w normie rozszerzenie na $\overline{B_H^n}^{\|\cdot\|}$ (([95]).).

W [138] I. Shafrir udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.27. *([138]) Komutująca rodzina $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ odwzorowań $N(\overline{B_H^n}^{\|\cdot\|})$ ma wspólny punkt stały w $\overline{B_H^n}^{\|\cdot\|}$.*

Zastosowanie podanego niżej lematu jest kluczowe w dowodzie twierdzenia Shafrira.

Lemat 4.4. *([138]) Niech $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ będzie k_{B_H}-nieograniczonym ciągiem uogólnionym B_H spełniającym warunek*

$$\sup_{\alpha\leqslant\beta}\{k_B(x_\alpha, x_\beta) - k_B(x, x_\beta)\} = R < +\infty$$

dla pewnego $x \in B$. Istnieje wtedy punkt $\xi \in \partial B$, taki że $\xi = \lim_\alpha x_\alpha$.

W swoim dowodzie lematu I. Shafrir zastosował twierdzenie cosinusów. W [B 13] (praca napisana wspólnie z T. Kuczumowem) podaję inny dowód opierając się tylko na podstawowych własnościach odległości Kobayashiego k_{B_H}.

Literatura

[1] M. Abate, Horospheres and iterates of holomorphic maps, Math. Z. 198, 225-238 (1988).

[2] M. Abate, Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds, Mediterranean Press, 1989.

[3] M. Abate, The infinitesimal generators of semigroups of holomorphic maps, Ann. Mat. Pura Appl. 161, 167-180 (1992).

[4] M. Abate, J. Raissy, Wolff-Denjoy theorems in non-smooth convex domains, preprint.

[5] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A .E. Rodkina, B. N. Sadovskii, Measures of noncompactness and condensing operators, Birkhäuser, 1992.

[6] A. G. Aksoy, M. A. Khamsi, Nonstandard Methods in Fixed Point Theory. With an introduction by W. A. Kirk, Universitext. Springer-Verlag, 1990.

[7] A. Alexiewicz, On certain "weak" properties of vector-valued functions, Studia Math. 17, 65-68 (1958).

[8] A. Alexiewicz, Functional analysis, PWN, 1969 (in Polish).

[9] N. Aronsztajn, Neuer Beweis der Streckenverbundenheit völlstandinger konvexer Räume, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums (Wien) 6, 45-56 (1935).

[10] J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides, G. López Acedo, Measures of noncompactness in metric fixed point theory, Birkhäuser, 1997.

[11] J. B. Baillon, R. Schöneberg, Asymptotic normal structure and fixed points of nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 81, 257-264 (1981).

[12] J. Banaś, K. Goebel, Measures of noncompactness in Banach spaces, Marcel Dekker, 1980.

[13] J. A. Barroso, Introduction to holomorphy, North Holland, 1985.

[14] A. F. Beardon, Iteration of contractions and analytic maps, J. London Math. Soc. 41, 141-150 (1990).

[15] A. F. Beardon, The dynamics of contractions, Ergodic Theory Dyn. Systems 17, 1257-1266 (1997).

[16] E. Berkson, H. Porta, semigroups of analytic functions and composition operators, Michigan Math. J. 25, 101-115 (1978).

[17] G. Birkhoff, Moore-Smith convergence in general topology, Ann. of Math. 38, 39-56 (1937).

[18] L. M. Blumenthal, Theory and Applications of Distance Geometry, The Clarendon Press, Oxford, 1953.

[19] L. M. Blumenthal, K. Menger, Studies in geometry, W. H. Freeman Co., San Francisco, 1970.

[20] F. E. Browder, W. V. Petryshyn, The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 72, 571-576 (1966).

[21] F. Bracci, D. Shoikhet, Boundary behavior of infinitesimal generators in the unit ball, Trans. Amer. Math. Soc. 366, 1119–1140 (2014).

[22] R. E. Bruck, Nonexpansive retracts of Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 76, 384-386 (1970).

[23] R. E. Bruck, Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 179, 251-262 (1973).

[24] R. E. Bruck, A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings, Pacific J. Math. 53, 59-71 (1974).

[25] A. V. Bukhvalov, A. A. Danilevich, Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces, Math. Zametki 31, 203-214 (1982); english translation Math. Notes Acad. Sc. USSR 31, 104-110 (1982).

[26] R. B. Burckel, An introduction to classical complex analysis, Vol I, Birkhäuser, 1979.

[27] R. B. Burckel, Iterating analytic self-maps of discs, Amer. Math. Monthly 88, 396-407 (1981).

[28] H. Busemann, The Geometry of Geodesics, Academic Press, New York, 1955.

[29] A. Całka, On conditions under which isometries have bounded orbits, Colloq. Math. 48, 219-227 (1984).

[30] L. Carleson, T. W. Gamelin, Complex Dynamics, Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, 1993.

[31] H. Cartan, Calcul Différentiel, Herman, 1967.

[32] H. Cartan, Sur les rétractions d'une variété, C.R. Acad. Sci. Paris 303, 715-716 (1986).

[33] T. Casavecchia, S. Díaz-Madrigal, A non-autonomous version of the Denjoy-Wolff theorem, Complex Anal. Oper. Theory 75, 1457–1479 (2013).

[34] S. B. Chae, Holomorphy and calculus in normed spaces, Marcel Dekker, 1985.

[35] G. N. Chen, Iteration for holomorphic maps of the open unit ball and the generalized upper half-plane of $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. 98, 305-313 (1984).

[36] C.-H. Chu, P. Mellon, Iteration of compact holomorphic maps on a Hilbert ball, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 1771-1777 (1997).

[37] J. A. Clarkson, Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40, 396-414 (1936).

[38] J.-F. Colombeau, Differential calculus and holomorphy, North Holland, 1982.

[39] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, Ch. Pommerenke, Boundary behavior of the iterates of a self-map of the unit disk, J. Math. Anal. Appl. 396, 93–97 (2012).

[40] W. J. Davis, P. Enflo, Contractive projections on l_p spaces, Analysis at Urbana, Vol. I (Urbana, IL, 1986-1987), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 137, Cambridge University Press, 1989, 151-161.

[41] F. S. De Blasi, J. Myjak, Sur la porosité de l'ensemble des contractions sans point fixe, C. R. Acad. Sci. Paris 308, 51-54 (1989).

[42] F. S. De Blasi, J. Myjak, On a generalized best approximation problem, J. Approximation Theory 94, 54-72 (1998).

[43] F. S. De Blasi, J. Myjak, P. L. Papini, Porous sets in best approximation theory, J. London Math. Soc. 44, 135-142 (1991).

[44] A. Denjoy, Sur l'itération des fonctions analytiques, C. R. Acad. Sci. Paris 182, 255-257 (1926).

[45] R. Deville & J. Revalski, Porosity of ill-posed problems, Proc. Amer. Math. Soc. 128, 1117-1124 (2000).

[46] S. Dineen, The Schwarz lemma, Clarendon Press, 1989.

[47] S. Dineen, R. M. Timoney, Complex geodesics on convex domains. Progress in functional analysis (Peñíscola, 1990), North-Holland Math. Stud., 170, North-Holland, Amsterdam, 333-365 (1992).

[48] S. Dineen, R. M. Timoney, J.-P. Vigué, Pseudodistances invariantes sur les domaines d'un espace localement convexe, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 12, 515-529 (1985).
[49] T. Dmínguez Benavides, H.-K Xu, A new geometrical coefficient for Banach spaces and its applications in fixed point theory, Nonlinear Analysis 25, 311-325 (1995).
[50] N. Dunford, Uniformity in linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 44, 305-356 (1938).
[51] C. J. Earle, R. S. Hamilton, A fixed point theorem for holomorphic mappings, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 61-65.
[52] M. Edelstein, On non-expansive mappings of Banach spaces, Proc. Cambridge Phil. Soc. 60, 439-447 (1964).
[53] M. Edelstein, The construction of an asymptotic center with a fixed point property, Bull. Amer. Math. Soc. 78, 206-208 (1972).
[54] R. Engelking, Outline of general topology, Elsevier, 1968.
[55] T. Franzoni, E. Vesentini, Holomorphic maps and invariant distances, North-Holland, 1980.
[56] K. Goebel, On the structure of the minimal invariant of nonexpansive mappings, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 29, 70-72 (1975).
[57] K. Goebel, W.A. Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, 1990.
[58] K. Goebel, S. Reich, Iterating holomorphic self-mappings of the Hilbert ball, Proc. Japan Acad. 58, 349-352 (1982).
[59] K. Goebel, S. Reich, Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings, Marcel Dekker, New York and Basel, 1984.
[60] K. Goebel, T. Sękowski, A. Stachura, Uniform convexity of the hyperbolic metric and fixed points of holomorphic mappings in the Hilbert ball, Nonlinear Analysis 4, 1011-1021 (1980).
[61] C. Grossetête, Classes de Hardy et de Nevalinna pour les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles, C. R. Acad. Sci. Paris Sé. A-B 274, A251-A253 (1972).
[62] Handbook of Metric Fixed Point Theory (W. A. Kirk, B. Sims, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 2001.
[63] L. A. Harris, Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces, Advances in Holomorphy, North Holland, 1979, 345-406.
[64] T. L. Hayden, T. J. Suffridge, Biholomorphic maps in Hilbert space have a fixed point, Pacific J. Math. 38, 419-422 (1971).
[65] M. H. Heins, On the iteration of functions ehich are analytic and single-valued in a given multiply-connected region, Amer J. Math. 63, 461-480 (1941).
[66] M. Hervé, Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule à m dimensions dans elle-même, J. Math. Pures et Appl. 42, 117-147 (1963).
[67] E. Hille, R. S. Philips, Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., 1957.
[68] L. Hörmander, An introduction to Complex Analysis in Several Variables, North-Holland, 1973.
[69] J. M. Isidoro, L. L. Stacho, Holomorphic Authomorphism Groups in Banach Spaces. An Elementary Introduction, North-Holland, 1984.

[70] M. Jarnicki, P. Pflug, Invariant distances and metrics in complex analysis, Walter de Gruyter, 1993.
[71] M. Jarnicki, P. Pflug, Invariant distances and metrics in complex analysis, 2nd Extended Edition, Walter de Gruyter, Berlin/Boston, 2013.
[72] W. Kaczor, S. Prus, Stanisław, Asymptotical smoothness and its applications, Bull. Austral. Math. Soc. 66, 405-418 (2002).
[73] J. Kapeluszny, T. Kuczumow, A few properties of the Kobayashi distance and their applications, Topol. Methods Nonlinear Anal. 15, 169-177 (2000).
[74] J. Kapeluszny, T. Kuczumow, S. Reich, The Denjoy-Wolff theorem in the open unit ball of a strictly convex Banach space, Adv. Math. 143, 111-123 (1999).
[75] J. Kapeluszny, T. Kuczumow, S. Reich, The Denjoy-Wolff theorem for condensing holomorphic mappings, J. Funct. Anal. 167, 79-93 (1999).
[76] L. A. Karlovitz, Some fixed point results for nonexpansive mappings. Fixed point theory and its applications, Proc. Sem., Dalhousie Univ., Halifax, N.S., Academic Press, 91–103 (1976).
[77] L. A. Karlovitz, Existence of fixed points of nonexpansive mappings in a space without normal structure, Pacific J. Math. 66, 153–159 (1976).
[78] A. Karlson, Non-expanding maps and Busemann functions, Ergodic Theory Dyn. Systems 21, 1447-1457 (2001).
[79] J. L. Kelley, Convergence in topology, Duke Math. J. 17, 277-283 (1950).
[80] J. L. Kelley, General topology, Springer, 1975.
[81] M. A. Khamsi, On uniform Opial condition and uniform Kadec-Klee property in Banach and metric spaces, Nonlinear Analysis 26, 1733-1748 (1996).
[82] M. A. Khamsi, One-local retract and common fixed point for commuting mappings in metric spaces. Nonlinear Anal. 27, 1307–1313 (1996).
[83] M. A. Khamsi and W. A. Kirk, An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory, Pure and Applied Mathematics (New York), John Willey & Sons, Inc., New York, 2001.
[84] V. A. Khatskevich, D. Shoikhet, Fixed points of analytic operators in a Banach space and their applications. (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 25, 189–200 (1984).
[85] Khatskevich, Victor; Shoiykhet, David Differentiable operators and nonlinear equations. Translated from the Russian by Mircea Martin. Operator Theory: Advances and Applications, 66. Birkhäuser Verlag, 1994.
[86] W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly 72, 1004-1006 (1965).
[87] W. A. Kirk, Caristi's fixed point theorem and metric convexity, Colloq. Math. XXXVI, 81-86 (1976).
[88] S. Kobayashi, Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings, J. Math. Soc. Japan 19, 460-480 (1967).
[89] S. Kobayashi, Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings, Marcel Dekker, 1970.
[90] S. Kobayashi, Hyperbolic complex spaces, Springer, 1998.
[91] S. G. Krantz, Teoria funkcji wielu zmiennych zespolonych, PWN, 1991.
[92] A. Kryczka, T. Kuczumow, The Denjoy-Wolff-type theorem for compact k_{B_H}-nonexpansive maps on a Hilbert ball, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 51, 179-184 (1997).
[93] Y. Kubota, Iteration of holomorphic maps of the unit ball into itself, Proc. Amer. Math. Soc. 88, 476-480 (1983).

[94] T. Kuczumow, Common fixed points of commuting holomorphic mappings in Hilbert ball and polydisc, Nonlinear Analysis 8, 417-419 (1984).
[95] T. Kuczumow, Nonexpansive retracts and fixed points of nonexpansive mappings in the Cartesian product of n Hilbert balls, Nonlinear Analysis 9, 601-604 (1985).
[96] T. Kuczumow, Fixed points of holomorphic mappings in the Hilbert ball, Colloq. Math. 55, 101-107 (1988).
[97] T. Kuczumow, The weak lower semicontinuity of the Kobayashi distance and its application, Math. Z. 236, 1-9 (2001).
[98] T. Kuczumow, W. O. Ray, Isometries in the Cartesian product of n unit open Hilbert balls with a hyperbolic metric, Ann. Mat. Pura Appl. 152, 359-374 (1988).
[99] T. Kuczumow, S. Reich, D. Shoikhet, Fixed points of holomorphic mappings: a metric approach, Handbook of Metric Fixed Point Theory (W. A. Kirk, B. Sims, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 2001, 437-515.
[100] T. Kuczumow, S. Reich, D. Shoikhet, The existence and non-existence of common fixed points for commuting families of holomorphic mappings, Nonlinear Anal. 43, 45-59 (2001).
[101] T. Kuczumow, S. Reich, A. Stachura, Holomorphic retracts of the open ball in the l_∞-product of Hilbert spaces, Recent advances in metric fixed point theory (T. Domínguez Benavides, Ed.), Universidad de Sevilla, Serie: Ciencias, Núm. 48, 99-110 (1996).
[102] T. Kuczumow, A. Stachura, Extensions of nonexpansive mappings in the Hilbert ball with the hyperbolic metric. Part II, Comment. Math. Univ. Carolinae 29, 403-410 (1988).
[103] T. Kuczumow, A. Stachura, Iterates of holomorphic and k_D-nonexpansive mappings in convex domains in $\mathbb{C}^n$, Advances in Math. 81, 90-98 (1990).
[104] T. Kuczumow, A. Stachura, The Denjoy-Wolff theorem for s-condensing mappings, Ann. Univ. Mariae Curie Skłodowska Sect. A 53, 109-115 (1999).
[105] K. Kuratowski, Sur les espaces complets, Fund. Math. 15, 301-309 (1930).
[106] K. Kuratowski, Topology, Vol. I, Academic Press & PWN, 1966.
[107] L. Lempert, La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule, Bull. Soc. Math. France 109, 427-474 (1981).
[108] L. Lempert, Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains, Anal. Math. 8, 257-261 (1982).
[109] B. D. MacCluer, Iterates of holomorphic self-maps of the open unit ball in $\mathbb{C}^n$, Michigan Math. J. 30, 97-106 (1983).
[110] B. Maurey, Points fixes des contractions de certains faiblement compacts de L1, Seminar on Functional Analysis, 1980–1981, Exp. No. VIII, 19 pp., École Polytech., Palaiseau, 1981.
[111] P. Mazet, J.-P. Vigué, Points fixes d'une application holomorphe d'un domaine borné dans lui-même, Acta Math. 166, 1-26 (1991).
[112] P. Mellon, A generall Wolff theorem for arbitrary Banach spaces, Math. Proc. R. Ir. Acad. 104A, 127-142 (2004).
[113] K. Menger, Untersuchungen über allgemeine Metrik I, II, III, Math. Ann. 100, 75-163 (1928).
[114] K. Menger, A. N. Milgram, On linear sets in metric spaces, Reports of a Mathematical Colloquium, 2nd series, Issue 1, 16-17 (1939).

[115] P. Mercer, Complex geodesics and iterates of holomorphic maps on convex domains in $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. 338, 201-211 (1993).

[116] E. H. Moore, General Analysis I, Philadelphy, 1939.

[117] E. H. Moore, H. L. Smith, A general theory of limitsm Amer. J. Math. 44, 102-121 (1922).

[118] R. Narasimhan, Analysis on Real and Complex Manifolds, Masson & Cie, 1968.

[119] Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 73, 591-597 (1967).

[120] O. Ostapyuk, On convergence to the Denjoy-Wolff point in the parabolic case, Contemp. Math., 590 (2013), 153–159.

[121] G. Patrizio, Parabolic exhaustions for strictly convex domains, Manuscripta Math. 47, 271-309 (1984).

[122] P. Poggi-Corradini, On the failure of a generalized Denjoy-Wolff theorem, Conformal Geometry and Dynamics 6, 13-32 (2002).

[123] S. Reich, Averaged mappings in the Hilbert ball, J. Math. Anal. Appl. 109, 199-206 (1985).

[124] S. Reich, Fixed point theory in the Hilbert ball, Contemp. Math. 72, 225-232 (1988).

[125] S. Reich and I. Shafrir, The asymptotic behavior of firmly nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 101, 246-250 (1987).

[126] S. Reich, D. Shoikhet, Semigroups and generators on convex domains with the hyperbolic metric, Atti Accad. Naz. Lincei 8, 231-250 (1997).

[127] S. Reich, D. Shoikhet, Metric domains, holomorphic mappings and nonlinear semigroups, Abstr. Appl. Anal. 3, 203-228 (1998).

[128] S. Reich, D. Shoikhet, Nonlinear semigroups, fixed points and geometry of domains in Banach spaces, Imperial College Press, London, 2005.

[129] H.-J. Reiffen, Die Carathéodorysche Distanz und ihre zugehörige Differentialmetrik, Math. Ann. 161, 315-324 (1965).

[130] J. F. Ritt, On the conformal mapping of a region into a part of itself, Ann. Math. 22, 157-160 (1920-1921).

[131] B. N. Sadovskii, A fixed point principle, Funct. Anal. Appl. 1, 151-153 (1967).

[132] H. Rossi Vector fields on analytic spaces, Ann. Math. 78, 455-467 (1963).

[133] H. L. Royden, P. M. Wong, Carathéodory and Kobayashi metrics on convex domains, preprint (1983).

[134] W. Rudin, The fixed-point set of some holomorphic maps, Bull. Malaysian Math. Soc. 1, 25-28 (1978).

[135] W. Rudin, Function theory in the unit ball in $\mathbb{C}^n$, Springer, 1980.

[136] R. Ryan, Boundary values of analytic vector valued functions, Indag. Math. 24, 558-572 (1962).

[137] B. N. Sadovskii, A fixed point principle, Funct. Anal. Appl. 1, 151-153 (1967).

[138] I. Shafrir, Common fixed points of commuting holomorphic mappings in the product of n Hilbert balls, Michigan Math. J. 39, 281-287 (1991).

[139] R. Sine, Behavior of iterates in the Poincaré metric, Houston J. Math. 15, 273-289 (1989).

[140] T. B. Singh, Elements of Topology, CRC Press, 2013.

[141] D. Shoikhet, Semigroups in Geometrical Function Theory, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[142] Šmulian, V. On the principle of inclusion in the space of the type (B). (Russian) Mat. Sbornik N.S. 5, 317-328 (1939).

[143] A. Stachura, Iterates of holomorphic self-maps of the unit ball in Hilbert spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 93, 88-90 (1985).

[144] A. Stachura, Holomorphic retractions and fixed points of holomorphic mappings from a metric point of view (in Polish), Rozprawy habilitacyjne Wydziału Matematyki i Fizyki UMCS 68, Lublin, 1994.

[145] T. J. Suffridge, Common fixed points of commuting holomorphic maps of the hyperball, Michigan Math. J. 21, 309-314 (1974).

[146] E. Vesentini, Variations on a theme of Carathéodory, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 6, 39-68 (1979).

[147] E. Vesentini, Complex geodesics, Composito Math. 44, 375-394 (1981).

[148] E. Vesentini, Complex geodesics and holomorphic mappings, Sympos. Math. 26, 211-239 (1982).

[149] E. Vesentini, Invariant distances and invariant differential metrics in locally convex spaces, Spectral theory, Banach Center Publications 8, Warsaw, 493-512 (1982).

[150] E. Vesentini, Su un teorema di Wolff e Denjoy, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 53, 17-25 (1983).

[151] E. Vesentini, Iterations of holomorphic mappings. (Russian) Translated from the English by I. S. Zakharevich. International conference on current problems in algebra and analysis (Moscow-Leningrad, 1984). Uspekhi Mat. Nauk 40, 13–16 (1985).

[152] J.-P. Vigué, La métrique infinitésimale de Kobayashi et la caractérisation des domaines convexes bornés, J. Math. Pures Appl. 78, 867-876 (1999).

[153] J.-P. Vigué, Stricte convexité des domaines bornés et unicité des géodésiques complexes, Bull. Sci. Math. 125, 297-310 (2001).

[154] J. Wolff, Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région, et dont les valeurs appartiennent à cette région, C. R. Acad. Sci. Paris 182, 42-43 (1926).

[155] J. Wolff, Sur l'itération des fonctions bornées, C. R. Acad. Sci. Paris 182, 200-201 (1926).

[156] J. Wolff, Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz, C. R. Acad. Sci. Paris 182, 918-920 (1926).

[157] L. Xu, H. Yang, On the generalizations of Denjoy-Wolff theorem. Acta Math. Sci. Ser. B 32, 1333–1337 (2012).

[158] P. Yang, Holomorphic curves and boundary regularity of biholomorphic maps of pseudoconvex domains, preprint, 1978.

Monika Budzyńska