Andrzej Kryczka

Autoreferat

2013

Lublin

Spis treści

Informacje o autorze

Imię i nazwisko: Andrzej Kryczka

Dyplomy i stopnie naukowe:

— Doktor nauk matematycznych,
rozprawa: Miara słabej niezwartości i jej zastosowania w teorii interpolacji,
promotor: prof. dr hab. Stanisław Prus, wyróżnienie,
Uniwersytet Marii Curie–Skłodowskiej, Lublin, 2000.

— Magister matematyki,
Uniwersytet Marii Curie–Skłodowskiej, Lublin, 1994.

— Studia magisterskie z matematyki, wyróżnienie,
Wydział Matematyki i Fizyki UMCS, Lublin, 1989–1994.

Zatrudnienie w jednostkach naukowych:

— Instytut Matematyki,
Uniwersytet Marii Curie–Skłodowskiej, Lublin,
asystent od października 1994 do września 2001,
adiunkt od października 2001.

— Departamento de Análisis Matemático,
Universidad Complutense de Madrid,
Fundación General de UCM, Madryt, Hiszpania,
stanowisko badawcze od października 2002 do września 2004.

Interpolacja i ekstrapolacja odchyleń od własności Banacha–Saksa

Jednotematyczny cykl publikacji habilitacyjnych

[K1] A. Kryczka, Alternate signs Banach–Saks property and real interpolation of operators, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 3529–3537.

[K2] A. Kryczka, Seminorm related to Banach–Saks property and real interpolation of operators, Integral Equations Operator Theory 61 (2008) 559–572.

[K3] A. Kryczka, Quantitative approach to weak noncompactness in the polygon interpolation method, Bull. Austral. Math. Soc. 69 (2004) 49–62.

[K4] A. Kryczka, Arithmetic separation and Banach–Saks sets, J. Math. Anal. Appl. 394 (2012) 772–780.

[K5] A. Kryczka, Mean separations in Banach spaces under abstract interpolation and extrapolation, J. Math. Anal. Appl. 407 (2013) 281–289.

1. Wprowadzenie

Słaba granica ciągu (x_n) w przestrzeni Banacha może być aproksymowana z dowolną dokładnością elementami otoczki wypukłej $\operatorname{conv}\{x_n\}$. Dowód tego faktu podany przez Mazura nie określa kombinacji wypukłych, jednak w wielu klasycznych przestrzeniach Banacha można za nie przyjąć średnie arytmetyczne. Banach i Saks [5] zauważyli już wcześniej, że z każdego ograniczonego ciągu (x_n) w przestrzeni $L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$, można wybrać podciąg (x'_n) sumowalny w sensie Cesàro, tzn. taki, że ciąg $(\sum_{i=1}^{n} x'_i/n)$ jest mocno zbieżny. Podobną regułę wykazano następnie dla przestrzeni jednostajnie wypukłych [45] i superrefleksywnych.

Własności tego typu rozpatrywane są obecnie w kilku wariantach dla przestrzeni, operatorów i zbiorów. Mówimy, że liniowy i ograniczony operator T działający między przestrzeniami Banacha X i Y ma własność Banacha–Saksa (BS), jeśli z każdego ograniczonego ciągu (x_n) w X można wybrać taki podciąg (x'_n), że ciąg (Tx'_n) jest sumowalny w sensie Cesàro. Jeśli w definicji tej ciąg (Tx'_n) zastąpimy ciągiem $((-1)^n Tx'_n)$, to mówimy, że T ma własność Banacha–Saksa z naprzemiennymi znakami (ABS). Jeśli w definicji własności BS ciągi ograniczone (x_n) zastąpimy ciągami słabo zbieżnymi w X, to mówimy, że T ma słabą własność Banacha–Saksa (WBS). Będziemy posługiwać się angielskimi skrótami nazw tych własności podanymi w nawiasach. Własności BS, ABS i WBS przestrzeni Banacha X są odpowiednio własnościami operatora identyczności na X.

Przełomem w badaniach własności Banacha–Saksa okazało się zastosowanie w latach 70. ubiegłego wieku metod opartych na twierdzeniu Ramseya [60]. Metody te pozwoliły wykazać pewne dychotomie dla ciągów w przestrzeniach Banacha, które umożliwiają wybór podciągów o określonych z punktu widzenia sumowalności własnościach.

Rosenthal [61] wykazał, że dla każdego słabo zbieżnego do zera ciągu (x_n) istnieje podciąg (x'_n) taki, że wszystkie jego podciągi są sumowalne do zera w sensie Cesàro albo żaden podciąg ciągu (x'_n) nie jest sumowalny w sensie Cesàro i istnieje wtedy taka $\delta > 0$, że

$$\left\| \sum_{n \in A} c_n x'_n \right\| \geqslant \delta \sum_{n \in A} |c_n| \tag{1.1}$$

dla wszystkich ciągów liczbowych (c_n) i podzbiorów $A \subset \mathbb{N}$ z $|A| \leqslant 2^k$, $k \leqslant \min A$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Erdös i Magidor [32] udowodnili w oparciu o twierdzenie Galvina–Prikrego [37], że z każdego ograniczonego ciągu (x_n) można wybrać taki podciąg (x'_n), że wszystkie jego podciągi są sumowalne względem regularnej metody sumowalności albo żaden podciąg ciągu (x'_n) nie jest sumowalny w ten sposób. Wynika stąd w szczególności, że z każdego ograniczonego ciągu (x_n) w przestrzeni z własnością BS można wybrać taki podciąg (x'_n), że wszystkie jego podciągi są sumowalne w sensie Cesàro.

Dla własności ABS kluczowy rezultat wykazał Beauzamy [8]: przestrzeń Banacha X nie ma własności ABS wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\delta > 0$ i ograniczony ciąg (x_n) w X taki, że

$$\left\| \sum_{n \in A} \epsilon_n x_n \right\| \geqslant \delta \, |A| \tag{1.2}$$

dla wszystkich skończonych podzbiorów $A \subset \mathbb{N}$ i wszystkich ciągów (ϵ_n), $\epsilon_n = \pm 1$.

Wykorzystując modele rozszerzające (ang. *spreading models*) Brunela i Suchestone'a [13], Beauzamy [8] wykazał również, że istnienie ciągu (x_n) opisanego warunkiem (1.2) jest równoważne istnieniu ciągu (x'_n) z warunku Rosenthala (1.1). Przypomnijmy, że jeśli ograniczony ciąg (x_n) nie ma podciągu Cauchy'ego, to posiada on podciąg (e_n), dla którego w uzupełnieniu F przestrzeni $\operatorname{span}\{e_n\}$ określić można taką normę $|\cdot|$, że dla każdego $\varepsilon > 0$ i wszystkich skalarów $(a_1, \ldots, a_m)$ istnieje takie $v \in \mathbb{N}$, że jeśli $v \leqslant n_1 < \ldots < n_m$, to

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_{n_i} \right\| - \left| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right| \right| < \varepsilon.$$

Norma $|\cdot|$ jest niezmiennicza ze względu na tzw. rozszerzanie:

$$\left| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} a_i e_{n_i} \right|$$

dla wszystkich $n_1 < \ldots < n_m$. Przestrzeń F z normą $|\cdot|$ jest nazywana modelem rozszerzającym przestrzeni X zbudowanym na (x_n). Ciąg (e_n) nazywamy ciągiem fundamentalnym modelu rozszerzającego F.

Cykl publikacji [K1]–[K5] wpisuje się w badania z zakresu dziedziczenia własności przez przestrzenie zbudowane na danej przestrzeni Banacha oraz przez operatory pomiędzy takimi przestrzeniami. Stosujemy podejście ilościowe, wykorzystując do tego miary odchylenia od danych własności. Dziedziczenie własności Banacha–Saksa z punktu widzenia jakościowego jest dobrze znane w literaturze. Wymienić tu należy chociażby rezultaty Partingtona [58] dla sum prostych przestrzeni Banacha. Wynika z nich w szczególności, że własności BS i WBS przenoszą się z przestrzeni Banacha X na przestrzeń ciągową $l_p(X)$ dla $1 < p < \infty$. Dla funkcyjnych odpowiedników przestrzeni $l_p(X)$ taka reguła nie zachodzi. Bourgain [40] i Schachermayer [62] skonstruowali takie przestrzenie Banacha X z własnością BS, że $L_2(X)$ nie mają własności BS. Bourgain wykazał ponadto, że $L_p(X)$ z $1 < p < \infty$ ma własność BS wtedy i tylko wtedy, gdy X ma własność Komlósa. Odpowiednik tego rezultatu dla własności WBS podała Cembranos [15], a uogólnienie na przestrzenie Köthego–Bochnera $E(X)$, zbudowane na refleksywnej przestrzeni funkcyjnej Köthego E, podał Lin [48].

Dziedziczenie własności przez przestrzenie $l_p(X)$ lub ich uogólnienia $E(X)$ jest ściśle związane z analogicznym zagadnieniem dla rzeczywistych przestrzeni interpolacyjnych. Podstawowe fakty o dziedziczeniu własności BS i ABS przez przestrzenie interpolacyjne Lionsa–Peetrego [49], wraz z faktoryzacją tych własności, ustalone zostały przez Beauzamy'ego [8, 9]. Heinrich [41] wykazał, że z własności BS zanurzenia $I\colon A_0 \cap A_1 \to A_0 + A_1$ wynika własność BS przestrzeni interpolacyjnych $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ dla wszystkich parametrów $0 < \theta < 1$ i $1 < p < \infty$. Wynik Heinricha jest jeszcze ogólniejszy i dotyczy suriektywnych i iniektywnych domkniętych ideałów operatorowych z własnością Σ_p.

W omawianym cyklu publikacji wypracowano pewną metodę szacowania odchyleń od własności Banacha–Saksa dla operatorów liniowych i ograniczonych pomiędzy przestrzeniami Banacha, poddanych rzeczywistej interpolacji. Z grubsza biorąc, metoda ta polega na skojarzeniu odpowiednio dobranego warunku geometrycznego opisującego odchylenie od danej własności z pewną relacją uśredniania dla ciągów, która umożliwia ustabilizowanie odchylenia względem kolejnych uśrednień. Uzyskane wyniki mają zatem charakter ilościowy, dla których wyniki jakościowe—w części znane w literaturze—są wnioskiem. Zasadniczy ciężar dowodów twierdzeń interpolacyjnych spoczywa na wynikach dotyczących zachowania się odchyleń pod wpływem działania pewnych klas operatorów działających pomiędzy przestrzeniami typu $l_p(X_\nu)$ lub ich uogólnieniami, w których l_p zastępujemy ciągową kratą Banacha. Z kolei w dowodach tych rezultatów zasadniczą rolę grają wyniki stabilizacyjne, gdzie głównym narzędziem matematycznym jakiego używamy jest model rozszerzający.

Zaletą zastosowanego podejścia jest ogólność wyników—nie nakładamy dodatkowych ograniczeń na pary lub rodziny Banacha. Oszacowania nie podnoszą stałych występujących naturalnie w interpolacji. Wypracowana metoda obejmuje klasyczną rzeczywistą interpolację Lionsa–Peetrego, jej uogólnienia wielowymiarowe, ogólną interpolację opartą na przestrzeniach $E(X_\nu)$ oraz pewne abstrakcyjne metody ekstrapolacyjne obejmujące konstrukcję przestrzeni logarytmicznych Edmundsa–Triebla.

Inspiracją dla indywidualizacji miar odchylenia dla poszczególnych własności były z jednej strony badania dotyczące miar słabej niezwartości jakie prowadziłem pod kierunkiem prof. Stanisława Prusa, promotora mojej rozprawy doktorskiej, z drugiej zaś prace grupy matematyków skupionych wokół prof. Fernando Cobosa dotyczące miar odchylenia od ideałów operatorowych. Z wynikami tych badań miałem okazję zapoznać się w czasie stażu podoktorskiego na Uniwersytecie Complutense w Madrycie. Proponowane przeze mnie podejście można traktować jako uzupełnienie lub pewną alternatywę właśnie dla badań ilościowych opartych na miarach związanych z domkniętymi ideałami operatorów reprezentowanymi przede wszystkim w pracach [17, 20, 23, 24, 25, 34, 35]. W badaniach, które prowadziłem, chodziło mi o podanie możliwie naturalnych miar odchylenia, uzyskanie wyników łatwiejszych do interpretacji, uniknięcie dodatkowych warunków na interpolowane przestrzenie i operatory oraz o przejrzystość dowodów.

Jak się przekonamy, odległe własności topologiczne, takie jak słaba zwartość czy własność BS, mogą posiadać zaskakująco bliskie opisy geometryczne. Pozwala to przyjąć wspólną strategię przy rozwiązywaniu wspomnianych wyżej problemów przy zastosowaniu różnych narzędzi matematycznych.

Otwartą kulę jednostkową przestrzeni Banacha X oznaczamy przez $\mathsf{B}(X)$. Przestrzeń Banacha wszystkich liniowych i ograniczonych operatorów działających pomiędzy przestrzeniami Banacha X i Y oznaczamy przez $\mathcal{L}(X,Y)$. Podprzestrzenie przestrzeni $\mathcal{L}(X,Y)$ składające się z operatorów z własnościami BS i ABS oznaczamy odpowiednio przez $\mathcal{BS}(X,Y)$ i $\mathcal{ABS}(X,Y)$. Liczbę elementów skończonego podzbioru $A \subset \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ oznaczamy przez $|A|$.

2. Interpolacja odchyleń od własności ABS

Odchylenia od własności ABS rozważane w pracy [K1] opierają się na warunku Beauzamy'ego (1.2). Kluczową kwestią dla oszacowań interpolacyjnych jest możliwość ustabilizowania wartości $\left\|\sum_{n\in A}\epsilon_n x_n/\,|A|\right\|$ względem zmian (ϵ_n) i A. Można to osiągnąć przechodząc do ciągu średnich zbudowanych na dostatecznie długich, równolicznych blokach ciągu (x_n). Równoliczność bloków jest konsekwencją zastosowania modeli rozszerzających.

Wprowadzamy następujące relacje dla ciągów (zachowujemy skróty używane w [K1], pochodzące od nazw w j. angielskim): (y_n) nazywamy ciągiem *kolejnych średnich o zmiennych znakach* (svsm) dla (x_n), jeśli istnieją $m \in \mathbb{N}$, ciąg (A_n) skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ z $\max A_n < \min A_{n+1}$ i $|A_n| = m$ dla każdego n oraz ciąg znaków (ϵ_n) taki, że $y_n = m^{-1}\sum_{k\in A_n}\epsilon_k x_k$ dla każdego n. Jeśli w definicji tej $\epsilon_n = 1$ dla każdego n, to (y_n) nazywamy ciągiem *kolejnych średnich* *arytmetycznych* (sam) dla (x_n). Ponieważ wszystkie zbiory A_n są równoliczne, relacje svsm i sam są przechodnie.

W pracy [K1] wprowadzamy dwie charakterystyki ograniczonego ciągu (x_n) w przestrzeni Banacha X:

$$\phi_{vsm}(x_n) = \inf \left\{ \left\| |A|^{-1} \sum_{n \in A} \epsilon_n x_n \right\| : |A| < \infty,\, \epsilon_n = \pm 1 \right\}$$

oraz

$$\phi_{am}(x_n) = \inf \left\{ \left\| |A|^{-1} \sum_{n \in A} x_n \right\| : |A| < \infty \right\}.$$

Pierwsza z nich posłuży do określenia seminormy w $\mathcal{L}(X,Y)$ związanej z własnością ABS, druga ma charakter pomocniczy.

Stwierdzenie 2.1 ([K1, Prop. 2.3])**.** *Niech (x_n) będzie ograniczonym ciągiem w przestrzeni Banacha X. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją ciągi (y_n) svsm dla (x_n) oraz (v_n) sam dla (x_n) takie, że dla wszystkich skończonych podzbiorów $A \subset \mathbb{N}$ i wszystkich ciągów znaków (ϵ_n),*

$$\left\| |A|^{-1} \sum_{n \in A} \epsilon_n y_n \right\| \leqslant \phi_{vsm}(y_n) + \varepsilon, \qquad \left\| |A|^{-1} \sum_{n \in A} v_n \right\| \leqslant \phi_{am}(v_n) + \varepsilon.$$

Dowód tego rezultatu wykorzystuje związek między normami przestrzeni X i modelu rozszerzającego zbudowanego na (x_n). Korzystamy w części z uśredniania ciągów zastosowanego przez Beauzamy'ego [8, Thm. II.2] w dowodzie równoważności warunków (1.1) i (1.2), które opiera się na elementach dowodu twierdzenia Jamesa [42] o dystorsji przestrzeni l_1. Twierdzenie Brunela–Suchestone'a [13] umożliwia taki podział zbioru A, przy którym zaburzenia normy średniej $\sum_{n \in A} \epsilon_n y_n / |A|$ mogą być dowolnie ograniczone przez odpowiednie wydłużanie bloków, na których zbudowany jest ciąg (y_n).

Pierwsze zastosowanie Stwierdzenia 2.1 pojawia się w dowodzie subaddytywności seminormy

$$\Phi_{ABS}(T) = \sup \{ \phi_{vsm}(Tx_n) : (x_n) \subset \mathsf{B}(X) \}$$

określonej dla dowolnego operatora $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ pomiędzy przestrzeniami Banacha X i Y. Wykazujemy, że $\Phi_{ABS}(T) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T \in \mathcal{ABS}(X,Y)$ [K1, Prop. 2.5].

Kolejnym etapem prowadzącym do głównego rezultatu jest twierdzenie dotyczące zachowania odchyleń od własności ABS przez pewną klasę operatorów działających pomiędzy przestrzeniami $l_p(X)$. Operatory tej klasy wystąpią zarówno w interpolacji jak i ekstrapolacji. Twierdzenie to można uznać za ilościowy odpowiednik dla własności ABS rezultatu Partingtona [58, Thm. 3], który wykazał, że suma prosta ciągu (X_ν) przestrzeni Banacha, zbudowana na przestrzeni z własnością BS i bazą hiperortogonalną, ma własność BS wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie przestrzenie X_ν mają własność BS.

Niech X będzie przestrzenią Banacha, a (e_i) bazą jednostkową przestrzeni l_p dla $1 < p < \infty$. Przez $l_p(X)$ oznaczamy przestrzeń Banacha wszystkich ciągów $x = (x(i))$ takich, że $x(i) \in X$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$ oraz

$$\|x\|_{l_p(X)} = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \|x(i)\|_X \, e_i \right\|_{l_p} < \infty.$$

W interpolacji rozważać będziemy przestrzenie $l_p(X)$ ciągów $(x(i))_{i\in\mathbb{Z}}$ indeksowanych liczbami całkowitymi.

Twierdzenie 2.2 ([K1, Thm. 3.2])**.** *Niech $1 < p < \infty$ i X, Y będą przestrzeniami Banacha. Jeśli $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ i operator $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(l_p(X), l_p(Y))$ dany jest wzorem $\widetilde{T}x = (Tx(i))$ dla każdego $x = (x(i))$, to $\Phi_{ABS}(T) = \Phi_{ABS}(\widetilde{T})$.*

Dowód tego twierdzenia poprzedza lemat, który pozwala ograniczyć rozważania do skończenie wielu współrzędnych przestrzeni $l_p(X)$. W dowodzie tego lematu wykorzystujemy własność BS przestrzeni l_p dla $1 < p < \infty$, wspomniany już wynik Erdösa–Magidora [32] oraz stabilność ϕ_{am} wykazaną w Stwierdzeniu 2.1.

W zasadniczej części dowodu wykonujemy pewną procedurę uśredniania, która ma na celu ustabilizowanie wahań na pozostałych skończenie wielu współrzędnych. Procedura ta jest jednym z kluczowych elementów całego cyklu prac [K1]–[K5] i pojawiać się będzie w różnych formach w dowodach innych twierdzeń.

Wniosek 2.3 ([K1, Cor. 3.3])**.** *Niech $1 < p < \infty$. Przestrzeń $l_p(X)$ ma własność ABS wtedy i tylko wtedy, gdy X ma własność ABS.*

Przypomnijmy, że przestrzenie Banacha A_0 i A_1, które można liniowo i w sposób ciągły zanurzyć we wspólnej topologicznej przestrzeni Hausdorffa V, nazywamy parą interpolacyjną lub parą Banacha. Taką parę oznaczać będziemy przez $\vec{A} = (A_0, A_1)$. Wtedy przestrzenie $\Delta(\vec{A}) = A_0 \cap A_1$, $\Sigma(\vec{A}) = A_0 + A_1$ z normami

$$\|a\|_{\Delta(\vec{A})} = \max\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\}, \quad \|a\|_{\Sigma(\vec{A})} = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} : a_0 + a_1 = a\}$$

są przestrzeniami Banacha.

Rozważamy rzeczywiste przestrzenie interpolacyjne Lionsa–Peetrego [49]

$$A_{\theta,p} = \left\{ a \in \Sigma(\vec{A}) \colon \|a\|_{A_{\theta,p}} < \infty \right\}$$

dla parametrów $0 < \theta < 1$ i $1 < p < \infty$, wyposażone w dyskretną normę

$$\|a\|_{A_{\theta,p}} = \inf \max \left\{ \|(2^{i\theta} a_0(i))\|_{l_p(A_0)}, \|(2^{i(\theta-1)} a_1(i))\|_{l_p(A_1)} \right\},$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich rodzinach $(a_0(i)) \subset A_0$, $(a_1(i)) \subset A_1$ takich, że $a_0(i) + a_1(i) = a$ dla wszystkich $i \in \mathbb{Z}$.

Niech $A_{\theta,p}$, $B_{\theta,p}$ będą przestrzeniami interpolacyjnymi względem par odpowiednio $\vec{A} = (A_0, A_1)$, $\vec{B} = (B_0, B_1)$. Niech $T \colon \Sigma(\vec{A}) \to \Sigma(\vec{B})$ będzie operatorem liniowym. Piszemy $T \colon \vec{A} \to \vec{B}$, jeśli operator $T|A_j$ jest ograniczony i ma wartości w B_j dla $j = 0, 1$.

Głównym wynikiem pracy [K1] jest logarytmicznie wypukła (z dokładnością do stałego czynnika) nierówność dla seminormy Φ_{ABS} będąca odpowiednikiem następującej klasycznej nierówności dla normy operatora interpolowanego:

$$\|T\colon A_{\theta,p} \to B_{\theta,p}\| \leqslant c_\theta \|T\colon A_0 \to B_0\|^{1-\theta} \|T\colon A_1 \to B_1\|^{\theta}.$$

Zasadniczy ciężar dowodu poniższego wyniku spoczywa na Stwierdzeniu 2.1 oraz Twierdzeniu 2.2.

Twierdzenie 2.4 ([K1, Thm. 4.1]). *Niech $A_{\theta,p}$, $B_{\theta,p}$ dla $0 < \theta < 1$ i $1 < p < \infty$ będą rzeczywistymi przestrzeniami interpolacyjnymi względem par odpowiednio $\vec{A} = (A_0, A_1)$, $\vec{B} = (B_0, B_1)$. Wtedy dla każdego $T\colon \vec{A} \to \vec{B}$,*

$$\Phi_{ABS}(T\colon A_{\theta,p} \to B_{\theta,p}) \leqslant 2^{\theta(1-\theta)} \left(\Phi_{ABS}(T\colon A_0 \to B_0)\right)^{1-\theta} \left(\Phi_{ABS}(T\colon A_1 \to B_1)\right)^{\theta}.$$

Dzięki zastosowanej metodzie jako wniosek otrzymujemy wynik o dziedziczeniu własności ABS bez ograniczeń na pary interpolacyjne.

Wniosek 2.5 ([K1, Cor. 4.2]). *Jeśli $T\colon A_0 \to B_0$ lub $T\colon A_1 \to B_1$ ma własność ABS, to ma ją również $T\colon A_{\theta,p} \to B_{\theta,p}$ dla wszystkich $0 < \theta < 1$ i $1 < p < \infty$. W szczególności, jeśli A_0 lub A_1 ma własność ABS, to ma ją również $A_{\theta,p}$.*

Analogiczny wynik Beauzamy'ego [8, Prop. IV.1] dotyczy dziedziczenia własności ABS przez przestrzenie interpolacyjne względem par Banacha (A_0, A_1) przy założeniu ciągłej iniekcji $A_0 \hookrightarrow A_1$. Takie założenie było wystarczające w dowodzie faktoryzacji własności ABS [8, Thm. IV.2].

3. Interpolacja odchyleń od własności BS

W pracy [K2] badamy odchylenia od własności BS, stosując technikę podobną do tej wypracowanej w [K1]. Decydujące znaczenie ma sformułowanie odpowiedniego geometrycznego warunku odchylenia od własności BS i powiązanie go z pewną relacją pomiędzy ciągami, która umożliwiałaby wielokrotne uśrednianie ciągu z zachowaniem stabilności odchylenia. Beauzamy [8, Prop. III.2] wykazał, że przestrzeń Banacha X nie ma własności BS wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\delta > 0$ i ograniczony ciąg (x_n) w X taki, że dla wszystkich podciągów (x_n') ciągu (x_n) oraz wszystkich $k, m \in \mathbb{N}$ z $1 \leqslant k \leqslant m$,

$$\left\| \frac{1}{m} \left(\sum_{n=1}^{k} x_n' - \sum_{n=k+1}^{m} x_n' \right) \right\| \geqslant \delta.$$

Wprowadzamy pewną modyfikację tego warunku, dzięki której posługiwać będziemy się średnimi arytmetycznymi zbudowanymi na równolicznych blokach ciągu (x_n).

Definicja 3.1 ([K2, Def. 2.2]). Niech (x_n) będzie ograniczonym ciągiem w przestrzeni Banacha X. *Arytmetyczne rozseparowanie* ciągu (x_n) określamy jako

$$\operatorname{asep}(x_n) = \inf \left\| \frac{1}{m} \left(\sum_{n \in A} x_n - \sum_{n \in B} x_n \right) \right\|,$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich $m \in \mathbb{N}$ i wszystkich podzbiorach $A, B \subset \mathbb{N}$ z $|A| = |B| = m$ i $\max A < \min B$.

Arytmetyczne rozseparowanie $\operatorname{asep}(x_n)$, którym szerzej zajmiemy się w omówieniu pracy [K4], jest wartością pośrednią pomiędzy rozseparowaniem

$$\operatorname{sep}(x_n) = \inf_{m \neq n} \|x_m - x_n\|,$$

stosowanym w stałej Kottmana [46] i separacyjnej mierze niezwartości zbiorów β (zob. [1, 6]), a opartym na warunku Jamesa [43] wypukłym rozseparowaniem

$$\operatorname{csep}(x_n) = \inf_m \operatorname{dist}\{\operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^m, \operatorname{conv}\{x_n\}_{n=m+1}^\infty\},$$

które opisuje słabą zwartość zbiorów i refleksywność przestrzeni.

Stwierdzenie 3.2 ([K2, Prop. 2.3]). *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha. Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nie ma własności BS wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ograniczony ciąg (x_n) w X taki, że* $\operatorname{asep}(Tx_n) > 0$.

Jeśli T nie jest słabo zwarty, to dodatnie arytmetyczne rozseparowanie ciągu (Tx_n) jest konsekwencją warunku Jamesa i nierówności $\operatorname{csep}(Tx_n) \leqslant \operatorname{asep}(Tx_n)$. Jeśli T jest słabo zwarty i nie ma własności BS, to T nie ma własności ABS. Wykorzystujemy wtedy istnienie modelu rozszerzającego z ciągiem fundamentalnym równoważnym bazie jednostkowej przestrzeni l_1.

Z powyższego stwierdzenia wynika (zob. [K2, Cor. 2.4]), że przestrzeń Banacha X nie ma własności BS wtedy i tylko wtedy, gdy X zawiera ograniczony ciąg (x_n) taki, że $\operatorname{asep}(x_n) > 0$. Seminorma określona dla każdego $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ wzorem

$$\Phi_{BS}(T) = \sup \{\operatorname{asep}(Tx_n) : (x_n) \subset \mathsf{B}(X)\}$$

zeruje się w $\mathcal{BS}(X, Y)$. Subaddytywność Φ_{BS} dowodzimy korzystając ze następującego wyniku stabilizacyjnego.

Stwierdzenie 3.3 ([K2, Prop. 3.1]). *Niech (x_n) będzie ograniczonym ciągiem w przestrzeni Banacha X. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ciąg (y_n) sam dla (x_n) taki, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ i wszystkich podzbiorów $A, B \subset \mathbb{N}$ z $|A| = |B| = m$ i $\max A < \min B$,*

$$\left\| \frac{1}{m} \left(\sum_{n \in A} y_n - \sum_{n \in B} y_n \right) \right\| \leqslant \operatorname{asep}(y_n) + \varepsilon.$$

Jako wniosek otrzymujemy odpowiednik rezultatu Beauzamy'ego [8], że przestrzeń Banacha X nie ma własności ABS wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ograniczony ciąg (x_n) w X taki, że dla wszystkich skończonych podzbiorów $A \subset \mathbb{N}$ i wszystkich ciągów znaków (ϵ_n),

$$1 - \varepsilon \leqslant \left\| \frac{1}{|A|} \sum_{n \in A} \epsilon_n x_n \right\| \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Wniosek 3.4 ([K2, Cor. 3.2]). *Przestrzeń Banacha X nie ma własności BS wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ograniczony ciąg (x_n) w X taki, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ i wszystkich podzbiorów $A, B \subset \mathbb{N}$ z $|A| = |B| = m$ i $\max A < \min B$,*

$$1 - \varepsilon \leqslant \left\| \frac{1}{m} \left(\sum_{n \in A} x_n - \sum_{n \in B} x_n \right) \right\| \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Interpolację odchyleń od własności BS przeprowadzamy podobnie jak w przypadku seminormy Φ_{ABS} opierając się na analogicznym rezultacie dla przestrzeni $l_p(X)$ [K2, Thm. 4.4].

Twierdzenie 3.5 ([K2, Thm. 5.1]). *Niech $A_{\theta,p}$, $B_{\theta,p}$ dla $0 < \theta < 1$ i $1 < p < \infty$ będą rzeczywistymi przestrzeniami interpolacyjnymi względem par odpowiednio $\vec{A} = (A_0, A_1)$, $\vec{B} = (B_0, B_1)$. Wtedy dla każdego $T\colon \vec{A} \to \vec{B}$,*

$$\Phi_{BS}(T\colon A_{\theta,p} \to B_{\theta,p}) \leqslant 2^{\theta(1-\theta)} \left(\Phi_{BS}(T\colon A_0 \to B_0)\right)^{1-\theta} \left(\Phi_{BS}(T\colon A_1 \to B_1)\right)^{\theta}.$$

Do przeniesienia własności BS na operator $T\colon A_{\theta,p} \to B_{\theta,p}$ wystarczy zatem własność BS operatora $T\colon A_0 \to B_0$ lub $T\colon A_1 \to B_1$. Pierwszy jakościowy rezultat o dziedziczeniu własności BS uzyskał Beauzamy [10, Thm. III.3.3] dla operatorów działających pomiędzy przestrzeniami interpolacyjnymi względem par Banacha (A_0, A_1) z ciągłą iniekcją $A_0 \hookrightarrow A_1$. Dziedziczenie własności BS przez przestrzenie interpolacyjne względem dowolnych par Banacha wynika ze wspomnianego już rezultatu Heinricha [41].

4. Interpolacja odchyleń od własności BS i ABS dla metod wielowymiarowych

W pracy [K4] badamy odchylenia od własności BS i ABS operatorów interpolowanych wielowymiarową metodą Cobosa–Peetrego [26]. Metoda ta nie jest tak bezpośrednim uogólnieniem metody Lionsa–Peetrego jak chociażby metody Yoshikawy [67] czy Sparra [63] dla skończonych rodzin interpolacyjnych. Parametrem metody Cobosa–Peetrego są wewnętrzne punkty wypukłego wielokąta na płaszczyźnie. Jak się przekonamy, związanie już czterech przestrzeni Banacha z punktami płaszczyzny powoduje, że dziedziczenie własności przez uzyskane w ten sposób przestrzenie interpolacyjne istotnie zależy od położenia parametru względem wierzchołków wielokąta.

Zachowanie miary niezwartości Hausdorffa dla metody Cobosa–Peetrego zbadano w [19]. Jakościowe rezultaty o dziedziczeniu słabej zwartości uzyskano w [18]. Ilościowe wyniki dla miary słabej niezwartości γ opartej na warunku Jamesa zawiera praca [K3], gdzie wykazane zostały kluczowe dla rozważań prowadzonych w pracy [K4] oszacowania norm. W pracy [K4] podajemy oszacowania miar odchylenia od własności BS i ABS dla trzech typów operatorów rozważanych w literaturze.

Rodzinę przestrzeni Banacha $A_1, \ldots, A_N$, liniowo i w sposób ciągły zanurzoną w topologicznej przestrzeni Hausdorffa E, nazywamy N-tką Banacha i oznaczamy przez $\vec{A} = (A_1, \ldots, A_N)$. Niech $N \geqslant 3$ i $\Pi = P_1 \ldots P_N$ będzie wypukłym wielokątem o wierzchołkach $P_j \in \mathbb{R}^2$, $j = 1, \ldots, N$. Dla każdego $z \in \mathbb{Z}^2$, J-funkcjonał w $\Delta(\vec{A})$ i K-funkcjonał w $\Sigma(\vec{A})$ określamy wzorami

$$J(z; a) = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \left\{ 2^{\langle P_j, z \rangle} \|a\|_{A_j} \right\}$$

oraz

$$K(z; a) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{N} 2^{\langle P_j, z \rangle} \|a_j\|_{A_j} : a_j \in A_j,\ a = \sum_{j=1}^{N} a_j \right\}.$$

Funkcjonały te wprowadzają równoważne normy odpowiednio w przestrzeniach $\Delta(\vec{A}) = A_1 \cap \cdots \cap A_N$ i $\Sigma(\vec{A}) = A_1 + \cdots + A_N$, które określamy analogicznie jak dla par Banacha. Niech $1 \leqslant q < \infty$. Dla każdego wewnętrznego punktu P wielokąta Π, J-przestrzeń $A_{P,q;J}$ składa się ze wszystkich $a \in \Sigma(\vec{A})$, dla których istnieje rodzina $u = (u(z))_{z \in \mathbb{Z}^2} \subset \Delta(\vec{A})$ taka, że $\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} u(z)$ zbiega do a w $\Sigma(\vec{A})$ oraz

$$\|a\|_{A_{P,q;J}} = \inf \left\{ \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \left(2^{-\langle P, z \rangle} J(z; u(z)) \right)^q \right)^{1/q} : a = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} u(z) \right\} < \infty.$$

Na K-przestrzeń $A_{P,q;K}$ składają się wszystkie $a \in \Sigma(\vec{A})$, dla których

$$\|a\|_{A_{P,q;K}} = \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \left(2^{-\langle P, z \rangle} K(z; a) \right)^q \right)^{1/q} < \infty.$$

W pracach [K3, K4] używamy norm równoważnych opartych na przestrzeniach $X(j) = l_q(P - P_j, A_j)$ dla $j = 1, \ldots, N$. W przestrzeni $A_{P,q;J}$ wprowadzamy normę

$$|||a|||_{A_{P,q;J}} = \inf \left\{ \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \|u\|_{X(j)} \right\},$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich reprezentacjach

$$u = (u(z))_{z \in \mathbb{Z}^2} \in \bigcap_{j=1}^{N} X(j), \qquad a = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} u(z) \text{ w } \Sigma(\vec{A}), \tag{4.1}$$

a w przestrzeni $A_{P,q;K}$ normę

$$|||a|||_{A_{P,q;K}} = \inf\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant N} \|a_j\|_{X(j)}\right\},$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich rozkładach

$$(4.2) \qquad a_j = (a_j(z))_{z\in\mathbb{Z}^2} \in X(j),\ j=1,\dots,N, \qquad a = \sum_{j=1}^{N} a_j(z),\ z\in\mathbb{Z}^2.$$

Jeśli $P \in \Pi = P_1 \dots P_N$, to dowolne nieujemne liczby $\theta_1,\dots,\theta_n$ takie, że $\sum_{j=1}^n \theta_j = 1$ oraz $P = \sum_{j=1}^n \theta_j P_j$ nazywamy współrzędnymi barycentrycznymi punktu P względem Π. Współrzędne barycentryczne względem trójkąta wyznaczone są jednoznacznie, a dla wewnętrznych punktów dowolnego wielokąta istnieją dodatnie współrzędne barycentryczne.

Zbiór wszystkich trójek $\{j_1, j_2, j_3\}$ takich, że P należy do trójkąta $P_{j_1}P_{j_2}P_{j_3}$ oznaczać będziemy przez $\mathcal{P}_P$. Aby ująć w jednym oszacowaniu przypadki, gdy P leży we wnętrzu trójkąta lub na jego boku (przekątnej wielokąta Π), przyjmujemy konwencję, że $0^0 = 1$ (zob. [K3, Lem. 4.1]).

Dla $q \in (1,\infty)$ i wewnętrznego punktu P wielokąta Π, operatory $T\colon A_{P,q;J} \to B_{P,q;J}$, $T\colon A_{P,q;K} \to B_{P,q;K}$, $T\colon A_{P,q;J} \to B_{P,q;K}$ i $T\colon A_j \to B_j$ oznaczać będziemy odpowiednio przez $T_{J\to J}$, $T_{K\to K}$, $T_{J\to K}$ i T_j. Poniższy wynik posłuży do oszacowania odchyleń od własności BS i ABS dla operatorów $T_{J\to J}$ i $T_{K\to K}$.

Stwierdzenie 4.1 ([K3, Prop. 4.2])**.** *Niech $\vec{A} = (A_1,\dots,A_N)$ będzie N-tką Banacha. Niech $\Pi = P_1 \dots P_N$ będzie wypukłym wielokątem, $P \in \operatorname{Int}\Pi$ i niech $X(j) = l_q(P - P_j, A_j)$ dla $j = 1,\dots,N$.*

(i) *Jeśli reprezentacja u elementu $a \in A_{P,q;J}$ spełnia* (4.1)*, to*

$$|||a|||_{A_{P,q;J}} \leqslant C_P \max\left\{\prod_{j\in\Delta} \|u\|_{X(j)}^{\vartheta_j} : \Delta \in \mathcal{P}_P\right\}.$$

(ii) *Jeśli rozkład $a_1,\dots,a_N$ elementu $a \in A_{P,q;K}$ spełnia* (4.2)*, to*

$$|||a|||_{A_{P,q;K}} \leqslant C_P \max\left\{\prod_{j\in\Delta} \|a_j\|_{X(j)}^{\vartheta_j} : \Delta \in \mathcal{P}_P\right\}.$$

Stała C_P zależy jedynie od P i Π, a ϑ_j, $j \in \Delta$, są współrzędnymi barycentrycznymi punktu P względem trójkąta o wierzchołkach P_j, $j \in \Delta$.

W oszacowaniach rozważanych odchyleń dla operatorów $T_{J\to K}$, zasadnicze znaczenie mają oszacowania K-normy elementów z J-przestrzeni przez normy ich reprezentacji w przestrzeniach $l_q(P - P_j, A_j)$. Ze względów rachunkowych, w kolejnym stwierdzeniu ograniczamy zakres położenia wierzchołków wielokąta. Przestrzenie interpolacyjne uzyskane metodą Cobosa–Peetrego względem wielokątów związanych afinicznym izomorfizmem są równoważne (zob. [22, Rem. 4.1]). Zatem oszacowania podane w poniższym stwierdzeniu oraz w Twierdzeniu 4.3 dla operatorów $T_{J\to K}$ zachodzą również w ogólnym przypadku z dokładnością do stałej C_θ.

Stwierdzenie 4.2 ([K3, Prop. 5.1]). *Niech $\vec{A} = (A_1, \ldots, A_N)$ będzie N-tką Banacha. Niech $\Pi = P_1 \ldots P_N$ będzie wypukłym wielokątem o wierzchołkach $P_1 = (0,0)$, $P_k = (1,0)$, $P_l = (0,1)$ dla pewnych $k, l \in \{2, \ldots, N\}$ i niech $\theta_1, \ldots, \theta_N$ będą dowolnymi dodatnimi współrzędnymi barycentrycznymi punktu $P \in \operatorname{Int}\Pi$ względem $P_1, \ldots, P_N$. Jeśli $a \in A_{P,q;J}$ i u jest reprezentacją a spełniającą* (4.1)*, to*

$$|||a|||_{A_{P,q;K}} \leq C_\theta \prod_{j=1}^{N} \|u\|_{X(j)}^{\theta_j},$$

gdzie $X(j) = l_q(P - P_j, A_j)$, a C_θ zależy jedynie od $\theta_1, \ldots, \theta_N$.

Dowód powyższej nierówności jest kilkuetapowy. Bezpośrednie obliczenia, podobne do tych przeprowadzonych przez Cobosa, Kühna i Schonbeka w pracy [22, Thm. 4.3] dla norm operatorów, prowadzą do oszacowań z zaburzonymi współrzędnymi barycentrycznymi punktu P w wykładnikach. Przy czym, im bardziej zbliżamy się do współrzędnych barycentrycznych, tym większa jest stała oszacowania. Aby uniknąć obu tych problemów wykorzystujemy fakt, że przestrzeń $A_{P,q;J}$ zawarta jest w J-przestrzeni Sparra a przestrzeń $A_{P,q;K}$ zawiera K-przestrzeń Sparra (oba zawierania są ciągłe [22]). Dla wygody, zamiast przestrzeniami Sparra, posługujemy się równoważnymi przestrzeniami Yoshikawy [67].

Twierdzenie 4.3 ([K4, Thm. 14]). *Niech Φ będzie równe Φ_{BS} lub Φ_{ABS}. Niech $\vec{A} = (A_1, \ldots, A_N)$ i $\vec{B} = (B_1, \ldots, B_N)$ będą N-tkami Banacha, $\Pi = P_1 \ldots P_N$ wypukłym wielokątem, $P \in \operatorname{Int}\Pi$ i $1 < q < \infty$. Jeśli $T\colon \vec{A} \to \vec{B}$, to*

$$\Phi(T_{J\to K}) \leqslant C_\theta \prod_{j=1}^{N} (\Phi(T_j))^{\theta_j}$$

oraz

$$\max\{\, \Phi(T_{J\to J}), \Phi(T_{K\to K}) \,\} \leqslant C_P \max\left\{ \prod_{j\in\Delta} (\Phi(T_j))^{\vartheta_j} : \Delta \in \mathcal{P}_P \right\}$$

z C_θ, C_P, θ_j, ϑ_j jak w Stwierdzeniach 4.1 i 4.2.

W dowodzie nierówności dla seminormy Φ_{BS} stosujemy stabilizację arytmetycznej separacji ciągów opartą na Stwierdzeniu 2.1 w dwóch wariantach: dla operatorów $T_{J\to K}$ i osobno dla operatorów $T_{K\to K}$. Dowód dla operatorów $T_{J\to J}$ jest kompozycją dowodów dla pozostałych dwóch typów. Dowody dla seminormy Φ_{ABS} przebiegają analogicznie.

Wniosek 4.4 ([K4, Col. 15]). *Jeśli T_j ma własność BS dla przynajmniej jednego $j \in \{1, \ldots, N\}$, to $T_{J\to K}$ ma własność BS dla wszystkich wewnętrznych punktów P*

wielokąta Π *i wszystkich* $q \in (1, \infty)$. *Taka sama zależność zachodzi dla własności ABS.*

Jeśli Π jest trójkątem, to powyższy wniosek jest prawdziwy również dla operatorów $T_{J\to J}$ i $T_{K\to K}$. Dziedziczenie własności BS i ABS przez operatory tego typu dla N-kątów z $N \geqslant 4$ ogólnie zależy od położenia punktu P i rozkładu operatorów odpowiednio z własnością BS lub ABS pomiędzy wierzchołkami Π. Własności BS i ABS przypisane do wierzchołków o zerowej współrzędnej barycentrycznej są pomijane. Zatem to przekątne wielokąta Π decydują o rozkładzie, przy którym dziedziczenie zachodzi niezależnie od położenia punktu P wewnątrz Π.

Wniosek 4.5 ([K4, Col. 16]). *Jeśli* T_j *ma własność BS dla wszystkich indeksów* $j \in \{1, \ldots, N\}\backslash\{j_1, j_2\}$, *gdzie* P_{j_1} *i* P_{j_2} *są sąsiednimi wierzchołkami* Π, *to* $T_{J\to J}$ *i* $T_{K\to K}$ *mają własność BS dla wszystkich wewnętrznych punktów* P *wielokąta* Π *i wszystkich* $q \in (1, \infty)$. *W szczególności, jeśli* A_j *ma własność BS dla indeksów* j *określonych poprzednio, to mają ją także* $A_{P,q;J}$ *i* $A_{P,q;K}$. *Taka sama zależność zachodzi dla własności ABS.*

5. Arytmetyczne rozseparowanie i zbiory Banacha–Saksa

Pierwsza część pracy [K4] poświęcona jest miarom odchylenia zbiorów od własności BS i ABS. Niech $\mathcal{M}(X)$ oznacza rodzinę wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni Banacha X. Rodzinę wszystkich ograniczonych ciągów w zbiorze $D \subset X$, które nie mają podciągu Cauchy'ego, oznaczać będziemy przez $\mathcal{N}(D)$. Zbiór $D \in \mathcal{M}(X)$ nazywamy zbiorem Banacha–Saksa (BS), jeśli każdy ciąg w D zawiera podciąg (x_n) taki, że ciąg sum $m^{-1}\sum_{n=1}^{m} x_n$ jest zbieżny w X. Jeśli natomiast każdy ciąg w D zawiera podciąg (x_n) taki, że sumy $m^{-1}\sum_{n=1}^{m}(-1)^n x_n$ są zbieżne w X, to mówimy, że D jest zbiorem Banacha–Saksa z naprzemiennymi znakami (ABS).

Punktem wyjścia naszych rozważań jest wspomniana już charakteryzacja własności ABS przestrzeni Banacha podana przez Beauzamy'ego [8] z użyciem modeli rozszerzających. Analiza dowodów Twierdzeń II.2 i III.1 z pracy [8] wskazuje, że możemy je zaadaptować do ograniczonych podzbiorów przestrzeni Banacha X.

Zatem $D \in \mathcal{M}(X)$ nie jest zbiorem ABS wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki ciąg $(x_n) \in \mathcal{N}(D)$, że ciąg fundamentalny (e_n) modelu rozszerzającego F w X zbudowanego na (x_n) jest równoważny w F bazie jednostkowej przestrzeni l_1. Na podstawie Twierdzenia II.2.2 z [11], równoważność ta zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\delta > 0$ i taki podciąg (x'_n) ciągu (x_n), że $\left\|\sum_{n\in A}\epsilon_n x'_n\right\| > \delta\,|A|$ dla wszystkich skończonych podzbiorów $A \subset \mathbb{N}$ i wszystkich ciągów znaków (ϵ_n).

Wniosek 5.1 ([K4, Cor. 3]). *Zbiór* $D \in \mathcal{M}(X)$ *jest zbiorem ABS wtedy i tylko wtedy, gdy* $\phi(x_n) = 0$ *dla każdego ciągu* (x_n) *w* D.

Własności BS i ABS dla refleksywnych przestrzeni Banacha pokrywają się. Wynika to z tego, że ciąg fundamentalny (e_n) modelu rozszerzającego F zbudowany na słabo zbieżnym do zera ciągu (x_n) w X jest bezwarunkowy w F [8, Lem. I.2]. Adaptując bezpośrednio dowód z [11, Prop. II.4.1], można wykazać, że jeśli zbiór $D \in \mathcal{M}(X)$ jest relatywnie słabo zwarty, to D jest zbiorem BS wtedy i tylko wtedy, gdy D jest zbiorem ABS. Fakt ten wykorzystujemy w dowodzie następującej charakteryzacji zbiorów BS.

Stwierdzenie 5.2 ([K4, Prop. 5]). *Zbiór $D \in \mathcal{M}(X)$ jest zbiorem BS wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{asep}(x_n) = 0$ *dla każdego ciągu (x_n) w D.*

Punktami odniesienia dla arytmetycznego rozseparowania ciągu są wspominane wcześniej rozseparowanie i wypukłe rozseparowanie ciągu. Rozseparowania te w naturalny sposób układają się w ciąg nierówności:

$$\operatorname{csep}(x_n) \leqslant \operatorname{asep}(x_n) \leqslant \operatorname{sep}(x_n).$$

Słaba zwartość i własność BS mają zatem zbliżone opisy geometryczne. Co więcej, w dalszym ciągu przekonamy się, że w wielu klasycznych przestrzeniach Banacha miary odchylenia od tych własności pokrywają się. Różnicę pomiędzy arytmetycznym a wypukłym rozseparowaniem ciągu dostrzeżemy w przestrzeni Baernsteina [4], która jest refleksywna, ale nie ma własności BS.

Niech Ω oznacza zbiór wszystkich ciągów (ω_n) skończonych niepustych zbiorów $\omega_n \subset \mathbb{N}$ takich, że $|\omega_n| \leqslant \min \omega_n$ i $\max \omega_n < \min \omega_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech B_p, $1 < p < \infty$, będzie przestrzenią wszystkich ciągów rzeczywistych $x = (x_n)$ takich, że

$$\|x\| = \sup \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in \omega_n} |x_i| \right)^p \right)^{1/p} : (\omega_n) \in \Omega \right\} < \infty.$$

Dla $p = 2$ otrzymujemy przestrzeń wprowadzoną przez Baernsteina w [4]. Niech $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ z 1 na n-tym miejscu. Wtedy dla każdego $m \in \mathbb{N}$ i wszystkich podzbiorów $A, B \subset \mathbb{N}$ z $|A| = |B| = m$ i $\max A < \min B$,

$$\left\| \frac{1}{m} \left(\sum_{n \in A} e_n - \sum_{n \in B} e_n \right) \right\|^p \geqslant \left\| \frac{1}{m} \sum_{n \in A} e_n \right\|^p + 1.$$

Zatem $\operatorname{asep}(e_n) \geqslant 1$ i $\overline{\mathsf{B}}(B_p)$ nie jest zbiorem BS. Ponieważ zbiór $\overline{\mathsf{B}}(B_p)$ jest słabo zwarty, więc $\operatorname{csep}(e_n) = 0$, co z pewnym wysiłkiem zaobserwować można również bezpośrednio.

Rozseparowanie i wypukłe rozseparowanie ciągu wykorzystuje się do określenia odpowiednio miar niezwartości β i słabej niezwartości γ zbioru $D \in \mathcal{M}(X)$, gdzie

$$\beta(D) = \sup \{\operatorname{sep}(x_n) \colon (x_n) \subset D\} \quad \text{i} \quad \gamma(D) = \sup \{\operatorname{csep}(x_n) \colon (x_n) \subset D\}.$$

Miara γ została wprowadzona w [K7] z supremum po wszystkich ciągach w $\operatorname{conv}(D)$. Na mocy Twierdzenia 13 z [33] w połączeniu z Twierdzeniem 2.5 z [K7], zakres supremum można ograniczyć do ciągów w D.

Odchylenie zbioru od własności BS lub ABS można mierzyć w podobny sposób.

Definicja 5.3 ([K4, Def. 7])**.** Niech $D \in \mathcal{M}(X)$. Określmy

$$\varphi(D) = \sup\{\operatorname{asep}(x_n)\colon (x_n) \subset D\} \quad \text{oraz} \quad \widehat{\varphi}(D) = \sup\{\phi_{vsm}(x_n)\colon (x_n) \subset D\}\,.$$

Wniosek 5.4 ([K4, Cor. 8])**.** *Niech $D \in \mathcal{M}(X)$.*

(i) $\varphi(D) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy D jest zbiorem BS.*
(ii) $\widehat{\varphi}(D) = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy D jest zbiorem ABS.*
(iii) $\gamma(D) \leqslant \varphi(D) \leqslant \beta(D)$ *oraz* $2\widehat{\varphi}(D) \leqslant \varphi(D)$.

Nierówność $\gamma(D) \leqslant \varphi(D)$ można potraktować jako ilościowy odpowiednik dla zbiorów wyniku Nishiury i Watermana [57], którzy wykazali, że każda przestrzeń Banacha z własnością BS jest refleksywna.

Interesującym zagadnieniem jest stabilność danej własności zbioru po przejściu do jego otoczki wypukłej. Zarówno zwartość jak i słaba zwartość (twierdzenie Kreina) są stabilne po tym względem. Zasada ta ma także swój ilościowy odpowiednik: $\beta(D) = \beta(\operatorname{conv}(D))$ [1, 2] oraz $\gamma(D) = \gamma(\operatorname{conv}(D))$ [33, Thm. 13].

Pytanie o to, czy wypukła otoczka zbioru BS jest zbiorem BS pojawia się w pracy Gonzáleza i Gutiérreza [38]. Negatywnej odpowiedzi udzielił niedawno Kalton, którego przykład podaje Tradacete w swojej rozprawie doktorskiej [65, s. 114].

Stwierdzenie 5.5 ([K4, Prop. 9])**.** *Niech $D, E \in \mathcal{M}(X)$.*

(i) *Jeśli $D \subset E$, to $\varphi(D) \leqslant \varphi(E)$ oraz $\widehat{\varphi}(D) \leqslant \widehat{\varphi}(E)$.*
(ii) $\varphi(tD) = |t|\,\varphi(D)$ *oraz* $\widehat{\varphi}(tD) = |t|\,\widehat{\varphi}(D)$ *dla każdej liczby t.*
(iii) $\varphi(D \cup E) = \max\{\varphi(D), \varphi(E)\}$ *oraz* $\widehat{\varphi}(D \cup E) = \max\{\widehat{\varphi}(D), \widehat{\varphi}(E)\}$.
(iv) *Jeśli D, E są wypukłe, to $\varphi(D+E) \leqslant \varphi(D)+\varphi(E)$. Jeśli D, E są wypukłe i symetryczne, to $\widehat{\varphi}(D+E) \leqslant \widehat{\varphi}(D)+\widehat{\varphi}(E)$.*

Wartość φ na kuli jednostkowej przestrzeni X określa jednoznacznie, czy X ma własność BS. W niektórych przypadkach wartość ta wskazuje również na własność ABS przestrzeni X.

Stwierdzenie 5.6 ([K4, Prop. 10])**.** *Jeśli przestrzeń Banacha X nie ma własności ABS, to $\varphi(\overline{\mathsf{B}}(X)) = 2$. Przestrzeń Banacha X nie ma własności BS wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \leqslant \varphi(\overline{\mathsf{B}}(X)) \leqslant 2$.*

Oczywiście $\varphi(\overline{\mathsf{B}}(l_1)) = 2$ i $\varphi(\overline{\mathsf{B}}(B_p)) = 2$ dla $1 < p < \infty$. Wartości pomiędzy 1 i 2 dla φ uzyskujemy dla kul jednostkowych przestrzeni Jamesa J_p, $1 < p < \infty$, składającej się ze wszystkich ciągów rzeczywistych $x = (x(k))$ zbieżnych do zera, ze skończoną normą

$$\|x\| = \sup\left(\sum_{l=1}^{n-1} |x(k_{l+1}) - x(k_l)|^p\right)^{1/p}, \tag{5.1}$$

gdzie supremum przebiega po wszystkich skończonych ciągach liczb całkowitych $0 < k_1 < \cdots < k_n$ z $n \geqslant 2$.

Stwierdzenie 5.7 ([K4, Prop. 11]). *Jeśli* $D \in \mathcal{M}(J_p)$ *i* $1 < p < \infty$, *to* $\varphi(D) = \gamma(D)$.

W [K11, Thm. 3.2] wykazaliśmy, że

$$\gamma(D) = 2^{1/p} \sup \left\{ \lim_{k\to\infty} |x^{**}(k)| \right\},$$

gdzie supremum przebiega po wszystkich ciągach (x_n) w D i wszystkich w^*-punktach skupienia $x^{**} = (x^{**}(k)) \in J_p^{**}$ ciągu (x_n). Stąd $\varphi(\overline{\mathsf{B}}(J_p)) = 2^{1/p}$. Na mocy Stwierdzenia 5.6 przestrzeń J_p ma własność ABS dla każdego $1 < p < \infty$. Inny dowód własności ABS dla przestrzeni Jamesa $J = J_2$ podały Fetter i Gamboa de Buen [36, Prop. 2.h.5].

Modyfikując dowody Twierdzeń 2.8 z [K7] oraz 3.4 z [K11] można wykazać, że φ i γ pokrywają się zarówno w przestrzeni c_0 rzeczywistych ciągów zbieżnych do zera jak i w przestrzeni c rzeczywistych ciągów zbieżnych. Stąd $\varphi(\overline{\mathsf{B}}(c_0)) = 1$ i $\varphi(\overline{\mathsf{B}}(c)) = 2$. Wynik Pełczyńskiego przytoczony w [13, Prop. 3.1] pokazuje, że c_0 ma własność ABS. W ten sam sposób można wykazać własność ABS dla c. Wynika stąd, że pierwszej implikacji w Stwierdzeniu 5.6 nie można odwrócić.

Miary φ i γ pokrywają się również w przestrzeni Lebesgue'a $L_1([0,1])$. Można to zauważyć wykorzystując zależność pomiędzy miarą γ a miarą słabej niezwartości ω wprowadzoną przez De Blasiego [28] dla każdego $D \in \mathcal{M}(X)$ wzorem

$$\omega(D) = \inf\{t > 0\colon D \subset K + t\overline{\mathsf{B}}(X),\ K \text{ jest zbiorem słabo zwartym}\}.$$

W [K8, Thm. 2.5] wykazano, że $\gamma(D) = 2\omega(D)$ dla każdego $D \in \mathcal{M}(L_1([0,1]))$. Jeśli zbiór K jest słabo zwarty w $L_1([0,1])$, to jego otoczka wypukła jest relatywnie słabo zwarta i na mocy wyniku Szlenka [64] jest zbiorem BS. Przestrzeń $L_1([0,1])$ nie ma własności ABS. Jeśli więc $D \subset K + t\overline{\mathsf{B}}(L_1([0,1]))$ dla $t > 0$, to ze Stwierdzeń 5.5 i 5.6 wynika, że $\varphi(D) \leqslant \varphi(\mathrm{conv}(K)) + t\varphi(\overline{\mathsf{B}}(L_1(\mu)) = 2t$ co ostatecznie daje $\varphi = 2\omega = \gamma$ w $L_1([0,1])$.

6. Interpolacja i ekstrapolacja średnich rozseparowań w przestrzeniach Banacha

Jednotematyczny cykl publikacji zamyka praca [K5], w której uzyskujemy oszacowania miar odchylenia od wybranych własności dla abstrakcyjnych metod interpolacyjnych. Zarys takich metod pojawia się już w pracy Peetrego [59]. Metody te rozwijali później między innymi Brudnyi i Krugljak [12], a w wersji dyskretnej— Nilsson [56].

Zasadniczą ideą abstrakcyjnej interpolacji jest zastąpienie przestrzeni $l_p(X_\nu)$, występujących w określeniu rzeczywistych przestrzeni interpolacyjnych Lionsa–Peetrego, ogólniejszymi przestrzeniami $E(X_\nu)$ zbudowanymi na ciągowej kracie Banacha E. Przez ciągową kratę Banacha rozumiemy tutaj taką przestrzeń Banacha E funkcji rzeczywistych na $\mathbb{Z}$, z naturalnym częściowym porządkiem, że wszystkie funkcje na $\mathbb{Z}$ o skończonym nośniku należą do E oraz jeśli $x = (x(\nu)) \in E$ i $|y(\nu)| \leqslant |x(\nu)|$ dla każdego $\nu \in \mathbb{Z}$, to $y = (y(\nu)) \in E$ i $\|y\|_E \leqslant \|x\|_E$.

Wtedy dla ciągu $(X_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ przestrzeni Banacha, $E(X_\nu)$ oznacza przestrzeń Banacha składającą się ze wszystkich $x = (x(\nu))_{\nu\in\mathbb{Z}}$ takich, że $x(\nu) \in X_\nu$ dla każdego $\nu \in \mathbb{Z}$ oraz $\|x\|_{E(X_\nu)} < \infty$, gdzie

$$\|x\|_{E(X_\nu)} = \left\|(\|x(\nu)\|_{X_\nu})\right\|_E .$$

W pracy [K5] dokonujemy pewnej syntezy wprowadzając pojęcie średniego rozseparowania ciągu. Jednym warunkiem geometrycznym obejmujemy w ten sposób miary odchylenia od własności BS i ABS rozpatrywane w poprzednich pracach cyklu.

Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha. Niech $\mathcal{G}_0$ oznacza zbiór wszystkich ciągów $(\epsilon_n)_{n\in G}$ znaków $\epsilon_n = \pm 1$ nad wszystkimi skończonymi zbiorami $G \subset \mathbb{N}$. Przyjmijmy, że $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_0$ i ustalmy δ równe 1 lub 2. Współczynnik δ umożliwia rozpatrywanie rozseparowania między średnimi bądź odseparowania średniej od zera.

Definicja 6.1 ([K5, Def. 1]). Niech (x_n) będzie ograniczonym ciągiem w przestrzeni Banacha. *Średnie rozseparowanie* ciągu (x_n) nad $\mathcal{G}$ określamy wzorem

$$\phi(x_n) = \inf\left\{\left\|\delta\,|G|^{-1}\sum_{n\in G}\epsilon_n x_n\right\| : (\epsilon_n)_{n\in G} \in \mathcal{G}\right\},$$

a odpowiednią wielkość dla operatora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ jako

$$\Phi(T) = \sup\{\phi(Tx_n)\colon (x_n) \subset \mathsf{B}(X)\}.$$

Rozpatrujemy teraz tylko takie podzbiory $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_0$, z którymi można stowarzyszyć pewną relację uśredniania na równolicznych blokach, zapewniającą stabilizację wielkości ϕ. W tym celu rozważamy zbiór $\mathcal{H}_0$ składający się ze wszystkich ciągów znaków $(\zeta_i)_{i\in\bigcup H_n}$, gdzie (H_n) jest ciągiem równolicznych zbiorów $H_n \subset \mathbb{N}$ z $\max H_n < \min H_{n+1}$. Niech $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_0$. Dla ciągów (x_n) i (y_n) w przestrzeni Banacha, piszemy $(y_n) \succ_{\mathcal{H}} (x_n)$, jeśli istnieje $(\zeta_i)_{i\in\bigcup H_n} \in \mathcal{H}$ takie, że

$$y_n = \frac{1}{m}\sum_{i\in H_n}\zeta_i x_i,$$

gdzie $m = |H_n|$ dla wszystkich n.

Parę $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ będziemy nazywać *stabilną* dla ϕ w przestrzeni Banacha X, jeśli spełnione są następujące warunki:

(s1) $\mathcal{H}$ zawiera wszystkie $(\zeta_i)_{i\in\bigcup H_n} \in \mathcal{H}_0$ takie, że $\zeta_i = 1$ dla wszystkich $i \in \bigcup_{n\geqslant 1} H_n$.

(s2) Jeśli $(\epsilon_n)_{n\in G} \in \mathcal{G}$, $(\zeta_i)_{i\in\bigcup H_n} \in \mathcal{H}$, $G' = \bigcup_{n\in G} H_n$ oraz $\zeta'_i = \epsilon_n\zeta_i$ dla $n \in G$, $i \in H_n$, to $(\zeta'_i)_{i\in G'} \in \mathcal{G}$.

(s3) Dla każdego ograniczonego ciągu (x_n) w X, istnieje $(y_n) \succ_{\mathcal{H}} (x_n)$ takie, że dla wszystkich $(\epsilon_n)_{n\in G} \in \mathcal{G}$,
$$\left\| \delta \, |G|^{-1} \sum_{n\in G} \epsilon_n y_n \right\| \leqslant \phi(y_n) + \varepsilon.$$

Warunek (s1) oznacza, że relacja $\succ_{\mathcal{H}}$ obejmuje wszystkie przejścia do ciągów kolejnych średnich arytmetycznych zbudowanych na równolicznych blokach. W szczególności $(x'_n) \succ_{\mathcal{H}} (x_n)$ dla każdego podciągu (x'_n) ciągu (x_n). Z (s2) wynika, że jeśli $(y_n) \succ_{\mathcal{H}} (x_n)$, to $\phi(y_n) \geqslant \phi(x_n)$. Kolejny wniosek, będący kombinacją warunków (s2) i (s3), gwarantuje możliwość wielokrotnego uśredniania z użyciem relacji $\succ_{\mathcal{H}}$ przy zachowaniu ograniczonego wahania ϕ. To z kolei wykorzystujemy w dowodzie subaddytywności seminormy Φ w $\mathcal{L}(X, Y)$ zakładając, że para $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ jest stabilna dla ϕ w Y.

Wniosek 6.2 ([K5, Col. 2])**.** *Niech $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ będzie stabilną parą dla ϕ w X. Jeśli $(y_n) \succ_{\mathcal{H}} (x_n)$ spełnia warunek* (s3) *oraz $(y^i_n) \succ_{\mathcal{H}} (y^{i-1}_n)$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$ i $(y^0_n) = (y_n)$, to dla wszystkich $(\epsilon_n)_{n\in G} \in \mathcal{G}$,*
$$\left\| \delta \, |G|^{-1} \sum_{n\in G} \epsilon_n y^i_n \right\| \leqslant \phi(y_n) + \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Rozpatrujemy pary $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, które są stabilne dla ϕ w każdej przestrzeni Banacha. Takimi parami są:

(1) $(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_0)$.
(2) $(\mathcal{G}_1, \mathcal{H}_1)$, gdzie $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{H}_1$ składają się odpowiednio ze wszystkich $(\epsilon_n)_{n\in G} \in \mathcal{G}_0$ i $(\zeta_i)_{i\in\bigcup H_n} \in \mathcal{H}_0$ z $\epsilon_n = 1$ dla $n \in G$ oraz $\zeta_i = 1$ dla $i \in \bigcup_{n\geqslant 1} H_n$.
(3) $(\mathcal{G}_2, \mathcal{H}_2)$, gdzie $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$ i $\mathcal{G}_2$ składa się ze wszystkich $(\epsilon_n)_{n\in G} \in \mathcal{G}_0$ takich, że $G = E \cup F$ z $|E| = |F|$ oraz $\max E < \min F$, $\epsilon_n = 1$ dla $n \in E$, $\epsilon_n = -1$ dla $n \in F$.

Kolejne twierdzenie pokazuje z grubsza biorąc, że jeśli E ma własność BS, to maksymalne średnie rozseparowanie dla ciągów w kuli przestrzeni $E(X_\nu)$ nie jest sumą rozseparowań na poszczególnych współrzędnych X_ν, lecz jest osiągane na jednej z nich.

Twierdzenie 6.3 ([K5, Thm. 4])**.** *Niech $(X_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ i $(Y_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ będą ciągami przestrzeni Banacha i niech $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ będzie takim ciągiem operatorów, że $T_\nu \in \mathcal{L}(X_\nu, Y_\nu)$ dla każdego $\nu \in \mathbb{Z}$ i $\sup_{\nu\in\mathbb{Z}} \|T_\nu\| < \infty$. Jeśli ciągowa krata Banacha E ma własność BS i operator $\overline{T} \in \mathcal{L}(E(X_\nu), E(Y_\nu))$ dany jest wzorem $\overline{T}x = (T_\nu x(\nu))_{\nu\in\mathbb{Z}}$ dla każdego $x = (x(\nu))_{\nu\in\mathbb{Z}} \in E(X_\nu)$, to $\Phi(\overline{T}) = \sup_{\nu\in\mathbb{Z}} \Phi(T_\nu)$.*

Średnie rozseparowania ciągów nad $\mathcal{G}_0$ i $\mathcal{G}_2$ odpowiadają rozważanym wcześniej charakteryzacjom własności odpowiednio ABS i BS. Daje to następujący wynik jakościowy.

Wniosek 6.4 ([K5, Cor. 5]). *Przestrzeń $E(X_\nu)$ ma własność ABS wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie X_ν mają własność ABS. Taka sama zależność zachodzi dla własności BS.*

Jeśli za E przyjąć przestrzeń Banacha z własnością BS i bazą hiperortogonalną, to powyższy wniosek zawiera rezultat Partingtona [58, Thm. 3] o dziedziczeniu własności BS przez sumy proste.

Interpolacja własności operatorów ogólnymi metodami rzeczywistymi badana była zarówno z punktu widzenia jakościowego jak i ilościowego. Słabą zwartość operatorów dla abstrakcyjnej K-metody badali Aizenstein i Brudnyi [12, Thm 4.6.8] oraz Mastyło [52], który w pracy [51] zbadał również własność Rosenthala dla przestrzeni interpolacyjnych. Zachowanie zwartości dla abstrakcyjnych J- i K-metod w dyskretnej wersji Nilssona [56] badali Cobos, Fernández-Cabrera i Martínez [18]. Ogólne rezultaty dla ideałów operatorów zawierają prace [20, 50]. Ilościowe rezultaty obejmują interpolację miary niezwartości [17] oraz miar związanych z domkniętymi ideałami operatorów [34].

Główny wynik pracy [K5] dotyczy średniego rozseparowania dla abstrakcyjnych J- i K-metod rozważanych przez Nilssona [56].

Twierdzenie 6.5 ([K5, Thm. 6]). *Niech E będzie ciągową kratą Banacha z własnością BS. Niech $\vec{A} = (A_0, A_1)$ i $\vec{B} = (B_0, B_1)$ będą parami Banacha oraz $T\colon \vec{A} \to \vec{B}$.*

(1) *Jeśli krata E jest J-nietrywialna i $A_{E;J}$, $B_{E;J}$ są J-przestrzeniami odpowiednio dla $\vec{A}$, $\vec{B}$, to*
$$\Phi(T\colon A_{E;J} \to B_{E;J}) \leqslant \max\{\Phi(T\colon A_0 \to B_0), \Phi(T\colon A_1 \to B_1)\}.$$

(2) *Jeśli krata E jest K-nietrywialna i $A_{E;K}$, $B_{E;K}$ są K-przestrzeniami odpowiednio dla $\vec{A}$, $\vec{B}$, to*
$$\Phi(T\colon A_{E;K} \to B_{E;K}) \leqslant \max\{\Phi(T\colon A_0 \to B_0), \Phi(T\colon A_1 \to B_1)\}.$$

Wniosek 6.6 ([K5, Cor. 7]). *Jeśli $T\colon A_0 \to B_0$ i $T\colon A_1 \to B_1$ mają własność ABS, to $T\colon A_{E;J} \to B_{E;J}$ i $T\colon A_{E;K} \to B_{E;K}$ mają własność ABS. W szczególności, jeśli A_0 i A_1 mają własność ABS, to mają ją również $A_{E;J}$ i $A_{E;K}$. Taka sama zależność zachodzi dla własności BS.*

Jeśli norma w E spełnia nierówność logarytmicznie wypukłą (z dokładnością do stałego czynnika), to dana własność może być przeniesiona na interpolowany operator przez jedno ograniczenie: $T\colon A_0 \to B_0$ lub $T\colon A_1 \to B_1$. W kolejnym wniosku, biorąc ϕ nad $\mathcal{G}_0$ i $\mathcal{G}_2$, dostajemy odpowiednio Twierdzenie 2.4 dla własności ABS i Twierdzenie 3.5 dla własności BS.

Wniosek 6.7 ([K5, Cor. 8]). *Jeśli $E = l_p(2^{-\nu\theta})$ z $1 < p < \infty$ i $0 < \theta < 1$, to*
$$\Phi(T\colon A_{E;K} \to B_{E;K}) \leqslant 2^{\theta(1-\theta)} \left(\Phi(T\colon A_0 \to B_0)\right)^{1-\theta} \left(\Phi(T\colon A_1 \to B_1)\right)^{\theta}.$$

Na zakończenie pracy [K5] badamy kwestię dziedziczenia własności przez operatory i przestrzenie ekstrapolacyjne. Taka tematyka również występuje w literaturze. Przywołajmy ważniejsze wyniki zaczynając od konkretnych przestrzeni logarytmicznych. Triebel [66] oszacował liczby entropii dla włożeń przestrzeni ułamkowych Besova–Soboleva w przestrzenie Orlicza $L_\infty(\log L)_b(\Omega)$. Podobny problem dla włożeń w przestrzenie $L_p(\log L)_b(\Omega)$ z $1 < p < \infty$ był badany przez Edmundsa i Triebla [30]. Szacując moduł jednostajnej wypukłości, Nikolova i Zachariades [53] wykazali, że jednostajna wypukłość jest zachowywana przez abstrakcyjne przestrzenie logarytmiczne. Zbadali oni również wraz z Perssonem [55] typ i kotyp takich przestrzeni, wykorzystując przy tym nierówności Clarksona.

Abstrakcyjne metody ekstrapolacyjne rozwijane były miedzy innymi przez Jawertha i Milmana [44]. Podobną konstrukcję zastosowali Edmunds i Triebel [29] w określeniu abstrakcyjnych przestrzeni logarytmicznych. W pracy [K5] korzystamy z ogólnych definicji przestrzeni ekstrapolacyjnych podanych ostatnio przez Cobosa i Kühna [21].

Niech $I \subset [0,1]$ będzie przedziałem. Uporządkowaną rodzinę $(A_\theta)_{\theta\in I}$ przestrzeni Banacha nazywamy kompatybilną, jeśli istnieją przestrzenie Banacha A_0 i A_1 takie, że $A_0 \hookrightarrow A_\theta \hookrightarrow A_\eta \hookrightarrow A_1$ dla wszystkich $\theta < \eta$, przy czym wszystkie zanurzenia $\hookrightarrow$ są ciągłe i jednostajnie ograniczone. Niech $(A_\theta)_{\theta\in I}$ będzie kompatybilną rodziną przestrzeni Banacha, $b > 0$ i $1 < p < \infty$. Ustalmy $\theta \in I$ tak, że $(\theta, \theta+\varepsilon) \subset I$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Przestrzeń ekstrapolacyjna $A_\theta(\log A)^+_{b,p} = A^+_{\theta,b,p}$ składa się ze wszystkich elementów $a \in \bigcap_{\theta<\eta\leqslant\theta+\varepsilon} A_\eta$ ze skończoną normą

$$\|a\|_{A_\theta(\log A)^+_{b,p}} = \left(\int_0^\varepsilon \left(t^b \|a\|_{A_{\theta+t}}\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

Ustalmy teraz $\theta \in I$ tak, że $(\theta-\varepsilon, \theta) \subset I$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Przestrzeń ekstrapolacyjna $A_\theta(\log A)^-_{b,p} = A^-_{\theta,b,p}$ składa się ze wszystkich elementów $a \in A_1$, które można przedstawić jako całkę $a = \int_0^\varepsilon v(t)\frac{dt}{t}$ zbieżną w A_1 z $v(t) \in A_{\theta-t}$, mających skończoną normę

$$\|a\|_{A_\theta(\log A)^-_{b,p}} = \inf\left(\int_0^\varepsilon \left(t^{-b} \|v(t)\|_{A_{\theta-t}}\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p},$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich reprezentacjach a jak wyżej. Przestrzenie $A^+_{\theta,b,p}$ i $A^-_{\theta,b,p}$ nie zależą od wyboru $\varepsilon > 0$.

Aby móc skorzystać z Twierdzenia 6.3, posługujemy się równoważnymi dyskretnymi normami odpowiednio w $A^+_{\theta,b,p}$ i $A^-_{\theta,b,p}$. Dla $J \in \mathbb{N}$ takiego, że $2^{-J} < \varepsilon$ i dla wszystkich $\nu \geqslant J$, kładziemy $\sigma_\nu = \theta + 2^{-\nu}$ i $\lambda_\nu = \theta - 2^{-\nu}$. Niech

$$\|a\|_{A^+_{\theta,b,p}} = \left(\sum_{\nu=J}^\infty \left(2^{-\nu b} \|a\|_{A_{\sigma_\nu}}\right)^p\right)^{1/p}$$

oraz

$$\|a\|_{A^-_{\theta,b,p}} = \inf \left(\sum_{\nu=J}^{\infty} \left(2^{\nu b} \|a(\nu)\|_{A_{\lambda_\nu}} \right)^p \right)^{1/p},$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich reprezentacjach $a = \sum_{\nu=J}^{\infty} a(\nu)$, $a(\nu) \in A_{\lambda_\nu}$, zbieżnych w A_1. Zastępując J liczbą $J' \in \mathbb{N}$ taką, że $2^{-J'} < \varepsilon$, generujemy równoważne normy zarówno w $A^+_{\theta,b,p}$ jak i w $A^-_{\theta,b,p}$.

W szczególnym przypadku, jeśli $A_\theta = [A_0, A_1]_\theta$, $0 < \theta < 1$, są przestrzeniami interpolacyjnymi uzyskanymi metodą zespoloną względem zespolonych przestrzeni Banacha A_0 i A_1, gdzie przestrzeń A_0 jest zanurzona w sposób gęsty i ciągły w A_1, to $A^+_{\theta,b,p}$ i $A^-_{\theta,b,p}$ odpowiadają abstrakcyjnym przestrzeniom logarytmicznym $A_\theta(\log A)_{b,p}$ Edmundsa i Triebla [29] dla $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Z kolei, jeśli $A_0 = L_\infty(\Omega)$ i $A_1 = L_1(\Omega)$ dla ograniczonego otwartego podzbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, to $A_\theta(\log A)_{b,p}$ pokrywa się z przestrzenią Zygmunda $L_{1/\theta}(\log L)_b(\Omega)$.

Niech $(A_\theta)_{\theta\in I}$ i $(B_\theta)_{\theta\in I}$ będą kompatybilnymi rodzinami przestrzeni Banacha takimi, że $A_0 \hookrightarrow A_\theta \hookrightarrow A_1$ and $B_0 \hookrightarrow B_\theta \hookrightarrow B_1$ dla każdego $\theta \in I$. Dla operatora liniowego $T\colon A_1 \to B_1$ piszemy $T\colon (A_\theta)_{\theta\in I} \to (B_\theta)_{\theta\in I}$, jeśli $T|A_\theta$ dla każdego $\theta \in I$ jest ciągłym operatorem o wartościach w B_θ, a normy operatorów $T|A_\theta$ są jednostajnie ograniczone na I.

Twierdzenie 6.8 ([K5, Thm. 9]). *Niech $(A_\theta)_{\theta\in I}$ i $(B_\theta)_{\theta\in I}$ będą kompatybilnymi rodzinami przestrzeni Banacha i niech $1 < p < \infty$. Jeśli $T\colon (A_\theta)_{\theta\in I} \to (B_\theta)_{\theta\in I}$, to*

$$\Phi(T\colon A^+_{\theta,b,p} \to B^+_{\theta,b,p}) \leqslant \sup_{\theta\in I} \Phi(T\colon A_\theta \to B_\theta)$$

oraz

$$\Phi(T\colon A^-_{\theta,b,p} \to B^-_{\theta,b,p}) \leqslant \sup_{\theta\in I} \Phi(T\colon A_\theta \to B_\theta).$$

Dowód tego rezultatu jest w zasadzie bezpośrednim zastosowaniem Twierdzenia 6.3. Jako wniosek otrzymujemy wynik jakościowy. Dodajmy, że tego typu jakościowy rezultat dla domkniętych ideałów operatorowych otrzymali ostatnio przy użyciu innych metod Fernández-Cabrera i Martínez [35].

Wniosek 6.9 ([K5, Cor. 10]). *Jeśli $T\colon A_\theta \to B_\theta$ ma własność ABS dla wszystkich $\theta \in I$, to $T\colon A^+_{\theta,b,p} \to B^+_{\theta,b,p}$ i $T\colon A^-_{\theta,b,p} \to B^-_{\theta,b,p}$ mają własność ABS. W szczególności, jeśli A_θ ma własność ABS dla wszystkich $\theta \in I$, to mają ją również $A^+_{\theta,b,p}$ i $A^-_{\theta,b,p}$. Taka sama zależność zachodzi dla własności BS.*

Inne osiągnięcia naukowo–badawcze

Pozostałe prace koncentrują się przede wszystkim na geometrycznych warunkach opisujących zwartość w różnych topologiach oraz na ich zastosowaniach w teorii punktów stałych, teorii interpolacji i geometrii przestrzeni Banacha.

[K6] A. Kryczka, T. Kuczumow, The Denjoy-Wolff-type theorem for compact k_{B_H}-nonexpansive maps on a Hilbert ball, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska (1997) 179–183.
[K7] A. Kryczka, S. Prus, M. Szczepanik, Measure of weak noncompactness and real interpolation of operators, Bull. Austral. Math. Soc. 62 (2000) 389–401.
[K8] A. Kryczka, S. Prus, Measure of weak noncompactness under complex interpolation, Studia Math. 147 (2001) 89–102.
[K9] A. Kryczka, S. Prus, Separated sequences in nonreflexive Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001) 155–163.
[K10] A. Kryczka, Seminorms related to weak compactness under real and complex interpolation for finite families of Banach spaces, Nonlinear Analysis and Applications, Vol. II, (eds. R.P. Agarwal and D. O'Regan), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2003, 727–740, ISBN: 1-4020-1688-3.
[K11] A. Kryczka, Weak noncompactness in Banach sequence spaces and its extrapolation properties, Math. Inequal. Appl. 11 (2008) 297–306.
[K12] A. Kryczka, Deviation from weak Banach–Saks property for countable direct sums, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska (2014), w druku.

Głównym wynikiem pracy [K6] jest twierdzenie typu Denjoya–Wolffa dla zwartych nieoddalających przekształceń $f\colon \mathsf{B} \to \mathsf{B}$, wyposażonej w metrykę Kobayashiego, otwartej kuli jednostkowej przestrzeni Hilberta. Wykazujemy, że jeśli f nie ma punktu stałego, to istnieje punkt brzegowy $\xi \in \partial\mathsf{B}$ taki, że ciąg (f^n) iteracji f dąży lokalnie jednostajnie na B do stałego przekształcenia o wartości ξ. Pokazuje to w szczególności, że analogiczny wynik dla przekształceń holomorficznych, który uzyskali Chu i Mellon w [16], ma charakter metryczny.

Prace [K7, K8] związane są z tematem rozprawy doktorskiej i dotyczą zastosowań miar słabej niezwartości w teorii interpolacji. W [K7] wprowadzamy nową miarę słabej niezwartości γ dla ograniczonych podzbiorów przestrzeni Banacha i seminormę $\Gamma(T) = \gamma(T(\mathsf{B}(X)))$ dla operatorów $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Wprowadzona miara opiera się na geometrycznym opisie słabej niezwartości podanym przez Jamesa [43], wykorzystującym wypukłe rozseparowanie ciągu (zob. str. 17). W ogólnym przypadku, miara γ nie jest równoważna mierze słabej niezwartości ω podanej przez De Blasiego [28]. Pokazujemy dwa dodatkowe wzory na miarę γ. Pierwszy z nich odwołuje się do topologii słabej* [K7, Thm. 2.4]:

$$\gamma(A) = \sup \operatorname{dist}(x^{**}, \operatorname{conv}\{x_n\}),$$

gdzie supremum przebiega po wszystkich ciągach $(x_n) \subset \operatorname{conv}(A)$ i wszystkich w^*-puntach skupienia $x^{**} \in X^{**}$ ciągu (x_n). W drugim wzorze korzystamy pośrednio ze słabej topologii [K7, Thm. 2.5]:

$$\gamma(A) = \sup\left\{\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} F_m(x_n) - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} F_m(x_n)\right\},$$

gdzie supremum przebiega po wszystkich ciągach $(x_n) \subset \mathrm{conv}(A)$ i $(F_m) \subset \overline{\mathsf{B}}(X^*)$ (X^* względem X nad ciałem $\mathbb{R}$) takich, że wszystkie granice istnieją.

Głównym wynikiem pracy jest logarytmicznie wypukła (z dokładnością do stałego czynnika) nierówność dla seminormy Γ i operatorów poddanych rzeczywistej interpolacji Lionsa–Peetrego:

$$\Gamma(T\colon A_{\theta,p} \to B_{\theta,p}) \leqslant c_\theta\left(\Gamma(T\colon A_0 \to B_0)\right)^{1-\theta}\left(\Gamma(T\colon A_1 \to B_1)\right)^{\theta}$$

dla wszystkich $0 < \theta < 1$ i $1 < p < \infty$.

W pracy [K8] wprowadzamy miarę słabej niezwartości $\overline{\gamma}$, która jest równoważna mierze γ, ale w ogólnym przypadku od niej różna. Dla ograniczonego podzbioru A przestrzeni Banacha X miara $\overline{\gamma}(A)$ pokazuje odchylenie słabych* punktów skupienia ciągów (x_n) w $\mathrm{conv}(A)$ od przestrzeni $X \subset X^{**}$. W przestrzeni Lebesgue'a $L_1(\mu)$ ze skończoną miarą μ wykazujemy zależności pomiędzy miarami $\gamma, \overline{\gamma}$ a miarą De Blasiego: $\gamma = 2\omega$ i $\overline{\gamma} = \omega$. Pokazujemy również, że seminormy Γ i $\overline{\Gamma}$ w $\mathcal{L}(X,Y)$, gdzie $\overline{\Gamma}(T) = \overline{\gamma}(T(\mathsf{B}(X)))$, są równoważne rozważanej w [39] wielkości $\|R(\,\cdot\,)\|$, zadanej wzorem:

$$\|R(T)\| = \sup\{\mathrm{dist}(T^{**}x^{**}, Y)\colon\ \mathrm{dist}(x^{**}, X) \leqslant 1\}$$

dla $R(T)\colon X^{**}/X \to Y^{**}/Y$, $R(T)(x^{**} + X) = T^{**}x^{**} + Y$.

Głównym wynikiem pracy [K8] jest ilościowa wersja dla operatorów następującego rezultatu Calderóna [14] dla przestrzeni: jeśli jedna z przestrzeni Banacha A_0, A_1 jest refleksywna, to refleksywne są również wszystkie zespolone przestrzenie interpolacyjne $A_{[\theta]}$ dla $0 < \theta < 1$. Rezultat, który wykazujemy ma postać logarytmicznie wypukłej nierówności dla seminormy Γ:

$$\Gamma(T\colon A_{[\theta]} \to B_{[\theta]}) \leqslant \left(\Gamma(T\colon A_0 \to B_0)\right)^{1-\theta}\left(\Gamma(T\colon A_1 \to B_1)\right)^{\theta}$$

dla każdego $0 < \theta < 1$.

Praca [K9] odnosi się do znanego problemu maksymalnego rozseparowania elementów ciągu (x_n) w kuli jednostkowej przestrzeni Banacha. Elton i Odell [31] wykazali, że dla każdej nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej X istnieje takie $\epsilon > 0$, że kula jednostkowa przestrzeni X zawiera ciąg (x_n) o rozseparowaniu $\mathrm{sep}(x_n) = \inf_{m\neq n}\|x_m - x_n\|$ nie mniejszym niż $1+\epsilon$. W pracy [K9] pokazujemy, że kula jednostkowa dowolnej nierefleksywnej przestrzeni Banacha zawiera ciąg (x_n) taki, że $\mathrm{sep}(x_n) \geqslant \sqrt[5]{4} \approx 1,32$. Dowód, który podajemy wykorzystuje twierdzenie Ramseya i jedną z charakteryzacji refleksywności podaną przez Jamesa [43]. Pokazujemy ponadto, że separacyjna miara niezwartości β kuli jednostkowej przestrzeni Jamesa J_p z normą (5.1) dla $1 < p < \infty$ wynosi $(1 + 2^{p-1})^{1/p}$. Jeśli c jest największą stałą taką, że $\beta(\mathsf{B}(X)) \geqslant c$ dla każdej nierefleksywnej przestrzeni Banacha X, to oba te wyniki dają oszacowanie $\sqrt[5]{4} \leqslant c < 1,71$. Z drugiej strony, dla każdego $1 < p < \infty$ konstruujemy nierefleksywną przestrzeń Banacha Y_p, której kula jednostkowa nie zawiera ciągu (x_n) o rozseparowaniu większym niż $2^{1/p}$ i otoczce wypukłej $\mathrm{conv}\{x_n\}$ dowolnie bliskiej sfery jednostkowej. Wyniki pracy [K9] podają rozwiązania dwóch problemów postawionych w [7].

W artykule [K10] badamy zachowanie się różnych seminorm operatorowych związanych ze słabą zwartością pod wpływem wielowymiarowej interpolacji. Chodzi tu między innymi o seminormy—rozważane również w rozprawie doktorskiej—określone w [1] przez słabe k-kontrakcje. Wykazujemy nierówności dla operatorów poddanych rzeczywistej interpolacji Yoshikawy [67] (równoważnej K-metodzie Sparra [63]) dla skończonych rodzin Banacha $(A_0, \ldots, A_n)$.

Analogiczny problem dla interpolacji zespolonej rozpatrujemy dla metody podanej przez Coifmana i in. w [27]. Parametrami tej metody są punkty ζ łukowo spójnego obszaru D w $\mathbb{C}$, którego brzeg ∂D jest domkniętą krzywą prostowalną z miarą harmoniczną P_ζ. Rozważania prowadzimy dla skończonych rodzin interpolacyjnych przestrzeni Banacha przypisanych do brzegu $\partial D = (\Omega_0, \ldots, \Omega_n)$ podzielonego w ten sposób, że zbiory $\Omega_j \subset \partial D$ są rozłączne, P_ζ-mierzalne i $P_\zeta(\Omega_j) > 0$ dla $j = 0, 1, \ldots, n$. Kluczową rolę w dowodach nierówności odgrywają twierdzenia o zachowaniu seminorm dla pewnych klas operatorów należących do przestrzeni $\mathcal{L}(l_p(\xi, X), l_p(\xi, Y))$ w przypadku interpolacji rzeczywistej i $\mathcal{L}(L_\infty(\nu, X), L_1(\nu, Y))$ dla interpolacji zespolonej. Wykazujemy nierówność [K10, Thm. 3.2]:

$$\Gamma(T\colon A_{[\zeta]} \to B_{[\zeta]}) \leqslant \prod_{j=0}^{n} \left(\Gamma(T\colon A_j \to B_j)\right)^{\zeta_j}$$

gdzie $\zeta_j = P_\zeta(\Omega_j)$ dla każdego $j = 0, 1, \ldots, n$.

W pracy [K11] podajemy bezpośrednie wzory na miary słabej niezwartości w wybranych ciągowych przestrzeniach Banacha. Dla przestrzeni tych wykazujemy zależności pomiędzy miarą słabej niezwartości γ, opartą na warunku Jamesa [43], a miarą De Blasiego ω. W niektórych klasycznych przestrzeniach Banacha, np. w c_0, l_1 i $L_1([0,1])$, miary γ i ω są równe z dokładnością do stałego czynnika. Wykazujemy, że w przestrzeni c rzeczywistych ciągów zbieżnych z normą supremum, miary γ i ω są równoważne, ale nie istnieje stała α taka, że $\gamma = \alpha\omega$. Podajemy również oszacowania odchylenia od słabej zwartości dla operatorów liniowych i ograniczonych, ekstrapolowanych metodami Σ_p i Δ_p Jawertha–Milmana [44] dla $1 < p < \infty$.

W pracy [K12] wprowadzamy seminormę dla ograniczonych operatorów liniowych między przestrzeniami Banacha, która pokazuje odchylenie operatora od słabej własności Banacha–Saksa. Definicja seminormy oparta jest na dychotomii Rosenthala [61] i wyniku Partingtona [58]. Wykazujemy, że jeśli (X_ν) jest ciągiem przestrzeni Banacha i ciągowa krata Banacha E ma własność BS, to odchylenie od własności WBS operatora pewnej klasy, między sumami prostymi $E(X_\nu)$, jest równe supremum takich odchyleń osiąganych na poszczególnych współrzędny X_ν. Jest to ilościowa wersja dla operatorów wyniku mówiącego, że jeśli E ma własność

BS, to ciągowa przestrzeń Köthego–Bochnera $E(X)$ ma własność WBS wtedy i tylko wtedy, gdy X ma własność WBS.

Bibliografia

[1] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskii, Measures of noncompactness and condensing operators, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[2] J. Arias de Reyna, On r-separated sets in normed spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991) 1087–1094.

[3] J.M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides, G. López Acedo, Measures of noncompactness in metric fixed point theory, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[4] A. Baernstein II, On reflexivity and summability, Studia Math. 42 (1972) 91–94.

[5] S. Banach, S. Saks, Sur la convergence forte dans les champs L^p, Studia Math. 2 (1930) 51–57.

[6] J. Banaś, K. Goebel, Measures of noncompactness in Banach spaces, Marcel Dekker Inc., New York, 1980.

[7] M. Baronti, E. Casini, P.L. Papini, On average distances and the geometry of Banach spaces, Nonlinear Anal. 42 (2000) 533–541.

[8] B. Beauzamy, Banach–Saks properties and spreading models, Math. Scand. 44 (1979) 357–384.

[9] B. Beauzamy, Propriété de Banach–Saks, Studia Math. 66 (1980) 227–235.

[10] B. Beauzamy, Espaces d'interpolation réels: Topologie et géométrie, Lecture Notes in Mathematics, 666, Springer, Berlin, 1978.

[11] B. Beauzamy, J.-T. Lapresté, Modèles étalés des espaces de Banach, Hermann, Paris, 1984.

[12] Yu. Brudnyi, N.Ya. Krugljak, Interpolation functors and interpolation spaces, Vol. I. North-Holland, Amsterdam, 1991.

[13] A. Brunel, L. Sucheston, On B-convex Banach spaces, Math. Systems Theory 7 (1974) 294–299.

[14] A.-P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math. 24 (1964) 113–190.

[15] P. Cembranos, The weak Banach-Saks property on $L^p(\mu, E)$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 115 (1994) 283–290.

[16] C.-H. Chu, P. Mellon, Iteration of compact holomorphic maps on a Hilbert ball, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 1771–1777.

[17] F. Cobos, L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, Abstract K and J spaces and measure of noncompactness, Math. Nachr. 280 (2007) 1698–1708.

[18] F. Cobos, P. Fernández-Martínez, A. Martínez, On reiteration and the behaviour of weak compactness under certain interpolation methods, Collect. Math. 50 (1999) 53–72.

[19] F. Cobos, P. Fernández-Martínez, A. Martínez, Measure of non-compactness and interpolation methods associated to polygons, Glasg. Math. J. 41 (1999) 65–79.

[20] F. Cobos, L.M. Fernández-Cabrera, A. Manzano, A. Martínez, Real interpolation and closed operator ideals, J. Math. Pures Appl. 83 (2004) 417–432.

[21] F. Cobos, T. Kühn, Extrapolation estimates for entropy numbers, J. Funct. Anal. 263 (2012) 4009–4033.

[22] F. Cobos, T. Kühn, T. Schonbek, One-sided compactness results for Aronszajn-Gagliardo functors, J. Funct. Anal. 106 (1992) 274–313.

[23] F. Cobos, A. Manzano, A. Martínez, Interpolation theory and measures related to operator ideals, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 50 (1999) 401–416.

[24] F. Cobos, A. Martínez, Extreme estimates for interpolated operators by the real method, J. London Math. Soc. (2) 60 (1999) 860–870.

[25] F. Cobos, A. Martínez, Remarks on interpolation properties of the measure of weak non-compactness and ideal variations, Math. Nachr. 208 (1999) 93–100.

[26] F. Cobos, J. Peetre, Interpolation of compact operators: the multidimensional case, Proc. London Math. Soc. 63 (1991) 371–400.

[27] R.R. Coifman, M. Cwikel, R. Rochberg, Y. Sagher, G. Weiss, A theory of complex interpolation for families of Banach spaces, Adv. Math. 43 (1982) 203–229.

[28] F.S. De Blasi, On a property of the unit sphere in a Banach space, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.) 21(69) (1977) 259–262.

[29] D.E. Edmunds, H. Triebel, Logarithmic spaces and related trace problems, Funct. Approx. Comment. Math. 26 (1998) 189–204.

[30] D.E. Edmunds, H. Triebel, Logarithmic Sobolev spaces and their applications to spectral theory, Proc. London Math. Soc. 71 (1995) 333–371.

[31] J. Elton, E. Odell, The unit ball of every infinite-dimensional normed linear space contains a $(1+\epsilon)$-separated sequence, Colloq. Math. 44 (1981) 105–109.

[32] P. Erdös, M. Magidor, A note on regular methods of summability and the Banach-Saks property, Proc. Amer. Math. Soc. 59 (1976) 232–234.

[33] M. Fabian, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, A quantitative version of Krein's theorem, Rev. Mat. Iberoamericana 21 (2005) 237–248.

[34] L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, Interpolation of Ideal Measures by Abstract K and J Spaces, Acta Mathematica Sinica, English Series 23 (2007) 1357–1374.

[35] L.M. Fernández-Cabrera, A. Martínez, Extrapolation properties of closed operator ideals, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 38 (2013) 341–350.

[36] H. Fetter, B. Gamboa de Buen, The James forest, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[37] F. Galvin, K. Prikry, Borel sets and Ramsey's theorem, J. Symbolic Logic 38 (1973) 193–198.

[38] M. González, J.M. Gutiérrez, Polynomials on Schreier's space, Rocky Mountain J. Math. 30 (2000) 571–585.

[39] M. González, E. Saksman, H.-O. Tylli, Representing non-weakly compact operators, Studia Math. 113 (1995) 265–282.

[40] S. Guerre, La propriété de Banach Saks ne passe pas de E à $L^2(E)$ [d'après J. Bourgain], Seminar on Functional Analysis, 1979–1980, Exp. No. 8, École Polytech., Palaiseau, 1980.

[41] S. Heinrich, Closed operator ideals and interpolation, J. Funct. Anal. 35 (1980) 397–411.

[42] R.C. James, Uniformly non-square Banach spaces, Ann. of Math. 80 (1964) 542–550.

[43] R.C. James, Weak compactness and reflexivity, Israel J. Math. 2 (1964) 101–119.

[44] B. Jawerth, M. Milman, Extrapolation theory with applications, Mem. Amer. Math. Soc. 89 (440) (1991).

[45] S. Kakutani,Weak convergence in uniformly convex spaces, Tohoku Math. J. 45 (1938) 188–193.

[46] C.A. Kottman, Packing and reflexivity in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970) 565–576.

[47] S.G. Krein, Yu.I. Petunin, E.M. Semenov, Interpolation of linear operators, Translations of Mathematical Monographs, 54. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1982.

[48] P.-K. Lin, Köthe–Bochner function spaces, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[49] J.-L. Lions, J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 19 (1964) 5–68.

[50] A. Manzano, M. Mastyło, Generalized Lions–Peetre methods of constans and means and operator ideals, Collect. Math 58 (2007) 45–60.

[51] M. Mastyło, Interpolation spaces not containing l^1, J. Math. Pures Appl. 68 (1989) 153–162.

[52] M. Mastyło, On interpolation of weakly compact operators, Hokkaido Math. J. 22 (1993) 105–114.

[53] L.Y. Nikolova, T. Zachariades, The uniform convexity of the Edmunds–Triebel logarithmic spaces, J. Math. Anal. Appl. 283 (2003) 549–556.

[54] L. Nikolova, T. Zachariades, On Edmunds–Triebel spaces, Banach J. Math. Anal. 4 (2010) 146–158.

[55] L.Y. Nikolova, L.E. Persson, T. Zachariades, On Clarkson's inequality, type and cotype for the Edmunds–Triebel logarithmic spaces, Arch. Math. (Basel) 80 (2003) 165–176.

[56] P. Nilsson, Reiteration theorems for real interpolation and approximation spaces, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 132 (1982) 291–330.

[57] T. Nishiura, D. Waterman, Reflexivity and summability, Studia Math. 23 (1963) 53–57.

[58] J.R. Partington, On the Banach-Saks property, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 82 (1977) 369–374.

[59] J. Peetre, A theory of interpolation of normed spaces. Notas de Matemática, No. 39 Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1968.

[60] F.P. Ramsey, On a problem of formal logic, Proc. London Math. Soc. S2–30 (1930) 264–286.

[61] H.P. Rosenthal, Weakly independent sequences and the Banach-Saks property, in Durham symposium on the relations between infinite-dimensional and finite-dimensional convexity, Bull. London Math. Soc. (1976) 1–33.

[62] W. Schachermayer, The Banach–Saks property is not L^2-hereditary, Israel J. Math. 40 (1981) 340–344.

[63] G. Sparr, Interpolation of several Banach spaces, Ann. Mat. Pura Appl. 99 (1974) 247–316.

[64] W. Szlenk, Sur les suites faiblement convergentes dans l'espace L, Studia Math. 25 (1965) 337–341.

[65] P.P. Tradacete, Factorization and domination of operators on Banach lattices, Doctoral Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2010.

[66] H. Triebel, Approximation numbers and entropy numbers of embeddings of fractional Besov–Sobolev spaces in Orlicz spaces, Proc. London Math. Soc. 66 (1993) 589–618.

[67] A. Yoshikawa, Sur la théorie d'espaces d'interpolation—les espaces de moyenne de plusieurs espaces de Banach, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 16 (1970) 407–468.

A. Kryczka