Autoreferat
Janusz Sokół
Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki na podstawie uchwały
Rady Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego z dnia 20 grudnia 1995 roku. Tytuł rozprawy doktorskiej: Klasy funkcji gwiaździstych względem pewnych układów punktów.
Zatrudnienie: w latach 1987-1990, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Rzeszowie,
od 1990 roku Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska.
Tytuł cyklu publikacji:
Wybrane zależności między geometrycznymi i analitycznymi własnościami funkcji zespolonych.

Prace wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji:
1. J. Sokół, On sufficient condition to be in a certain subclass of starlike functions defined by subordination, Appl. Math. Comp. 190(2007), 237–241.
2. J. Sokół, On a condition for alpha–starlikeness, J. Math. Anal. Appl. 352(2009), 696–701.
3. J. Sokół, Coefficient estimates in a class of strongly starlike functions, Kyungpook Math. Journal 49(2009), 349–353.
4. J. Sokół, Radius problems in the class $\mathcal{SL}^*$, Appl. Math. Comp. 214(2009), 569–573.
5. J. Sokół, On neighborhoods of analytic functions with positive real part,
Math. Nachrichten 11-12(284)(2011), 1547–1553.
6. J. Sokół, A certain class of starlike functions, Comput. Math. Appl 62(2)(2011), 611–2619.
7. J. Sokół, On subordination-preserving theorem, Appl. Math. Comp. 219(2013), 7847–7852.

Omówienie osiągniętych wyników w wymienionych publikacjach

1. Wprowadzenie

Niech $\mathcal{H}$ oznacza zbiór funkcji analitycznych w kole jednostkowym $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$ na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Zbiór ten, wyposażony w topologię jednostajnej zbieżności na zbiorach zwartych jest liniową, metryzowalną i lokalnie wypukłą przestrzenią topologiczną. Teoria funkcji analitycznych na płaszczyźnie zespolonej zaczęła sie intensywnie rozwijać na początku XX wieku. Początkiem teorii można uznać pracę Koebego [42] z 1907 roku. Podstawowe pojęcia i twierdzenia tej teorii można znaleźć w licznych monografiach, których autorami są na przykład Duren [18], Goluzin [29], Hayman [33], Hallenbeck i MacGregor [31], czy Pommerenke [61]. Także w innych książkach z analizy zespolonej można również znaleźć rozdziały o funkcjach analitycznych, w szczególności o geometrycznej teorii funkcji, jak na przykład w Ahlfors [8], Nehari [54], Sansone i Gerretsen [72], czy w Schober [77]. Jest też kilka polskich książek o podobnym charakterze. Bibliograficzna książka Bernardiego [13] jest bardzo obszernym wykazem prac poświęconych geometrycznej teorii funkcji, od początku XX wieku do lat osiemdziesiątych. Dwutomowa monografia Goodmana [27], powiązana ściśle z [13], encyklopedycznie opisuje liczne wyniki dotyczące głównie funkcji jednolistnych. Nowe wyniki dotyczące ważnych zastosowań podporządkowań różniczkowych można znaleźć w monografiach [17] i [52].

Niech $\mathcal{A}$ oznacza podzbiór $\mathcal{H}$ składający sie funkcji unormowanych warunkami $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Niech $\mathcal{H}_u$ oznacza podzbiór $\mathcal{H}$ złożony z funkcji jednolistnych w kole jednostkowym $\mathbb{U}$. Oznaczmy również $\mathcal{S}=\mathcal{H}_u\cap\mathcal{A}$. Przypomnijmy, że zbiór $E\subset\mathbb{C}$ nazywamy gwiaździstym względem punktu $w_0\in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy odcinek łączący w_0 z dowolnym punktem $w\in E$ leży całkowicie w zbiorze E. Podobnie, zbiór E jest nazywany wypukłym, wtedy i tylko wtedy, gdy jest on gwiaździsty względem każdego swojego punktu, czyli gdy odcinek łączący dowolne dwa punkty E zawiera się w E. Niech funkcja f będzie analityczna i jednolistna w kole jednostkowym $\mathbb{U}$ z normalizacją $f(0)=0$. Taka funkcja f odwzorowuje $\mathbb{U}$ na obszar gwiaździsty względem punktu $w_0=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy [55]

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0 \quad (z\in\mathbb{U}), \tag{1.1}$$

ponadto f odwzorowuje $\mathbb{U}$ na obszar wypukły E wtedy i tylko wtedy, gdy [86]

$$\mathfrak{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0 \quad (z\in\mathbb{U}).$$

Taką funkcję f nazywamy gwiaździstą w $\mathbb{U}$ względem punktu $w_0=0$ (krótko gwiaździstą) oraz, odpowiednio, nazywamy wypukłą w $\mathbb{U}$ (krótko wypukłą). Wiadomo, że jeżeli analityczna funkcja f spełnia (1.1) oraz $f(0)=0$ i $f'(0)\neq 0$, to f jest jednolistna i gwiaździsta w $\mathbb{U}$. Zbiór (klasę) funkcji $f\in\mathcal{A}$ gwiaździstych będziemy oznaczać przez $\mathcal{S}^*$. Zbiór (klasę) funkcji $f\in\mathcal{A}$, które są wypukłe oznaczać będziemy przez $\mathcal{K}$. Robertson wprowadził w [64] klasy $\mathcal{S}^*_\alpha$ i $\mathcal{K}_\alpha$ funkcji gwiaździstych i wypukłych rzędu $\alpha<1$, które można zdefiniować następująco

$$\mathcal{S}^*_\alpha := \left\{f\in\mathcal{A}:\ \mathfrak{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha,\quad z\in\mathbb{U}\right\}, \tag{1.2}$$

oraz

$$\mathcal{K}_\alpha := \left\{f\in\mathcal{A}:\ \mathfrak{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha,\quad z\in\mathbb{U}\right\}. \tag{1.3}$$

Jeżeli $\alpha\in[0;1)$, to funkcje w obu klasach są jednolistne. W szczególności otrzymujemy $\mathcal{S}^*_0=\mathcal{S}^*$ oraz $\mathcal{K}_0=\mathcal{K}$. Nie udało się, jak dotąd, podać wystarczająco dobrej tzw. geometrycznej interpretacji funkcji w klasach (1.2) i (1.3).

2. Podporządkowanie w geometrycznej teorii funkcji

Mówimy, że funkcja $f\in\mathcal{H}$ jest podporządkowana funkcji $g\in\mathcal{H}$ w kole jednostkowym $\mathbb{U}$, co zapisujemy $f\prec g$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja analityczna $w\in\mathcal{H}$ taka, że $|w(z)|\le|z|$ i $f(z)=g[w(z)]$ dla $z\in\mathbb{U}$. Nadrzędna funkcja g nie musi być jednolistna. Zatem $f\prec g$ w $\mathbb{U}$ implikuje $f(\mathbb{U})\subset g(\mathbb{U})$. W szczególności jeżeli g jest jednolistna w $\mathbb{U}$, to (zasada podporządkowania)

$$f\prec g\in\mathcal{H}_u \quad\Leftrightarrow\quad [f(0)=g(0)\quad\text{i}\quad f(|z|<r)\subset g(|z|<r)\ \text{dla}\ 0<r\le 1]\,. \tag{2.1}$$

Typowym problemem, w którym można z powodzeniem tę zasadę zastosować, jest zbadać, dla zadanej funkcji F, własności klasy funkcji f takich, że $f\prec F$. Teoria podporządkowania, która jest bezpośrednim uogólnieniem zasady maksimum, jest ważnym działem w teorii funkcji ananlitycznych. Pomysł podporządkowania w zasadzie pochodzi od Lindelöfa [45] i (2.1) zwykle nazywa się "Lindelöf's principle". Bardziej formalnie podporządkowanie było wprowadzone i badane w pracach Littelwooda [46] i później przez Rogosinskiego [66] i [67].

Littlewood pokazał w [46], że jeżeli $f \in \mathcal{H}$, $g \in \mathcal{H}_u$ i $f \prec g$, $f(z) = g(w(z))$, to dla $0 < p < \infty$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p \mathrm{d}\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|g(re^{i\theta})\right|^p \mathrm{d}\theta \quad 0 \le r < 1,$$

i ostra nierówność zachodzi dla $0 < r < 1$ poza przypadkiem gdy g jest stałą lub $w(z) = \alpha z$, $|\alpha| = 1$. Przy użyciu zasady podporządkowania Littlewood [46] otrzymał dla $f \in \mathcal{S}$, $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$, następującą nierówność

$$|a_n| \le \frac{e}{r}\max_{\theta}|f(re^{i\theta})| \le en, \quad r = 1 - 1/n, \tag{2.2}$$

utwierdzającą wysiłki w dowodzeniu hipotezy Bieberbacha. Oznaczmy $h(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$ $g(z) = B_1 z + B_2 z^2 + \cdots$. Możemy rozważać zależności między współczynnikami b_n i B_n funkcji występujących w podporządkowaniu $h \prec g$. Prostą zależnością tego typu jest znana nierówność dla współczynników

$$|b_1| \le |B_1|,$$

która wynika bezpośrednio z (2.1). Jednakże $f \prec g$ nie implikuje $|b_n| \le |B_n|$ dla wszystkich n. Mimo to, współczynniki b_n dominują współczynniki a_n w pewnym uśrednionym sensie. Podstawowe twierdzenie tego typu udowodnił Rogosinski [67]. Mówi ono, że

$$\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2 \le \sum_{k=1}^{n}|B_k|^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Pokrewnym problemem rozważanym często w geometrycznej teorii funkcji jest oszacowanie współczynników funkcji $f \in \mathcal{A}$ w różnorodnych klasach definiowanych warunkiem

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec p(z) \quad (z \in \mathbb{U}), \tag{2.3}$$

z pewną ustaloną funkcją p. Tego typu zagadnieniem zajmujemy się między innymi w pracy [1]. Oszacowania współczynników funkcji z różnorodnych klas funkcji definiowanych przez podporządkowanie można znaleźć w [31, Rozdz. 6]. Dla uproszczenia dalszych wzorów wprowadźmy oznaczenie $Q(f, z) = zf'(z)/f(z)$. W pracy [1] rozważamy klasę $\mathcal{SL}^*$:

$$\mathcal{SL}^* = \{f \in \mathcal{A} : |Q^2(f, z) - 1| < 1\}.$$

Łatwo zauważyć, że $f \in \mathcal{SL}^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Q(f, z) \prec q_0(z) = \sqrt{1+z}$, $q_0(0) = 1$. Zauważmy, że $\mathcal{L} := \{w \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}\{w\} > 0, \ \ |w^2 - 1| < 1\}$ jest wnętrzem prawej pętli lemniskaty Bernoulliego $\gamma_1 : (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$. Ponadto $\mathcal{L} \subset \{w : |\mathrm{Arg}\, w| < \pi/4\}$, zatem $\mathcal{SL}^* \subset \mathcal{S}^*$. Dowodzimy w [1] następujących oszacowań współczynników dla funkcji z tej klasy.

Twierdzenie 2.1. [1] *Jeżeli funkcja $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ należy do klasy $\mathcal{SL}^*$, to*

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k^2 - 2)|a_k|^2 \le 1.$$

Twierdzenie 2.2. [1] *Jeżeli funkcja* $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *należy do klasy* $\mathcal{SL}^*$*, to*

$$|a_2| \le 1/2, \quad |a_3| \le 1/4, \quad |a_4| \le 1/6.$$

Powyższe oszacowania są dokładne.

W dowodach istotną rolę odgrywa zasada podporządkowania. Jak wspomnieliśmy, różniczkowe podporządkowanie (2.3) może być użyte do definiowania ciekawych podklas $\mathcal{H}$. Więcej o innych podporządkowaniach różniczkowych jest w rozdziale trzecim. Na przykład, funkcja $f \in \mathcal{A}$ jest gwiaździsta jeżeli ona spełnia warunek

$$Q(f,z) \prec p(z) \quad (z \in \mathbb{U}), \tag{2.4}$$

gdzie $p(z) = (1+z)/(1-z)$. Jeżeli $p(z) = [(1+z)/(1-z)]^{\beta}$, to (2.4) definiuje klasę $\mathcal{SS}^*(\beta)$ mocno gwiaździstych funkcji rzędu β

$$\mathcal{SS}^*(\beta) := \{f \in \mathcal{A} : |\mathrm{Arg}\ Q(f,z)| < \beta\pi/2,\ z \in \mathbb{U}\}, \quad 0 < \beta \le 1, \tag{2.5}$$

wprowadzoną w [15] i [83] . Dla $\beta = 1$ ta klasa staje się klasą $\mathcal{S}^*$. Wiele innych podklas $\mathcal{S}^*$ było zdefiowanych warunkiem (2.4) z stosownie dobraną wypukłą i jednolistną funkcją p. Warto wspomnieć także inne przypadki, gdy obszar $p(\mathbb{U})$ ma ciekawe geometryczne własności. W pracach [35, 36], funkcja p jest tak dobrana, że $p(\mathbb{U})$ jest pewnym kołem. W [28, 49, 65] zbiór $p(\mathbb{U})$ jest parabolicznym obszarem. W [38, 39, 40] zbiór $p(\mathbb{U})$ ma brzeg będący parabolą, elipsą lub gałęzią hiperboli. Przypadek gdy $p(\mathbb{U})$ jest wnętrzem prawej pętli lemniskaty Bernoulliego rozważany był w [81, 82], a gdy $p(\mathbb{U})$ jest pewnym owalem, w [58]. Ciekawy przypadek gdy obszar $p(\mathbb{U})$ jest wypukły ale funkcja p nie jest jednolistna był rozważany w [37]. Trudniejszy przypadek, kiedy klasa funkcji jest związana poprzez (2.4) z funkcją p, która nie jest jednolistna i nie jest wypukła i odwzorowuje okrąg jednoskowy na trójsieczną Maclaurina był rozważany w [19], [20] i [21]. Klasa $\mathcal{SL}^*$ związana z lemniskatą Bernoulliego jest także rozważana w [2]. W tej pracy wyznaczamy promienie α-wypukłości, α-gwiaździstości, etc. w klasie $\mathcal{SL}^*$. Definicje α-gwiaździstej i α-wypukłej funkcji są podane w (1.2) i (1.3); definicja funkcji mocno gwiaździstej rzędu β jest w (2.5); $f \in \mathcal{A}$ jest M-gwiaździsta, $M > 1/2$, [35], jeżeli ona spełnia warunek

$$|Q(f,z) - M| < M \quad (z \in \mathbb{U});$$

natomiast, funkcja $f \in \mathcal{A}$ jest k-gwiaździsta, $k \ge 0$, [39], jeżeli spełnia ona warunek

$$k|Q(f,z) - 1| < \mathfrak{Re}\,\{Q(f,z)\} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Twierdzenie 2.3. [2] *Jeżeli* $f \in \mathcal{SL}^*$*, to*

(1) f *jest* α*-wypukła w* $|z| < r(\alpha)$*, gdzie* $r(\alpha)$ *oznacza najmniejszy dodatni pierwiastek równania*

$$4(1-r)^3 = r^2 + 4r\alpha(1-r) + 4\alpha^2(1-r)^2,\ \alpha \in (0,1),$$

(2) f *jest* α*-gwiaździsta w* $|z| < 1 - \alpha^2$, $\alpha \in (0,1)$,

(3) *jest* M*-gwiaździsta w* $|z| < r(M)$*, gdzie*

$$r(M) = \begin{cases} 4M^2 - 1 & \mathit{dla} \quad \frac{1}{2} \le M \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 & \mathit{dla} \quad M \ge \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

(4) f *jest mocno gwiaździsta rzędu* β *w* $|z| < \sin \beta\pi$, $\beta \in (0,1]$,

(5) f *jest* k*-gwiaździsta w* $|z| < r(k)$, $k \ge 0$*, gdzie*

$$r(k) = 1 - k^2/(k+1)^2.$$

Wszystkie wyniki są dokładne.

W dowodach powyższych relacji istotną rolę odgrywa zasada podporządkowania. Podobnie metody stosujemy w pracy [3], gdzie wprowadzamy klasę $\mathcal{SK}(\alpha)$, $\alpha \in (-3,1]$:

$$\mathcal{SK}(\alpha) := \{f \in \mathcal{A} : Q(f,z) \prec \widetilde{q}_\alpha(z)\},$$

z

$$\widetilde{q}_\alpha(z) := \frac{3}{3+(\alpha-3)z-\alpha z^2} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

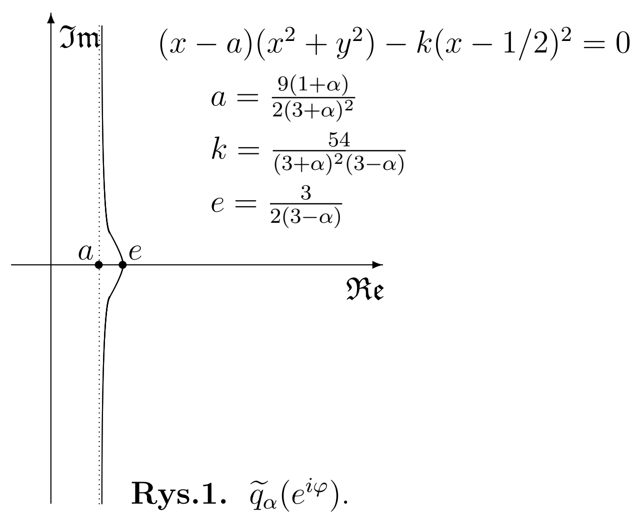
Funkcja $\widetilde{q}_\alpha$ jest jednolistna w $\mathbb{U}$ gdy $\alpha \in (-3,1]$, [3], ale nie jest wypukła, co znacznie komplikuje badanie klasy. Nazwa klasy bierze się od kształtu krzywej $\widetilde{q}_\alpha(e^{i\theta})$, $\theta \in (0,2\pi)$, przypominającego konchoidę, rys.1. Oprócz ciekawych własności, ta klasa posłuży ona także do wyznaczania rzędu gwiaździstości f gdy f jest wypukła ustalonego rzędu.

Twierdzenie 2.4. [3] *$\mathcal{SK}(\alpha) \subset \mathcal{S}^*_\gamma$, gdzie $\gamma = \frac{9(1+\alpha)}{2(3+\alpha)^2}$, oznacza to, że jeżeli $f \in \mathcal{SK}(\alpha)$, to jest ona gwiaździsta rzędu γ. Jeżeli $-1 \le \alpha < 1$, to f należąca do klasy $\mathcal{SK}(\alpha)$ jest funkcją gwiaździstą, a zatem jest jednolistna w kole jednostkowym $\mathbb{U}$.*

Ponadto, ponieważ funkcja $\widetilde{q}_\alpha$, $\alpha \in (-3,1]$, jest jednolistna w $\mathbb{U}$, więc zasada podporządkowania (2.1), prowadzi nas do następujących wyników.

Twierdzenie 2.5. [3] *Funkcja $f \in \mathcal{A}$ należy do klas $\mathcal{SK}(\alpha)$, $\alpha \in (-3;1]$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla $z \in \mathbb{U}$ iloraz $zf'(z)/f(z)$ przyjmuje wartości leżące na prawo od krzywej*

$$\text{(2.6)}\quad \gamma_2 : \quad (x-a)(x^2+y^2)-k(x-1/2)^2 = 0, \quad \text{gdzie } a = \frac{9(1+\alpha)}{2(3+\alpha)^2} \quad k = \frac{54}{(3+\alpha)^2(3-\alpha)}.$$



Rys.1. $\widetilde{q}_\alpha(e^{i\varphi})$.

Twierdzenie 2.6. [3] *Jeżeli $-3 \le \alpha_1 < \alpha_2 \le 1$, to*

$$\mathcal{S}^*_{1/2} = \mathcal{SK}(0) \supset \mathcal{SK}(\alpha_1) \supset \mathcal{SK}(\alpha_2) \supset \mathcal{SK}(1) \subset \mathcal{S}^*_{9/16}.$$

Niech niech $\mathcal{S}^*[B]$ będzie podklasą $\mathcal{S}^*$ zdefiniowaną następująco

$$\mathcal{S}^*[B] = \{f \in \mathcal{A} : Q(f,z) \prec 1/(1+Bz)\},$$

gdzie $-1 \le B \le 1$, $B \ne 0$. Zauważmy, że dla $B = 1$ funkcja $p(z) = 1/(1+Bz)$ odwzorowuje koło jednostkowe $\mathbb{U}$ na półpłaszczyznę $\mathfrak{Re}\, w > 1/2$, oraz na koło $\mathbf{D}(C(B), R(B))$ ze środkiem $C(B) = 1/(1-B^2)$ i promieniem $R(B) = |B|/(1-B^2)$, gdy $B \neq 1$. Stosując wzór strukturalny dla $f \in \mathcal{SK}(\alpha)$, [3, str. 614], otrzymujemy następującą reprezantcję dla $f \in \mathcal{SK}(\alpha)$.

Twierdzenie 2.7. [3] *Jeżeli funkcja f należy do klasy $\mathcal{SK}(\alpha)$, $\alpha \in (-3,1]\backslash\{0\}$, to istnieje funkcja $g \in \mathcal{S}^*_{1/2}$ i funkcja $h \in \mathcal{S}^*[\alpha/3]$ taka, że*

$$f(z) = [g(z)]^{\frac{3}{3+\alpha}}\,[h(z)]^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

Jeżeli $\alpha = 0$, to $\mathcal{SK}(0) = \mathcal{S}^*_{1/2}$.

Twierdzenie 2.8. [3] *Jeżeli istnieje funkcja $g \in \mathcal{S}^*_{1/2}$ i funkcja $h \in \mathcal{S}^*[\alpha/3]$ taka, że*

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{1}{1-\omega(z)}, \qquad \frac{zh'(z)}{h(z)} = \frac{1}{1+\alpha\omega(z)/3} \quad (z \in \mathbb{U}),$$

dla pewnej analitycznej funkcji ω z $|\omega(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{U}$, to funkcja

$$f(z) = [g(z)]^{\frac{3}{3+\alpha}}\,[h(z)]^{\frac{\alpha}{3+\alpha}}$$

należy do klasy $f \in \mathcal{SK}(\alpha)$.

Powyższa reprezetacja może służyć do konstrukcji przykładów funkcji w klasie $\mathcal{SK}(\alpha)$:

$$\widetilde{f}_\alpha(z) = \left(\frac{z}{1+\alpha z/3}\right)^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{3}{3+\alpha}} = \frac{z}{(1+\alpha z/3)^{\frac{\alpha}{3+\alpha}}\,(1-z)^{\frac{3}{3+\alpha}}} \in \mathcal{SK}(\alpha).$$

Ponaddto, w [3] dowodzimy następujące własności klasy $\mathcal{SK}(\alpha)$.

Twierdzenie 2.9. [3] *Jeżeli $f \in \mathcal{SK}(\alpha)$, $\alpha \in (-3,1]$ i $|z| = r$, $0 \leq r < 1$, to*

$$\left(\frac{r}{1+r}\right)^{\frac{3}{3+\alpha}} \left(\frac{r}{1+\alpha r/3}\right)^{\frac{\alpha}{3+\alpha}} \leq |f(z)| \leq \left(\frac{r}{1-r}\right)^{\frac{3}{3+\alpha}} \left(\frac{r}{1-\alpha r/3}\right)^{\frac{\alpha}{3+\alpha}}.$$

W pracy [3] rozważamy także rząd gwiaździstości dla klasy wypukłych funkcji ujemnego rzędu, w oparciu o własności klasy $\mathcal{SK}(\alpha)$. Wiadomo, że funkcja wypukła rzędu zero jest gwiaździsta rzędu 1/2, [50, 85]. Dokonano wielu różnorodnych oszacowań rzędu gwiaździstości w klasie wypukłych funkcji rzędu α. MacGregor w [48] pokazał, że jeżeli $f \in \mathcal{A}$, $\alpha \in [0,1)$, to

$$\mathfrak{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \widetilde{q}(z), \tag{2.7}$$

gdzie

$$\widetilde{q}(z) = \begin{cases} \frac{(1-2\alpha)z}{(1-z)[1-(1-z)^{1-2\alpha}]} & \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2} \\ \frac{z}{(z-1)\log(1-z)} & \text{dla} \quad \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dokładna wartość $\min\{\mathfrak{Re}\{\widetilde{q}(z)\} : |z| = 1\}$, podana została w [52, str. 115], zgodnie z hipotezą z pracy [48]. Ta wartość wyraża rząd gwiaździstości w klasie funcji wypukłych dodatniego rzędu $\alpha \in [0,1)$ i jest ona dana wzorem

$$\delta(\alpha) = \begin{cases} \frac{2\alpha-1}{2-2^{2(1-\alpha)}} & \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2} \\ 1/\log 4 & \text{dla} \quad \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}. \tag{2.8}$$

W pracy [3] prezentujemy rozszerzenie wyniku z (2.7) na funkcje wypukłe ujemnego rzędu na podstawie własności klasy $\mathcal{SK}(\alpha)$.

Twierdzenie 2.10. [3] *Niech* $-3 \le \alpha \le 1$. *Jeżeli a funkcja* f *należy do klasy* $\mathcal{A}$ *i*

$$\mathfrak{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \frac{3\alpha}{2(3-\alpha)}$$

dla $z \in \mathbb{U}$, *to* $f \in \mathcal{SK}(\alpha)$.

Wniosek 2.11. *Niech* $-3 \le \alpha < 1$. *Jeżeli a funkcja* f *należy do klasy* $\mathcal{A}$ *i*

$$\mathfrak{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \frac{3\alpha}{2(3-\alpha)}$$

dla $z \in \mathbb{U}$, *to* $f \in \mathcal{S}^*_\gamma$, *gdzie* $\gamma = \frac{9(1+\alpha)}{2(3+\alpha)^2}$.

Zatem Wniosek 2.11 podaje relację między rzędem wypukłości $\frac{3\alpha}{2(3-\alpha)}$ funkcji f i jej rzędem gwiaździstości $\frac{9(1+\alpha)}{2(3+\alpha)^2}$. W poniższej tabeli podane są przykłady tej zależności.

α	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{3\alpha}{2(3-\alpha)}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{15}{22}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{14}$	$-\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{26}$	0	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{9(1+\alpha)}{2(3+\alpha)^2}$	$-\infty$	-27	$-\frac{9}{2}$	-1	0	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{54}{121}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{90}{169}$	$\frac{54}{100}$	$\frac{27}{49}$	$\frac{9}{16}$

Możemy zauważyć, że jeżeli f jest wypukła rzędu $-3/8$, to f jest gwiaździsta. Gdy f jest wypukła rzędu 0, to f jest gwiaździsta rzędu $1/2$ co było pokazane wcześniej w (2.8). Inny wystarczający warunek na gwiaździstość rozważamy w [6]. Jest on opisany w rozdziale trzecim.

3. Iloczyn Hadamarda

Dla dwóch funkcji: f analitycznej w $|z| < R_1$ i g analitycznej w $|z| < R_2$ i posiadających tamże następujące rozwinięcia w szereg

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k,$$

przez $f * g$ rozumiemy funkcję

$$(f*g)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k z^k.$$

Prosty rachunek pokazuje, że $f * g$ jest analityczna w kole $|z| < R_1 R_2$. Ten iloczyn jest nazywany iloczynem Hadamarda funkcji f i g na pamiątkę ważnego twierdzenia J. Hadamarda dotyczącego punktów osobliwych $f*g$ w zależności f i g. Hadamard stosował alternatywne przedstawienie iloczynu w postaci:

$$(f*g)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r} \frac{g(z/t)f(t)\mathrm{d}t}{t}, \ |z/R_1| < r < R_2.$$

Zatem, $f * g$ jest też nazywany krótko splotem funkcji f i g. Ponadto definiuje się splot całkowy $f \circledast g$ przez

$$f \circledast g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k b_k}{k}$$

Jeżeli $X, Y \subset \mathcal{H}$, to używamy także wygodnego oznaczenia

$$X * Y := \{f * g : f \in X, \quad g \in Y\}.$$

Splot funkcji posiada algebraiczne własności zwykłego mnożenia . Klasa $\mathcal{A}$ jest zamknięta ze względu na splot, a nawet $\mathcal{A} * \mathcal{A} = \mathcal{A}$, ponieważ $1/(1-z) \in \mathcal{A}$.

Jednym z tematów w geometrycznej teorii funkcji jest to badanie własności operatorów

$$\Theta_f : \mathcal{B} \to \mathcal{H}, \quad \Theta_f(g) = f * g, \quad g \in \mathcal{B},$$

gdzie $f \in \mathcal{H}$ i $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$. W szczególności poszukuje się operatorów, które przekształcają zadany zbiór $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ w siebie. Ważnym klasycznym przykładem takiego zagadnienia jest następujące twierdzenie, które pokazał Szegö (wniosek z innego twierdzenia Gracea [30], patrz również [69, str.12]).

Twierdzenie 3.1. [90] *Dla $n \in \mathbb{N}$ niech funkcje*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} b_k z^k$$

będą niezerujące się w kole jednostkowym $\mathbb{U}$. Wtedy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_k b_k z^k$$

też niezeruje się w $\mathbb{U}$.

Chociaż nie jest to dokładnie iloczyn Hadamarda, to zachowuje on własność niezerowania się pewnych wielomianów ustalonego stopnia. Inne operatory splotowe jakie się rozważa to takie, które zachowują obszar, jednolisność, geometryczne własności zbiorów, pewne normy, itd. Jedną z inspirujących motywacji do takich rozważań było następujące twierdzenie Robertsona [63] dla funkcji typowo rzeczywistych (tj. funkcji $f \in \mathcal{A}$ takich, że $\mathfrak{Im} f(z) \cdot \mathfrak{Im} z \geq 0$ w $\mathbb{U}$).

Twierdzenie 3.2. [63] *Niech $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli f i g są funkcjami typowo rzeczywistymi , to splot całkowy $f \circledast g$ jest funkcją typowo rzeczywistą.*

Stara hipoteza przypisywana do Mandelbrojta i Schiffera stawia przypuszczenie, że jednolisność jest zachowywana w splocie całkowym: $f \circledast g \in \mathcal{S}$. Jeżeli $f \in \mathcal{S}$ i $g \in \mathcal{S}$. To implikowałoby prawdziwość hipotezy Bieberbacha, ponieważ jeżeli pewna funkcja $f \in \mathcal{S}$ ma współczynnik $|a_n| > n$ dla pewnego n, to splot całkowy funkcji f ze sobą, stosowną liczbę razy, mógłby dostarczyć funkcji z n-tym współczynnikiem większym niż en, podczas gdy twierdzenie Littlewooda (2.2), mówi, że $|a_n| < en$ dla $n = 2, 3, \ldots$. Jednakże, hipoteza Mandelbrojta-Schiffera nie jest prawdziwa. Pierwsze kontrprzykłady podali Hayman [34], Epstein i Schoenberg [22] oraz Loewner i Netanyahu [47]. Ponadto, te kontrprzykłady pokazują, że $f \circledast g$ nie musi być nawet lokalnie jednolistna. Znacznie słabsza hipoteza, że $f \circledast (z/(1-z)) \in \mathcal{S}$ dla każdej $f \in \mathcal{S}$ jest także fałszywa. Postawił ją Biernacki w [14] jako twierdzenie, z błędem w dowodzie. Bshouty [16] pokazał, że funkcja $f \circledast g$ nie musi być jednolistna nawet jeżeli f i g są funkcjami jednolistnymi z rzeczywistymi współczynnikami. Jednakże, jak wcześniej podaliśmy w Twierdzeniu 3.2, Robertson w [63] pokazał, że klasa funkcji typowo rzeczywistych jest zamknięta ze względu na splot całkowy. Ponadto Pólya i Schoenberg [60] postawili hipotezę, że klasa funkcji gwiaździstych $\mathcal{S}^*$ jest zamknięta ze względu na splot całkowy. Ponieważ $zf'(z)$ jest gwiaździsta wtedy i tylko wtedy, gdy f jest wypukła, równoważną hipotezą jest, że $f \in \mathcal{K}$ i $g \in \mathcal{K}$ implikuje $f * g \in \mathcal{K}$; innymi słowy, że klasa funkcji wypukłych $\mathcal{K}$ jest zamknięta ze względu na splot funkcji. Pólya i Schoenberg potwierdzili tę hipotezę w szczególnych przypadkach. Robertson [63] pokazał, że jeżeli f i g są wypukłe jednolistne i mają rzeczywiste współczynniki, to $f*g$ jest jednolistna i wypukła w kierunku osi urojonej, tj. dowolna prosta pozioma przecinająca obraz koła jednostkowego poprzez $f*g$, przecina go wzdłuż odcinka. Suffridge [87] pokazał, że splot funkcji wypukłych jest funkcją prawie wypukłą (close-to-convex), opis tychże jest podany niżej w (3.4). Ostatecznie, Ruscheweyh i Sheil-Small [70] potwierdzili prawdziwość hipotezy Pólya-Schoenberga. Ponieważ ten fakt ma wiele zastosowań, wśród nich proste rozwiązania problemów dla współczynników funkcji, pojawiło się przypuszczenie przesiąknięte nadzieją, że któraś z podklas klasy $\mathcal{S}$ unormowanych jednolistnych funkcji w $\mathcal{H}$ też jest zamknięta ze względu na splot funkcji. Wysiłki podjęte w celu rozwiązania tych problemow doprowadziły do wyznaczenia wielu ważnych i zaskakujących własności iloczynu Hadamarda. Tego typu intensywne badania przedstawił Ruscheweyh w [69]. Stale publikuje się nowe rezultaty dotyczące splotów funkcji i ich zastosowań w innnch zagadnieniach.

W tym rozdziale przedstawimy wyniki łączące splot i podporządkowanie. Dotyczą one głównie podporządkowania funkcjom wypukłym jednolistnym. Pólya i Schoenberg [60] opublikowali jeden z pierwszych rezultatów tego typu. Pokazali, że jeżeli $f \in \mathcal{H}$ jest wypukła i jednolistna, to $V_n * f \prec f$, gdzie

$$V_n(z) = \left\{ \binom{2n}{n} \right\}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k+n} z^k, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Ciekawym problemem jest: czy splot zachowuje podporządkowanie? Dokładniej, chcemy znaleźć warunki dla F, G aby implikacja

$$f \prec F \;\; i \quad g \prec G \quad \Longrightarrow \quad f*g \prec F*G. \tag{3.1}$$

zachodziła dla wszystkich $f \in \mathcal{H}$ i $g \in \mathcal{H}$.

Jeżeli F i G są funkcjami wypukłymi i jednolistnymi, to dla dla dowolnych funkcji $f, g \in \mathcal{H}$ implikacja (3.1) jest prawdziwa. Jest to wynik dowiedziony przez Ruscheweyha i Stankiewicza w [71]. Ten rezultat znalazł wiele ciekawych zastosowań. Zauważmy, że w (3.1) nie ma żadnych założeń co do normalizacji funkcji F i of G. Ciekawym pytaniem jest, czy (3.1) zachodzi przy innych założeniach co do F, czy G zamiast wypukłości. Warto dodać, ża (3.1) staje się fałszywe jeżeli zatąpimy założenie, że G jest wypukłą jednolistną, założeniem, że G jest funkcją gwiaździstą jednolistną. Biorąc funkcję gwiaździstą jednolistną G, która nie jest wypukła, możemy rozważyć dla $0 < t < 1$, i $|x| < 1$, $|y| < 1$, funkcję

$$f(z) := (1-t)\frac{xz}{1-xz} + t\frac{yz}{1-yz}, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Ponieważ $\mathfrak{Re}\,\{f(z)\} > -1/2$ mamy $f(z) \prec z/(1-z)$. Biorąc $g = G$ i $F(z) = z/(1-z)$ do (3.1) otrzymujemy $f*g \prec F*G = G$, czyli

$$(f*g)(z) = (1-t)G(xz) + tG(yz) \prec G(z).$$

Ponieważ liczby x, y były dowolne otrzymalibyśmy, że G jest wypukła, co prowadzi do sprzecznosci. Ponadto, to rozumowanie pokazuje, że jeżeli G jest dowolną niewypukłą jednolistną funkcją, to (3.1) staje sie fałszywe. Uogólnienie (3.1) podane zostało w [78] lecz bez dodatkowych założeń o jednolisnosci jest nieprawdziwe. Podobne problemy, dotyczące splotu i podporządkowania, są rozważane w [59].

Jeżeli operator $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ spełnia

$$f(z) \prec g(z) \;\Rightarrow\; I[f](z) \prec I[g](z)$$

dla wszystkich $f, g \in \mathcal{H}$, to jest nazywany operatorem zachowującym podporządkowanie w klasie $\mathcal{H}$. W pracy [4] prezentujemy nowe wyniki o takich operatorach, które uogólniają wcześniejsze i są związane z hipotezą Wilfa. W [4] prezentujemy także kilka zastosowań takich operatorów zachowujących podporządkowanie. Miller i Mocanu dowiedli w [52, str. 66], że jeżeli f jest w klasie $\mathcal{A}$ i

$$\mathfrak{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} > -\frac{3}{2}$$

dla $z \in \mathbb{U}$, to funkcja

$$L[f](z) = \frac{2}{z}\int_0^z f(t)\ \mathrm{d}t$$

należy do klasy $\mathcal{K}$ funkcji wypukłych jednolistnych.

Powyższa własność operatora Libery L poprawia wynik z pracy [44] pokazujący, że $L[\mathcal{K}] \subset \mathcal{K}$. Warto zaznaczyć, że L można rozpatrywać w całej klasie $\mathcal{H}$. Przyjmijmy za Ruscheweyhem [69], następujące oznaczenia. Niech $\gamma \geq 0$, $\alpha \geq 0$.

$$\mathcal{K}(0,\gamma) = \left\{ g \in \mathcal{H} : g(0) = 1,\ \mathfrak{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)} > -\frac{\gamma}{2},\ z \in \mathbb{U} \right\}, \tag{3.2}$$

oraz

$$\mathcal{H}^\alpha = \left\{ h^\alpha \in \mathcal{H} : h^\alpha(0) = 1,\ \mathfrak{Re}\left(e^{i\gamma}h(z)\right) > 0,\ z \in \mathbb{U},\ \text{dla pewnego } \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ponadto oznaczmy

$$\mathcal{K}(\alpha,\beta) = \mathcal{H}^\alpha \cdot \mathcal{K}(0, \beta - \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \beta,$$

i

$$\mathcal{K}(\alpha,\beta) = \{1/f : f \in \mathcal{K}(\beta,\alpha)\}, \quad 0 \leq \beta \leq \alpha, \tag{3.3}$$

gdzie $X \cdot Y$ jest prostym iloczynem $X, Y \subset \mathcal{H}$

$$X \cdot Y = \{f : f = gh,\ g \in X,\ h \in Y\}.$$

Klasa $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ jest nazywana klasą Kaplana typu α, β, ponieważ $\mathcal{K}(1,3)$ jest klasą, do której należą pochodne funkcji z klasy $\mathcal{C}$, tak zwanych funkcji prawie wypukłych (close-to-convex), po raz pierwszy wprowadzonych przez Kaplana w [41]. Lewandowski w [43] pokazał identyczność klasy funkcji $\mathcal{C}$ z klasą funkcji liniowo osiągalnych. Możliwe jest więc używanie także tej polskiej nazwy nawiązującej do geometrycznych własności. Będziemy jednak używać tutaj nazwy prawie wypukła dla funkcji z klasy $\mathcal{C}$. Klasa $\mathcal{C}$ stanowi ważną podklasę klasy $\mathcal{S}$. Klasa $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ Kaplana staje się dla odpowiednich parametrów α, β innymi geometrycznie opisanymi klasami funkcji. Z (3.2) wynika na przykład, że klasa $\mathcal{S}^*_\alpha$ funkcji gwiaździstych rzędu $\alpha < 1$, wprowadzona w (1.2), może być zdefiniowana w następujący sposób

$$f \in \mathcal{S}^*_\alpha \Longleftrightarrow f/z \in \mathcal{K}\left(0, 2-2\alpha\right).$$

Podobnie można zdefiniować klasę $\mathcal{C}_\alpha$ funkcji prawie wypukłych rzędu $\alpha < 1$

$$f \in \mathcal{C}_\alpha \Longleftrightarrow f' \in \mathcal{K}(1, 3-2\alpha). \tag{3.4}$$

Przypomnijmy, że $f \in \mathcal{A}$ należy do klasy $\mathcal{C}_\alpha$, $\alpha \leq 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $g \in \mathcal{S}^*_\alpha$ i $\varphi \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\mathfrak{Re}\ e^{i\varphi} \frac{zf'(z)}{g(z)} > 0, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Używając powyższych oznaczeń klas możemy wspomniany wynik Millera i Mocanu o operatorze Libery zapisać w następującym wniosku.

Wniosek 3.3. [52, str. 66] *Jeżeli* $f'(0) \neq 0$ *i* $f'/f'(0) \in \mathcal{K}(0,3)$, *to* $L[f]$ *jest wypukłą funkcją jednolistną i* $(L[f] - 2f(0))/f'(0) \in \mathcal{K}$.

Miller, Mocanu i Reade pokazali w [53], że jeżeli $f' \in \mathcal{K}(0,3)$ i $g \prec f$, to

$$L[g] \prec L[f]. \tag{3.5}$$

Ten rezultat poprawia wcześniejszy z [32] mający mocniejsze założenie $f' \in \mathcal{K}(0,2)$, z taką samą konkluzją.

Jeżeli $f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$, to możemy zauważyć, że

$$L[f](z) = \frac{2}{z}\int_0^z f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{n+1} z^n.$$

Oznaczmy przez L^{-1} operator "odwrotny"

$$L^{-1}[f](z) = \frac{1}{2}\left(zf(z)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)a_n}{2} z^n.$$

Wtedy

$$L[f](z) * L^{-1}[g] = L[g](z) * L^{-1}[f] = f * g.$$

Zasadniczym celem pracy [4] jest uogólnienie (3.5). W głównym twierdzeniu pracy [4] zastępujemy operator Libery (3.5), innym operatorem stosownie dobranym. Przypomnijmy, że (3.5) stwierdza, że operator Libery jest operatorem zchowującym podporządkowanie. Wiele różnorodnych wyników o operatorach zachowujących podporządkowanie można znaleźć w książce [17], gdzie poświęcono im cały rozdział. Główne twierdzenie [4] jest też pewnym uogólnieniem wyniku (3.1). Warto dodać, że słabszy wynik, gdy $g = G$ w (3.1), jest nazywany hipotezą Wilfa [93], która została udowodniona w [70].

Twierdzenie 3.4. [4] *Niech* $f'(0) \neq 0$, $f'/f'(0) \in \mathcal{K}(0,3)$ *i niech* $L^{-1}[h]$ *będzie wypukłą funkcją jednolistną . Jeżeli* $g \prec f$, *to*

$$g * h \prec f * h.$$

W pracy [4] pokazujemy kilka zastosowań powyższego twierdzenia.

Wniosek 3.5. [4] *Jeżeli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{a_n}{a_1} z^{n-1} \in \mathcal{K}(0,3) \quad i \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)c_n}{2} z^n$$

jest wypukłą funkcją jednolistną, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \prec \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n z^n \prec \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n z^n.$$

Wniosek 3.6. [4] *Jeżeli $g \in \mathcal{H}$ i $g'(z) \prec 1/(1-z)^2$, to*

$$\int_0^z \frac{g(t)-t}{t^2}\,\mathrm{d}t \prec \log\frac{1}{1-z},$$

$$\frac{1}{z}\int_0^z \frac{g(t)-t}{t}\,\mathrm{d}t \prec \frac{1}{z}\log\frac{1}{1-z} - 1,$$

$$\frac{1}{z^2}\int_0^z (g(t)-t)\,\mathrm{d}t \prec \frac{1}{z^2}\left(\log\frac{1}{1-z} - z - \frac{1}{2}z^2\right).$$

Warto zauważyć, że funkcja $1/(1-z)^2$ odwzorowuje $\mathbb{U}$ w jednolistny sposób koło jednostkowe na paraboliczny obszar $\Omega = \{x+iy : y^2 > -x + 1/4\}$. Zatem, z (2.1), założenie $g'(z) \prec 1/(1-z)^2$ jest równoważne warunkom $g'(\mathbb{U}) \subset \Omega$ i $g'(0) = 1$.

Wniosek 3.7. [4] *Jeżeli $g \in \mathcal{H}$ i $g'(z) \prec z/\sqrt{1+z^2}$, to*

$$\int_0^z \frac{g(t)-t}{t^2}\,\mathrm{d}t \prec \int_0^z \frac{\sqrt{1+t^2}-1-t}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{z}\int_0^z \frac{g(t)-t}{t}\,\mathrm{d}t \prec \frac{1}{z}\int_0^z \frac{\sqrt{1+t^2}-1-t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{z^2}\int_0^z (g(t)-t)\,\mathrm{d}t \prec \frac{1}{z^2}\int_0^z \left(\sqrt{1+t^2}-1-t\right)\,\mathrm{d}t.$$

Niech $r(z) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. Zbiór $r(\mathbb{U})$ jest obszarem Θ ograniczonym przez hiperbolę $x^2 - y^2 = 1/2$ i zawierającym początek układu współrzędnych stąd $g'(z) \prec z/\sqrt{1+z^2}$ jest równoważne temu, że $g'(\mathbb{U}) \subset \Theta$ i $g'(0) = 0$.

Ruscheweyh w [69] wprowadził pojęcie zbioru dualnego i zasady dualności. Niech $\mathcal{H}_0$ będzie złożony z funkcji $f \in \mathcal{H}$ z $f(0) = 1$. Wtedy dla zbioru $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}_0$ definiujemy zbiór dualny jako

$$\mathcal{V}^* = \{g \in \mathcal{H}_0 : \forall f \in \mathcal{V}; (f * g)(z) \neq 0 \text{ w } \mathbb{U}\},$$

i $\mathcal{V}^{**} = (\mathcal{V}^*)^*$, jako drugi dualny. Ważna "zasada dualności"mówi, że pod pewnymi nie zawsze silnymi założeniami o $\mathcal{V}$, wiele liniowych(i innych) extremalnych problemów dla $\mathcal{V}^{**}$ można rozwiązać w $\mathcal{V}$. W wielu ciekawych przypadkach zbiór $\mathcal{V}^{**}$ jest znacznie obszerniejszy niż zbiór $\mathcal{V}$.

Niech $U \subset \mathcal{H}$. Wtedy T jest nazywany zbiorem testowym dla U (co zapisujemy $T \sim> U$) jeżeli $T \subset U \subset T^{**}$.

Wiadomo, że [69, str. 33] dla $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$

$$\mathcal{T}(\alpha,\beta) \sim> \mathcal{K}(\alpha,\beta), \tag{3.6}$$

gdzie $\mathcal{K}(\alpha,\beta)$ jest klasą Kaplana zdefiniowaną w (3.3) oraz

$$\mathcal{T}(\alpha,\beta) = \left\{\frac{(1+xz)^{[\alpha]}(1+yz)^{\alpha-[\alpha]}}{(1+uz)^{\beta}} : x,y,z \in \overline{\mathbb{U}}\right\}.$$

Z kolei, funkcje f związane ze zbiorem testowym w ten sposób, że

$$\frac{f}{z} \in \mathcal{T}(1, 3-2\alpha)^*$$

stanowią ważną klasę zwaną klasą pregwiaździstych funkcji rzędu $\alpha \le 1$ i oznaczaną przez $\mathcal{R}_\alpha$. Przez związek (3.6) klasa $\mathcal{R}_\alpha$ jest także mocno powiązana z klasą $\mathcal{K}(\alpha, \beta)$. Można się przekonać, że $f \in \mathcal{R}_\alpha$ jeśli tylko $f \in \mathcal{A}$ i f spełnia

$$f * \frac{z}{(1-z)^{2-2\alpha}} \in \mathcal{S}^*_\alpha \quad \text{gdy} \quad \alpha < 1,$$

oraz

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2} \quad \text{dla} \quad \alpha = 1.$$

Pregwiaździste funkcje odgrywają ważną rolę w rozwiązaniu kilku problemów. Dla wartości $\alpha = 0$, $1/2$ i 1 dają $\mathcal{R}_0 = \mathcal{K}$, $\mathcal{R}_{1/2} = \mathcal{S}^*_{1/2}$ i $\mathcal{R}_1 = \overline{co}\mathcal{K}$, odpowiednio. Ponadto,

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{R}_\beta \subset \overline{co}\mathcal{K} \quad \text{dla} \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

Zatem, klasa pregwiaździstych funkcji daje jedno z możliwych ciągłych przejść od klasy wypukłych funkcji do jej wypukłej otoczki. Warto tu zaznaczyć, że funkcje pregwiaździste rzędu α są jednolistne jeśli tylko $\alpha \le 1/2$, w przeciwnym wypadku mogą nie być nawet lokalnie jednolistne [75].

Wiadomo, że [88]

$$\mathcal{R}_\alpha * \mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{R}_\alpha \tag{3.7}$$

i, że [69, str. 63]

$$\mathcal{R}_\alpha * \mathcal{C}_\alpha \subset \mathcal{C}_\alpha,$$

gdzie $\mathcal{C}_\alpha$ oznacza klasę funkcji prawie wypukłych rzędu α, zdefiniowaną wcześniej w (3.4). Odnotujmy, że $\mathcal{R}_0 = \mathcal{K}$, zatem dla $\alpha = 0$, zależność (3.7) staje się wcześniejszym rezultatem, $\mathcal{K} * \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, stawianym jako hipoteza przez Pólya i Schoenberga [60] i dowiedzionej w [70] przez Rusheweyha i Sheil–Smalla. Jednakże fakt, że $\mathcal{K}_\alpha$ jest zamknięta ze względu na splot z $\mathcal{R}_\alpha$ wydaje się być pominięty iw literaturze. Tę lukę wypełni wynik z pracy [59]: Niech $\alpha \le 1$ i niech $f \in \mathcal{R}_\alpha$, $g \in \mathcal{K}_\alpha$. Wtedy

$$f * g \in \mathcal{K}_\alpha.$$

Ponadto,

$$\mathcal{R}_\alpha * \mathcal{K}_\alpha = \mathcal{K}_\alpha.$$

Warto wspomnieć na zakończenie, następujące uogólnienie (3.1).

Twierdzenie 3.8. [59] *Niech $\alpha \le 1$, $g \in \mathcal{R}_\alpha$, $F \in \mathcal{K}_\alpha$ i $f \in \mathcal{A}$. Jeżeli $f \prec F$, to $g * f \prec g * F$.*

Twierdzenie 3.8 z $\alpha = 0$ przybiera postać następującej implikacji

$$[g, F \in \mathcal{K},\ f \in \mathcal{A},\ f \prec F] \Rightarrow [g * f \prec g * F],$$

stawianej jako hipoteza w [93] przez Wilfa i dowiedzionej przez Ruscheweyha, [69, str. 86].

4. Podporządkowania różniczkowe

Początku podporządkowań różniczkowych w geometrycznej teorii funkcji można dopatrywać się znacznie wcześniej, jednakże tej nazwy zaczęto na stałe używać począwszy od pracy "Różniczkowe podporządkowania i jednolistne funkcje"[51] z 1981 roku napisanej przez Millera i Mocanu. Ci autorzy zastąpili tam nierówności różniczkowe zmiennej rzeczywistej przez ich zespolone odpowiedniki. W 2000 roku wydali oni podstawową monografię [52] na ten temat zbierając w niej zasadnicze rezultaty i pomysły. Stały się one fundamentem dla bardzo licznych prac w tej dziedzinie. Powstały też nowe zagadnienia i próby ich rozwiązywania. Nowe wyniki tego typu można znaleźć w książce [17]. Zastosowań i rozszerzeń tej teorii podporządkowań różniczkowych można się doparzyć w wielu dziedzinach takich jak równania różniczkowe, funkcje harmoniczne, operatory całkowe, równania różniczkowe cząstkowe, funkcje meromorficzne, przestrzenie Banacha i funkcje wielu zmiennych zespolonych. Podporządkowanie różniczkowe jest zespolonym analogonem nierówności różniczkowej w zbiorze liczb rzeczywistych. Uzyskiwanie informacji o własnościach funkcji na podstawie zachowania się jej pochodnej jest klasycznym tematem dla funkcji zmiennej rzeczywistej. W teorii funkcji zespolonych występują różnorodne implikacje pokazujące własności funkcji na podstawie różniczkowych warunków. Prostym przykładem jest twierdzenie, które podali Noshiro i Warschawski [56], [92]: jeżeli f jest analityczna w wypukłym obszarze D i $\mathfrak{Re}\{f'(z)\} > 0$ w D, to f jest jednolistna w D. Pokazano wiele innych ciekawych implkacji w teorii podporządkowań różniczkowych dostarczających informacji o geometrycznych własnościach funkcji f. Postawmy jedno z takich zagadnień. Mianowicie, jeżeli $\Psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, to pytamy o istnienie najmniejszego w stosownym sensie zbioru $\Omega \subset \mathbb{C}$ takiego, że

$$\Psi[f](\mathbb{U}) \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{B}, \tag{4.1}$$

gdzie $\mathcal{B}$ jest zadaną podklasą $\mathcal{H}$. W pracach [5], [7], [6] i [79] dowodzimy własności typu (4.1). W [5] rozważamy zbiór

$$\Omega(\beta,\zeta) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - 2\beta + \overline{\zeta} \right| > |\mathfrak{Re} w - \beta| \right\}, \tag{4.2}$$

gdzie $\beta < 1$ i $\zeta \in \mathbb{C}$ są dane. Można zauważyć, że zbiór $\Omega(\beta,\zeta)$ jest zbiorem punktów płaszczyzny takich, że odległość od ogniska $2\beta - \overline{\zeta}$ jest większa od odległości od kierownicy $\mathfrak{Re}\{w\} = \beta$, czyli $\Omega(\beta,\zeta)$ jest wklęsłym obszarem leżącym na prawo od paraboli

$$\gamma : \left| w - 2\beta + \overline{\zeta} \right| = |\mathfrak{Re} w - \beta|$$

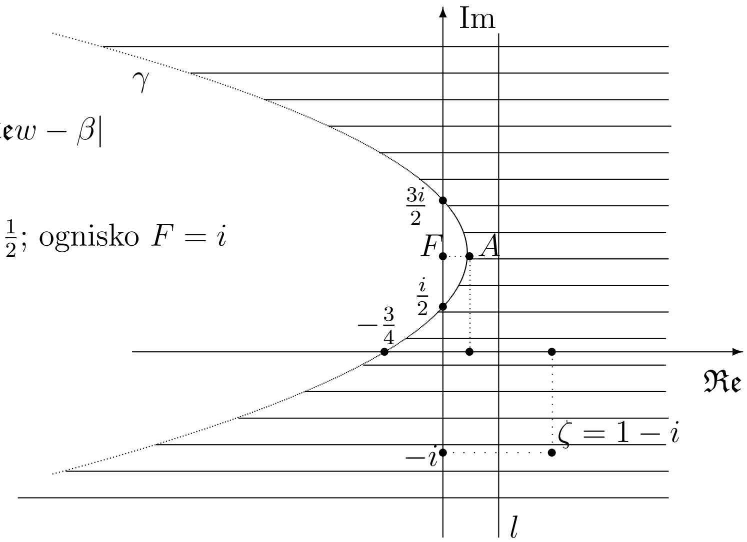
gdy $\beta < \mathfrak{Re}\,\{\zeta\}$, oraz na lewo, gdy $\beta > \mathfrak{Re}\,\{\zeta\}$, rys.2.

$\gamma : \left|w - 2\beta + \overline{\zeta}\right| = |\mathfrak{Re} w - \beta|$

$\beta = \frac{1}{2}$; $\zeta = 1 - i$

kierownica $l : \mathfrak{Re} w = \frac{1}{2}$; ognisko $F = i$

$A = \frac{1}{4} + i,$



Rys.2. $\Omega(\frac{1}{2}, 1 - i)$.

Zastosowanie metod z teorii podporządkowań różniczkowych pozwala na wykazanie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.1. [5] *Niech $\kappa < 1$ i $\zeta \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}\zeta > \kappa$ i niech*

$$\Omega(\kappa, \zeta) = \left\{w \in \mathbb{C} : \left|w - 2\kappa + \overline{\zeta}\right| > |\mathfrak{Re} w - \kappa|\right\}.$$

Jeżeli $h \in \mathcal{A}$ i

$$\zeta h'(z) \in \Omega(\kappa, \zeta) \quad (z \in \mathbb{U}),$$

to

$$\mathfrak{Re}\left[\zeta \frac{h(z)}{z}\right] > \kappa \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Przy przyjętych założeniach to oszacowanie jest optymalne.

Dla $\zeta = 1$ Twierdzenie 4.1 upraszcza się do następującego wniosku dowiedzionego wcześniej w [80].

Wniosek 4.2. [80] *Niech $\alpha < 1$. Jeżeli $h \in \mathcal{A}$ i*

$$h'(\mathbb{U}) \subset \Omega(\alpha, 1) = \{w \in \mathbb{C} : |w - 2\alpha + 1| > |\mathfrak{Re} w - \alpha|\},$$

to

$$\mathfrak{Re}\left[\frac{h(z)}{z}\right] > \alpha \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Twierdzenie 4.1 i Wniosek 4.2 stosujemy w [5] do rozwiązywania pewnych zagadnień dotyczących współczynników funkcji. TN_δ-otoczenie ($\delta > 0$) funkcji $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ jest definiowane jako

$$TN_\delta(f) = \left\{g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{A} : \sum_{n=2}^{\infty} T_n|a_n - b_n| \le \delta\right\},$$

gdzie T jest pewnym ciągiem liczbowym $T = \{T_n\}_{n=2}^{\infty}$ liczb nieujemnych. Jeżeli $T = \{n\}_{n=2}^{\infty}$, to TN_δ-otoczenie staje się δ-otoczeniem $N_\delta(f)$ wprowadzonym przez Ruscheweyha w [68], który użył je do uogólnienia wcześniejszego wyniku z [26], że $N_1(z) \subset \mathcal{S}^*$, przez pokazanie, że jeżeli $f \in \mathcal{K}$, to $N_{1/4}(f) \subset \mathcal{S}^*$. Tego typu wyniki można znaleźć także w [23], [24], [25], [84]. TN_δ-otoczenie po raz pierwszy zostało zdefiniowane w pracy [73], gdzie autorzy rozważali problem znalezienia wystarczającego warunku dla $f \in \mathcal{A}$ implikującego istnienie $TN_\delta(f)$ zawartego w zadanej klasie. Udowodnione wtedy zostały ważne związki iloczynu Hadamarda TN_δ-otoczeniami. Jeżeli funkcja f ma inną normalizację niż w klasie $\mathcal{A}$, to rozważa sie zmodyfikowane δ-otoczenie. W pracy [5] rozważamy δ-otoczenie funkcji $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$, oznaczane przez $\widehat{N}_\delta(p)$, zdefiniowane przez

$$\widehat{N}_\delta(p) = \left\{ q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n : \sum_{n=1}^{\infty} |p_n - q_n| \le \delta \right\}.$$

Oznaczmy dwie klasy funkcji dla $\alpha < 1$:

$$\mathcal{P}(\alpha) = \{p : zp(z) \in \mathcal{A} \text{ i } \mathfrak{Re}\,[p(z)] > \alpha \text{ dla } z \in \mathbb{U}\}$$

i klasę

$$\mathcal{P}'(\alpha) = \{p : zp(z) \in \mathcal{A} \text{ i } [zp(z)]' \in \Omega(\alpha) \text{ dla } z \in \mathbb{U}\},$$

gdzie

$$\Omega(\alpha) = \Omega(\alpha, 1) = \{w \in \mathbb{C} : |w - 2\alpha + 1| > |\mathfrak{Re} w - \alpha|\}.$$

Wniosek 4.3. [5] *Jeżeli $\beta \le \alpha < 1$, to*

$$\mathcal{P}'(\alpha) \subset \mathcal{P}(\alpha) \subset \mathcal{P}(\beta).$$

Chociaż $\mathcal{P}'(\alpha) \subset \mathcal{P}(\alpha)$, to klasy $\mathcal{P}'(\alpha)$ i $\mathcal{P}(\alpha)$ są różne . Aby to uzasadnić rozważmy funkcję $p(z) = 1 + (1 - \alpha)z$. Wtedy $p \in \mathcal{P}(\alpha)$ i

$$[zp(z)]' \,|_{z=-1} = [1 + 2(1 - \alpha)z]_{z=-1} = 2\alpha - 1.$$

Widać, że $w = 2\alpha - 1 \notin cl[\Omega(\alpha, 1)]$ więc $p \notin \mathcal{P}'(\alpha)$.

Wniosek 4.3 może sugerować następujący problem. Dla zadanych $\beta \le \alpha < 1$ i $q \in \mathcal{P}'(\alpha)$ znaleźć wystarczjące warunki na δ, które implikują istnienie $\widehat{N}_\delta(q)$ zawartego w $\mathcal{P}(\beta)$.

Dla rozwiązania tej kwestii wyznaczamy najpierw w [5] warunek wystarczający na przynależność do klasy $\mathcal{P}(\beta)$ w postaci własności splotu i pewną właściwość klasy $\mathcal{P}'(\alpha)$:

$$q \in \mathcal{P}(\beta) \Leftrightarrow [q(z) * h_\beta(z)] \ne 0 \quad \forall t \in (0, 2\pi) \quad \forall z \in \mathbb{U}, \tag{4.3}$$

gdzie

$$h_\beta(z) = \left[\frac{1}{1-z} - \frac{1 + (1-2\beta)e^{it}}{1 - e^{it}} \right] \frac{e^{it} - 1}{2(1-\beta)e^{it}}.$$

Jeżeli $\alpha \le \beta < 1$ i $q \in \mathcal{P}'(\alpha)$, to

$$|\zeta(q * h_\beta)(z)| > \alpha - \beta \quad \forall z \in \mathbb{U} \quad \forall t \in (0, 2\pi), \tag{4.4}$$

gdzie $\zeta = \frac{2(1-\beta)e^{it}}{e^{it}-1} = 1 - \beta + \frac{(1-\beta)\sin t}{1-\cos t} i$.

W oparciu o fakty (4.3) i (4.4) dowodzimy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.4. [5] *Niech $\alpha \le \beta < 1$ i $q \in \mathcal{P}'(\alpha)$, to*

$$\widehat{N}_\delta(q) \subset \mathcal{P}(\beta)$$

jeśli tylko $\delta \le \alpha - \beta$.

Problemy dotyczące TN_δ-otoczeń w różnych klasach funkcji rozważamy także w [10], [11] i [12].

Innym problemem typu (4.1) jest znalezienie najmniejszego α takiego, że dla wszystkich $f \in \mathcal{A}$

$$\mathfrak{Re}[f'(z) + \alpha z f''(z)] > 0 \Rightarrow f \in \mathcal{S}^*.$$

R. Singh i S. Singh [76] pokazali, że jeżeli $f \in \mathcal{A}$ i $\mathfrak{Re}\{f'(z) + zf''(z)\} > -1/4 \quad (z \in \mathbb{U})$, to $f \in \mathcal{S}^*$. Ponnusamy [62] poprawił ten wynik poprzez zastąpienie stałej $-1/4$ przez $-0.308...$. Ostatnio R. Szász i L.–R. Albert [89] sprawdzili przy pomocy komputera, że

$$\frac{1}{8} < \inf_{\alpha \in (0,\infty)} \{\forall f \in \mathcal{A} \ [\mathfrak{Re}[f'(z) + \alpha z f''(z)] > 0 \Rightarrow f \in \mathcal{S}^*]\} < \frac{1}{7}.$$

W [6] rozważamy podobne wystarczające warunki na przynależność funkcji do klasy $\mathcal{S}^*_\alpha$ funkcji gwiaździstych rzędu α. Wprowadźmy oznaczenie

$$p_\gamma(z) = \frac{1+\gamma z}{1-z} = 1 + (1+\gamma)\sum_{k=1}^{\infty} z^k \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Jeżeli $\gamma \neq -1$, to funkcja p_γ odwzorowuje $\mathbb{U}$ na półpłaszczyznę $\mathfrak{Re} w > (1-\gamma)/2$ i łatwo się przekonać, że dla $\gamma \in (-1, 1]$

$$\left\{ f \in \mathcal{A} : \ \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec p_\gamma(z) \text{ w } \mathbb{U} \right\} = \mathcal{S}^*_{(1-\gamma)/2}.$$

Twierdzenie 4.5. [6] *Niech $\alpha > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Jeżeli $f \in \mathcal{A}$ i $f'(z)+zf''(z)/\alpha \prec p_\gamma(z)$, to*

$$\frac{f(z)}{z} \prec 1 + \alpha(1+\gamma)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(1+k)(k+\alpha)} := H(\alpha, \gamma; z)$$

i $H(\alpha, \gamma; z)$ jest najlepszą dominantą w sensie, że jeżeli $f(z)/z \prec G(z)$, to $H(\alpha, \gamma; z) \prec G(z)$.

Dla $\alpha > 0$ i $\gamma > -1$ funkcja $H(\alpha, \gamma; z)$ jest wypukła jednolistna i posiada dodatnie współczynniki, zatem $H(\mathbb{U})$ jest wypukłym obszarem symetrycznym względem osi rzeczywistej, ponadto

$$H(\alpha, \gamma; -1) < \mathfrak{Re}[H(\alpha, \gamma; z)] < H(\alpha, \gamma; 1),$$

stąd otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 4.6. [6] *Niech $\alpha > 0$, $\gamma > -1$. Jeżeli $f \in \mathcal{A}$ i $f'(z) + zf''(z)/\alpha \prec p_\gamma(z)$, to*

$$H(\alpha, \gamma; -1) < \mathfrak{Re}\left[\frac{f(z)}{z}\right] < H(\alpha, \gamma; 1) \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Dla obliczenia $H(\alpha, \gamma; -1)$, $< H(\alpha, \gamma; 1)$, zauważmy, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\iota^k}{k(k+x)} = \begin{cases} [\psi(x+1) + C]/x & \text{dla} \quad \iota = 1, \\ [\mathcal{B}(x+1) - \ln 2]/x & \text{dla} \quad \iota = -1, \end{cases}$$

gdzie

$$\mathcal{B}(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{1+t} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+2k)(z+2k+1)} \quad (\mathfrak{Re} z > 0)$$

jest funkcją Beta oraz $\psi(z) = [\ln \Gamma(z)]'$, gdzie Γ jest gamma–funkcją i C jest stałą Eulera. Zatem otrzymujemy

$$H(\alpha,\gamma;-1) = \begin{cases} 1+\alpha\frac{1+\gamma}{1-\alpha}\left[1-\mathcal{B}(1+\alpha)-\ln 2\right] & \text{dla} \quad \alpha\in(0,+\infty)\setminus\{1\}, \\ 1+(1+\gamma)(\frac{\pi^2}{12}-1) & \text{dla} \quad \alpha=1, \end{cases}$$

i

$$H(\alpha,\gamma;1) = \begin{cases} 1+\alpha\frac{1+\gamma}{1-\alpha}\left[1-\psi(1+\alpha)-C\right] & \text{dla} \quad \alpha\in(0,+\infty)\setminus\{1\}, \\ 1+(1+\gamma)(\frac{\pi^2}{6}-1) & \text{dla} \quad \alpha=1. \end{cases}$$

Powyższe wyniki stosujemy w dowodzie głównego twierdzenia pracy [6].

Twierdzenie 4.7. [6] *Niech $\alpha \in (0,1]$ i $f \in \mathcal{A}$. Wtedy $f \in \mathcal{S}^*_{(1-\alpha)/2}$ jeśli tylko dla $z \in \mathbb{U}$*

$$\mathfrak{Re}\left[f'(z)+\frac{z}{\alpha}f''(z)\right] > \gamma(\alpha) := -1+\frac{-\alpha^2+5\alpha-2}{\alpha(4+(\alpha^2-\alpha+2)B(\alpha))} \quad i \quad \gamma(\alpha)<g(\alpha),$$

gdzie

$$B(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(1+k)(k+\alpha)} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[1-\mathcal{B}(1+\alpha)-\ln 2\right] & dla \quad \alpha\in[0,1), \\ \frac{\pi^2}{12}-1 & dla \quad \alpha=1, \end{cases}$$

oraz

$$g(\alpha) := \begin{cases} -1-\frac{1-\alpha}{\alpha[\mathcal{B}(2)-\mathcal{B}(1+\alpha)]} & dla \quad \alpha\in(0,+\infty)\setminus\{1\}, \\ \frac{\pi^2}{12-\pi^2} = 4.6327\ldots & dla \quad \alpha=1. \end{cases}$$

W [6] podajemy kilka zastosowań tego twierdzenia.
Jeżeli $\alpha = 1$, to otrzymujemy $\gamma(1) = \frac{-\pi^2}{\pi^2+12} = -0.45\ldots$ i $\gamma(1) < g(1) = 4,63\ldots$. Zatem Twierdzenie 4.7 prowadzi do następującego wniosku.

Wniosek 4.8. [6] *Jeżeli $f \in \mathcal{A}$, to $f \in \mathcal{S}^*$, o ile*

$$\mathfrak{Re}\left[f'(z)+zf''(z)\right] > \frac{-\pi^2}{\pi^2+12} = -0.45\ldots \quad (z\in\mathbb{U}). \tag{4.5}$$

To poprawia wynik Millera i Mocanu podany w formie całkowej [52, str. 309], gdzie zamiast liczby $\frac{-\pi^2}{\pi^2+12}$ jest liczba $\frac{6-\pi^2}{24-\pi^2} = -0.273\ldots$. Ponadto stała dana w (4.5) jest nieco lepsza od $-0.308\ldots$ podanej przez Ponnusamyego w [62].

Wniosek 4.9. [6] *Jeżeli $f \in \mathcal{A}$, to $f \in \mathcal{S}^*_{1/4}$, o ile*

$$\mathfrak{Re}\left[f'(z)+2zf''(z)\right] > -1+\frac{2}{2+7(\pi-\ln 4)} - 0.86\ldots \quad (z\in\mathbb{U}).$$

Wniosek 4.10. [6] *Jeżeli $f \in \mathcal{A}$, to $f \in \mathcal{S}^*_{1/3}$, o ile*

$$\mathfrak{Re}\left[f'(z)+3zf''(z)\right] > -1-\frac{3}{15-\sqrt{3}\pi} = -1.25\ldots \quad (z\in\mathbb{U}).$$

Wniosek 4.11. [6] *Jeżeli $f \in \mathcal{A}$, to $f \in \mathcal{S}^*_{1/2}$, jeśli tylko*

$$\mathfrak{Re}\left[zf''(z)\right] > -\frac{2}{4+2B(0)} = -\frac{1}{3-\ln 4} = -0.61969\ldots \quad (z\in\mathbb{U}).$$

Wniosek 4.11 jest pokrewny dokładnemu wynikowi postaci

$$f \in \mathcal{A} \ \text{ i } \ \mathfrak{Re}[zf''(z)] > -\frac{3}{8\ln 2} = -0.721\ldots \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{S}^*$$

otrzymanemu przez Ali, Ponnusamy i Singh w [9], inne pokrewne wyniki są w [52, pp. 275–277].

W [74] Silverman rozważał pewnien iloraz wyrażeń związanych z funkcjami wypukłymi i gwiaździstymi. Mianowicie, dla $0 < b \leq 1$, on wprowadził do rozważań klasę

$$\mathcal{G}_b := \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \frac{1 + zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} - 1 \right| < b \text{ dla } z \in \ \mathbb{U} \right\}$$

i pokazał, że $\mathcal{G}_b \subset \mathcal{S}^*_{2/(1+\sqrt{1+8b})}$. Obradović i Tuneski w [57] poprawili ten rezultat pokazując, że jeżeli $f \in \mathcal{G}_b$, to $Q(f,z) \prec h(z)$, gdzie $h(z) = 1/(1+bz)$. Tuneski w [91] podał wystarczające warunki dla funkcji $f \in \mathcal{G}_b$ na to aby $Q(f,z) \prec \frac{1+Az}{1+Bz}$, gdzie $-1 \leq B < A \leq 1$. W [7] podajemy uogólnienie głównego twierdzenia zawartego w [91]. W [7] podajemy również różnorodne zastosowania tego uogólnienia.

Twierdzenie 4.12. [7] *Niech $h \in \mathcal{H}$, $h(0) = 1$, bedzie jednolistna i niezerująca się w $\mathbb{U}$ i taka, że*

$$\mathfrak{Re}\left[1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > 2\mathfrak{Re}\left[\frac{zh'(z)}{h(z)}\right] \quad (z \in \ \mathbb{U}).$$

Jeżeli $p \in \mathcal{H}$, $h(0) = 1$, i spełnia

$$\frac{zp'(z)}{p^2(z)} \prec \frac{zh'(z)}{h^2(z)} \equiv H(z) \quad (z \in \mathbb{U}),$$

to

$$p(z) \prec h(z) \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Wniosek 4.13. [7] *Niech $h \in \mathcal{H}$, $h(0) = 1$, będzie jednolistna i niezerująca się w $\mathbb{U}$ i taka, że*

$$\mathfrak{Re}\left[1 + \frac{zh''(z)}{h'(z)}\right] > 2\mathfrak{Re}\left[\frac{zh'(z)}{h(z)}\right] \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Jeżeli $f \in \mathcal{A}$ i spełnia

$$\frac{1 + zf''(z)/f'(z)}{zf'(z)/f(z)} - 1 \prec \frac{zh'(z)}{h^2(z)} \quad (z \in \mathbb{U}),$$

to

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec h(z).$$

Jak pokazano w [7], przy odpowiednio dobranej funkcji h powyższe rezultaty stają się wcześniej uzyskanymi przez Silvermana, oraz w pracy Obradovića i Tuneskiego.

Literatura

[1] J. Sokół, Coefficient estimates in a class of strongly starlike functions, Kyungpook Mathematical Journal., 49(2009), 349–353.

[2] J. Sokół, Radius problems in the class $\mathcal{SL}^*$, Appl. Math. Comp., 214(2009), 569–573.

[3] J. Sokół, A certain class of starlike functions, Comput. Math. Appl., 62(2)(2011), 611–2619.

[4] J. Sokół, On subordination-preserving theorem, Appl. Math. Comp., 219(2013), 7847–7852.

[5] J. Sokół, On neighborhoods of analytic functions with positive real part, Math. Nachrichten 11-12(284), 1547–1553.
[6] J. Sokół, On a condition for alpha–starlikeness, J. Math. Anal. Appl., 352(2009), 696–701.
[7] J. Sokół, On sufficient condition to be in a certain subclass of starlike functions defined by subordination, Appl. Math. Comp., 190(2007), 237–241.
[8] L. V. Ahlfors, Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory, McGraw-Hill, New York 1973.
[9] R. Ali, M. Ponnusamy, V. Singh, Starlikeness of functions satisfying a differential inequality, Ann. Polon. Math., 61(2)(1995), 135–140.
[10] U. Bednarz, J. Sokół, On the integral convolution of certain classes of analytic functions, Taiwanese Journal of Math., 13(2009), no. 5, 1387–1396.
[11] U. Bednarz, J. Sokół, On T-neighborhoods of analytic functions, J. Math. Appl., 32(2010), 25–32.
[12] U. Bednarz, J. Sokół, On order of convolution consistence of the analytic functions, Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, LV(3)(2010), 41–50.
[13] S. D. Bernardi, Bibligraphy of Schlicht Functions; Mariner Publ. Co., Tampa 1982.
[14] M. Biernacki, Sur l'intégraledes fonctions univalentes, Bull. Acad. Polon. Sci., 8(1960), 29-34.
[15] D. A. Brannan, W. E. Kirwan, On some clases of bounded univalent functions, J. London Math. Soc., 1(2)(1969), 431–443.
[16] D. Bshouty, A note on Hadamard products of univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 80(1980), 271–272.
[17] T. Bulboacă, Differential Subordinations and Superordinations. Recent Results; House of Scient. Book Publ., Cluj-Napoca 2005.
[18] P. L. Duren, Univalent Functions; Springer-Verlag, New York 1983.
[19] J. Dziok, R. K. Raina, J. Sokół, On alpha-convex functions related to shell-like functions connected with Fibonacci numbers, Appl. Math. Comput. 218(2011), 966–1002.
[20] J. Dziok, R. K. Raina, J. Sokół, Certain results for a class of convex functions related to a shell-like curve connected with Fibonacci numbers, Comput. Math. Appl., 61(9)(2011), 2605–2613.
[21] J. Dziok, R. K. Raina, J. Sokół, On a class of starlike functions related to a shell-like curve connected with Fibonacci numbers, Math. Comput. Modell., 57(2013), 1203–1211.
[22] B. Epstein, I. J. Schoenberg, On conjecture concerning schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc., 65(1959), 273–275.
[23] R. Fournier, On neighbourhoods of univalent starlike functions, Ann. Polon. Math., 47(20(1986,) 189–202.
[24] R. Fournier, On neighbourhoods of univalent convex functions, Rocky Mountain J. Math., 16(3)(1986), 579–589.
[25] R. Fournier, A note on neighbourhoods of univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 87(1)(1983), 117–120.
[26] A. W. Goodman, Univalent functions and nonanalytic curves, Proc. Amer. Math. Soc., 8(1957), 598–601.
[27] A. W. Goodman, Univalent Functions, Vols. I and II, Mariner Publishing Co.: Tampa, Florida 1983.
[28] A. W. Goodman, On uniformly convex functions, Ann. Polon. Math., 56(1991), 87–92.
[29] G. M. Goluzin, Geometric Theory of Functions of a Complex Variable; Transl. Math. Monogr. vol.26 AMS, Providence 1969.
[30] J. H. Grace, The zeros of a polynomial, Proc. Cambridge Philos. Soc., 11(1902), 352–357.
[31] D. J. Hallenbeck, T. H. MacGregor, Linear problems and convexity techniques in geometric function theory; Boston, London, Melbourne, Pitman Advanced Publishing Program 1984.
[32] D. I. Hallenbeck, St. Ruscheweyh, Subordination by convex functions, Proc. Amer. Math. Soc., 52(1975), 191–195.
[33] W. K. Hayman, Multivalent Functions; Cambridge Univ. Press, Cambridge 1958.
[34] W. K. Hayman, Multivalent Functions, Proc. Cambridge Philos. Soc., 55(1959), 373–374.
[35] W. Janowski, Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families, Ann. Polon. Math., 23(1970), 159–177.
[36] W. Janowski, Some extremal problems for certain families of analytic functions, Ann. Polon. Math., 28(1973), 297–326.

[37] R. Jurasińska, J. Stankiewicz, Coefficients in some classes defined by subordination to multivalent majorants, Proceedings of Conference on Complex Analysis (Bielsko-Biała, 2001), Ann. Polon. Math., 80(2003), 163–170.
[38] S. Kanas, A. Wiśniowska, Conic regions and k-uniform convexity II, Fol. Scient. Univ. Tech. Resov., 170(1999), 65–78.
[39] S. Kanas, A. Wiśniowska, Conic regions and k–uniform convexity, J. Comput. Appl. Math., 105(1999), 327–336.
[40] S. Kanas, A. Wiśniowska, Conic domains and starlike functions, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 45(3)(2000), 647–657.
[41] W. Kaplan, Close to convex schlicht functions, Michigan. Math. J., 1(1952), 169–185.
[42] P. Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1907), 191–210.
[43] Z. Lewandowski, Sur l'idenité de certaines classes de fonctions univalentes, I, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect A 12(1958), 131–146.
[44] R. J. Libera, Some classes of regular univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 16(1965), 755–758.
[45] E. Lindelöf, Mémorie sur certaines inequalitiés dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propiétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta Soc. Sci. Fenn., 35(1908), 1–35.
[46] J. E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc., 23(1925), 481–519.
[47] C. Loewner, E. Netanyahu, On some compositions of Hadamard type in classes of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc., 65(1959), 284–286.
[48] T. H. MacGregor, A subordination for convex function of order alpha, J. London Math. Soc., 2(9)(1975), 530–536.
[49] W. Ma, D. Minda, Uniformly convex functions, Ann. Polon. Math., 57(1992), 165–175.
[50] A. Marx, Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Ann., 107(1932/33), 40–67.
[51] S. S. Miller, P. T. Mocanu, Differential subordinations and univalent functions, Michigan Mat. J., 28(1981), 157–171.
[52] S. S. Miller, P. T. Mocanu, Differential subordinations: theory and applications, Series of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 225; Marcel Dekker Inc., New York / Basel 2000.
[53] S. S. Miller, P. T. Mocanu, M. O. Reade Subordination preserving integral operators, Trans. Amer. Mat. Soc., 283(2)(1984), 605–615.
[54] Z. Nehari, Conformal Mapping; McGraw-Hill, New York 1952.
[55] R. Nevanlinna, Über die konforme Abbildung Sterngebieten, Oversikt av Finska–Vetenskaps Societen Forhandlingar, 63(A)6(1921), 48–403.
[56] K. Noshiro, On the theory of schlicht functions, J. Fac. Sci. Hokkaido, 2(1934-35), 129–155.
[57] M. Obradović, N. Tuneski, On the starlike criteria defined by Silverman, Fol. Scient. Univ. Tech. Resov., 181 (2000), 59–64.
[58] E. Paprocki, J. Sokół, The extremal problems in some subclass of strongly starlike functions, Fol. Scient. Univ. Techn. Resov., 157(1996), 89–94.
[59] K. Piejko, J. Sokół, On the convolution and subordination of convex functions, Appl. Math. Letters, 25(2012), 448–453.
[60] G. Pólya, I. J. Schoenberg, Remarks on the la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle, Pacific J. Math., 8(1958), 295–334.
[61] Ch. Pommerenke, Univalent Functions; Vandenhoeck and Reprecht, Göttingen 1975.
[62] S. Ponnusamy, On starlikeness of certain integral transforms, Ann. Polon. Math., 56(3)(1992), 227–232.
[63] M. S. Robertson, Applications of a lemma of Fejér to typically real functions, Proc. Amer. Math. Soc., 1(1950), 555–561.
[64] M. S. Robertson, Certain classes of starlike functions, Michigan Math. Jour., 76, no.1,(1954), 755–758.
[65] F. Rønning, Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions, Proc. Amer. Math. Soc., 118(1993), 189–196.

[66] W. Rogosinski, On subordinate functions, Proc. Cambridge. Philos. Soc., 35(1939), 1–26.
[67] W. Rogosinski, On the coefficients of subordinate functions, Proc. London Math. Soc., 48(1943), 48–82.
[68] St. Ruscheweyh, Neighborhoods of univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 81(1981), 521–529.
[69] St. Rusheweyh, Convolution in Geometric Function Theory; Les Presses de l'Univ. de Montreal 1982.
[70] St. Ruscheweyh, T. Sheil–Small, Hadamard product of schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture, Comm. Math. Helv., 48(1973), 119–135.
[71] St. Ruscheweyh, J. Stankiewicz, Subordination under convex univalent function, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 33(1985), 499–502.
[72] G. Sansone, J. Gerretsen, Lectures on the Theory of Functions of a complex Variable, 2 vols; Walters-Noordhoff, Groningen 1969.
[73] T. Sheil-Small, E.M. Silvia, Neighborhoods of analytic functions, J. Analyse Math., 52(1989), 210–240.
[74] H. Silverman, Convex and starlike criteria, Int. Math. Math. Sci., 22(1)(1999), 75–79.
[75] H. Silverman, E. M. Silvia, Prestarlike functions with negative coefficients, Internat. J. Math. Math. Sci., 3(1979), 427–437.
[76] R. Singh, S. Singh, Convolution properties of a class of starlike functions, Proc. Amer. Math. Soc., 106(1989), 145–152.
[77] G. Schober, Univalent Functions–Selected Topics; Lecture Notes in Mathematics, no. 478; Springer-Verlag, Berlin 1975.
[78] J. Sokół, Convolution and subordination in the convex hull of convex mappings, Appl. Math. Letters, 19(2006), 303–306.
[79] J. Sokół, Starlikeness of the Libera transform of functions with bounded turning, Appl. Math. Comp., 203(2008), 273–276.
[80] J. Sokół, On functions with derivative satisfying a geommetric condition, Appl. Math. Comp., 204(2008), 116–119.
[81] J. Sokół, On some subclass of strongly starlike functions, Demonstratio Math., 31(1)(1998), 81–86.
[82] J. Sokół, J. Stankiewicz, Radius of convexity of some subclasses of strongly starlike functions, Fol. Scient. Univ. Tech. Resov., 147(1996), 101–105.
[83] J. Stankiewicz, Quelques problèmes extrèmaux dans les classes des fonctions α-angulairement ètoilèes, Ann. Univ. Mariae Curie–Skłodowska, Sect. A 20(1966), 59–75.
[84] J. Stankiewicz, Neighbourhoods of meromorphic functions and Hadamard products, Ann. Polon. Math., 46(1985), 317–331.
[85] E. Strohhäcker, Beiträge zür Theorie der schlichter Functionen, Math. Z., 37(1933), 356–380.
[86] E. Study, Konforme Abbildung Einfachzusammenhangender Bereiche; B. C. Teubner, Leipzig und Berlin 1913.
[87] T. J. Suffridge, Convolutions of convex functions, J. Math. Mech., 15(1966), 795–804.
[88] T. J. Suffridge, Starlike functions as limits of polynomials, in Advances in Complex Function Theory, Lecture Notes in Math. 505, Springer, Heidelberg, 1973/74, 164–202.
[89] R. Szász, L.–R. Albert, About a condition for starlikenes, J. Math. Anal. Appl., 335(2007), 1328–1334.
[90] G. Szegö, Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algegraischer Gleichungen, Math. Z., 13(1931), 28–55.
[91] N. Tuneski, On the quotient of the representations of convexity and starlikeness, Math. Nachrichten, 248-249 (2003), 200-203.
[92] S. E. Warschawski, On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping, Trans. Amer. Math. Soc., 38(1935), 310–340.
[93] H. S. Wilf, Subordinating factor sequence for convex maps of the unit circle, Proc. Amer. Math. Soc., 12(1961), 689–693.

==

5. Omówienie prac z ostatnich 10 lat, które nie wchodzą w skład jednotematycznego cyklu publikacji omówionego wyżej

W tym omówieniu stosujemy oznaczenia z autoreferatu, wprowadzone poprzednio.

W pracach [1], [2] [3] rozważamy klasę

$$P(A,B)=\left\{f\in\mathcal{H}: f(z)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\right\}, \tag{5.1}$$

gdzie liczby A, B są zespolone i takie, że $A+B\neq 0$, $|B|\leq 1$. W pracy J. Stankiewicz i Z. Stankiewicz, *Convolution in some classes of functions*, Folia Sci. Univ. Tech. Resov. 48(1998), 93–101, pokazano, że iloczyn Hadamarda takich klas spełnia

$$P(A,B)*P(C,D)\subset P(AC+AD+BC,BD) \tag{5.2}$$

oraz

$$P(A,B)*P(C,D)=P(AC+AD+BC,BD), \tag{5.3}$$

o ile $|B|=1$ lub $|D|=1$. Pokazujemy, że inkluzji w (5.2) nie można zastąpić równością jak w to jest w szczególnym przypadku (5.3). Ponadto dowodzimy, że $\Omega*\Omega\neq\Omega$, gdzie $\Omega=\{\omega\in\mathcal{H}:|\omega(z)|\leq|z|,\ z\in\mathbb{U}\}$ jest klasą funkcji Schwarza. W pracy [3] poprawiamy poprzednie wyniki z [1] dowodząc, że poza przypadkiem (5.3) nie istnieją liczby zespolone X, Y takie, że $X+Y\neq 0$, $|Y|\leq 1$ i

$$P(X,Y)\subset P(A,B)*P(C,D).$$

W pracy [4] uogólniamy różnorodne własności operatora Choi-Saigo-Srivastavy $I_{\lambda,\mu}$. Wprowadzony on został w pracy J. H. Choi, M. Saigo i H. M. Srivastava, *Some inclusion properties of a certain family of integral operators*, J. Math. Anal. Appl. 276(2002), 432–445, w następujący sposób

$$I_{\lambda,\mu}:\mathcal{A}\to\mathcal{A},\quad I_{\lambda,\mu}f(z)=f_{\lambda,\mu}(z)*f(z)\quad(\lambda>-1,\mu>0),$$

gdzie

$$\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}*f_{\lambda,\mu}(z)=\frac{z}{(1-z)^{\mu}}.$$

W tejże pracy [4] podane są też uogólnienia niektórych wyników z pracy K. I. Noor, M. A. Noor, *On integral operators*, J. Math. Anal. Appl. 238(1999), 341–352, dotyczące tego operatora.

W pracy [5] podajemy uogólnienie wyniku z pracy S. Ruscheweyh i J. Stankiewicz, *Subordination under convex univalent functions*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 33(1985), 499–502, mówiącego, że jeśli F, G są różnowartościowe i wypukłe oraz $f\prec F$, $g\prec G$, to $f*g\prec F*G$. Jednakże to uogólnienie okazauje się być nieprawdziwe bez dodatkowego założenia jednolistności.

W pracy [6] dowodzimy, że jeśli $\mathfrak{Re}\,\{f'(z)\}\geq(\pi^2-6)/(\pi^2-24)$ w kole jednostkowym, to funkcja (Alexander operator),

$$\Phi(z)=\int_0^z f(t)/t\ \mathrm{d}t$$

należy do klasy funkcji gwiaździstych $\mathcal{S}^*$.

W pracy [7] poprawiamy rożnorodne wyniki podane w pracy J.-L. Liu, H. M. Srivastava, *Certain properties of the Dziok-Srivastava operator*, Appl. Math. Comp. 159(2004), 4485–493. Operator Dzioka-Srivastavy H_p, występujący w tytule, jest bardzo znany i został zdefiniowany w pracy J. Dziok, H. M. Srivastava, *Classes of analytic functions associated with generalized hypergeometric function* Appl. Math. Comput. 103(1999), 1–13, która ma dziesiątki cytowań. Jeżeli $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \cdots$, ten operator można zdefiniować następująco

$$H_p f(z) = \{z^p \cdot {}_qF_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_s; z)\} * f(z),$$

gdzie funkcja ${}_qF_s$ ma postać (przy stosownych założeniach nałożonych na parametry)

$${}_qF_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_s; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_q)_n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_s)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (z \in \mathbb{U}).$$

W pracy [8] rozważamy klasę

$$\mathcal{P}_\alpha := \left\{ f \in \mathcal{H} : f(0) = 1, f(z) \prec \frac{1 - z(2\alpha - 1)}{1 - z} \right\}.$$

Dowodzimy, że jeżeli $f, g \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta < 1$ oraz $f' \in \mathcal{P}_\alpha$, $g' \in \mathcal{P}_\beta$ i $\Phi(z) = (f * g)(z)$, to

$$\Phi'(z) \prec P(z) \quad (z \in \mathbb{U})$$

oraz

$$\frac{\Phi(z)}{z} \prec Q(z) \quad (z \in \mathbb{U}),$$

gdzie

$$P(z) = 1 + 4(1 - \alpha)(1 - \beta) \left[\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} + ... \right]$$

oraz

$$Q(z) = 1 + 4(1 - \alpha)(1 - \beta) \left[\frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} + \frac{z^3}{4^2} + ... \right]$$

są wypukłymi funkcjami jednolistnymi. Wynik ten ma kilka ciekawych wniosków zawartych w [8]. Ponadto dowodzimy w [8], że jeżeli $f, g \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta < 1$ oraz $f' \in \mathcal{P}_\alpha$, $g' \in \mathcal{P}_\beta$ i $\Phi(z) = (f * g)(z)$, to $\Phi \in \mathcal{S}^*$ o ile

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) \leq \frac{9}{24 - \pi^2} \approx 0.6369.$$

Jeżeli $f, g, h \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta, \gamma < 1$ oraz $f' \in \mathcal{P}_\alpha$, $g' \in \mathcal{P}_\beta$, $h' \in \mathcal{P}_\gamma$ i $\zeta(z) = (f * g * h)(z)$, to $\zeta \in \mathcal{K}$, o ile

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \leq \frac{9}{48 - 2\pi^2} \approx 0.31846. \tag{5.4}$$

Ostatni rezultat poprawia wcześniejszy z pracy A. Y. Lashin, *Some convolution properties of analytic functions*, Appl. Math. Lett. 18(2005), 135–138, gdzie zamiast ostatniej nieróści (5.4) jest

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \leq \frac{3}{16(\ln 2 - 1)^2 + 8} \approx 0.31557.$$

W pracy [9] rozważamy pewną klasę funkcji wielolistnych w kole jednostkowym zdefiniowaną za pomocą liniowego operatora o dość ogólnych własnościach. Jak się okazuje wyniki uzyskane w [9] uogólniają wiele wcześniejszych wyników uzyskanych dla konkretnie zadanych operatorów.

W pracy [10] kontynuujemy badanie własności splotu funkcji, podobnie jak w omówieniu pracy [8], uzyskując nowe rezultaty dotyczące jego wypukłości.

W pracy [11] poprawiamy rożnorodne wyniki podane w pracy N. E. Cho, O. S. Kwon oraz H. M. Srivastava, *Inclusion relationships and argument properties for certain subclasses of multivalent functions associated with a family of linear operators*, J. Math. Anal. Appl. 292 (2004), 470–483, a które dotyczą funkcji wielolistnych. Poprawienie poprzednich wyników stało się tutaj możliwe dzięki elastycznemu połączeniu metod podporządkowań różniczkowych z ciekawymi własnościami iloczynu Hadamarda.

W pracy [12] poprawiamy niektóre rezultaty z pracy N. E. Cho, O. S. Kwon, H. M. Srivastava, *Inclusion and argument properties for certain subclasses of meromorphic functions associated with a family of multiplier transformations*, J. Math. Anal. Appl. 300(2004), 505-520, dzięki zastosowaniu bardziej efektywnych metod dowodowych. Kilka nowych własności badanej klasy funkcji meromorficznych jest też wykazane w tej pracy.

W pracy [13] kontynuujemy badanie własności klas funkcji wprowadzonych w pracy K. I. Noor, *On classes of analytic functions defined by convolution with incomplete beta functions*, J. Math. Anal. Appl. 307 (2005), 339-349. Podajemy pewne nowe zależności dotyczące współczynników i promień wypukłosci w jednej z rozważanych klas.

W pracy [14] dowodzimy nowych własności klasy $V_p(\alpha_i; A, B)$ funkcji p-listnych zdefiniowanych warunkiem

$$\alpha_i \frac{H_p(\alpha_i + 1)f(z)}{H_p(\alpha_i)f(z)} + p - \alpha_i \prec p\frac{1 + Az}{1 + Bz} \tag{5.5}$$

w pracy J. Dziok, H. M. Srivastava, *Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeomertic function*, Appl. Math. Comput. 103(1999), 1-13. W podporządkowaniu (5.5) H_p oznacza operator Dzioka-Srivastavy podany wyżej. Ta klasa $V_p(\alpha_i; A, B)$ jest uogólnieniem klasy rozważanej w pracy Y. C. Kim, H. M. Srivastava, *Fractional integral and other linear operators associated with the Gaussian hypergeometric function*, Complex Var. Theory Appl. 34(1997), 293–312, oraz w kilku innych pracach.

W pracy [15] dowodzimy własności klasy funkcji $V_k^p(H; A, B)$ zdefiniowanej podobnym warunkiem do (5.5). Pokazujemy, między innymi, że klasy $V_k^p(H; A, B)$ są dla odpowiednich parametrów powiązane operatorem Bernardiego, S. D. Bernardi, *Convex and starlike univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 135(1969), 429-446.

W pracy [16] zajmujemy się klasą funkcji mocno gwiaździstych rzędu β, to jest klasą

$$\mathcal{S}^*[\beta] = \left\{ f \in \mathcal{A} : \ \left| \operatorname{Arg} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] \right| < \frac{\beta\pi}{2} \right\},$$

gdzie $\beta \in (0, 1]$. Oznaczmy również

$$\mathcal{R} = \{ f \in \mathcal{A} : \ \ \mathfrak{Re}[f'(z)] > 0 \}$$

tzw. klasę funkcji o ograniczonym obrocie. Opreator całkowy Libery $L : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $L[f] := F$, gdzie

$$F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)\ \mathrm{d}t, \tag{5.6}$$

był badany wcześniej pod różnymi względami. W pracy [15] badamy mocną gwiaździstość $L[f]$ dla $f \in \mathcal{R}$. W pracy P. T. Mocanu, *On starlikeness of Libera transform*, Mathematica (Cluj), 28(51)(1986), 153–155, pokazano, że

$$L[\mathcal{R}] \subset \mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*[1],$$

a w pracy P. T. Mocanu, *New extensions of a theorem of R. Singh oraz S. Singh*, Mathematica (Cluj), 37(60)(1995), 171–182, poprawiono wynik na

$$L[\mathcal{R}] \subset \mathcal{S}^*[8/9].$$

W pracy S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Libera transform of functions with bounded turning*, J. Math. Anal. Appl., 276(2002), 90–97, podano wynik

$$L[\mathcal{R} \cap \mathcal{A}_2] \subset \mathcal{S}^*[2/3],$$

gdzie $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{H}$ oznacza klasę funkcji postaci $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots$. W pracy [15] zajmujemy się podobnym problemem uzyskując nieco lepszy wynik:

$$L[\mathcal{R} \cap \mathcal{A}_2] \subset \mathcal{S}^*[3/5].$$

Można powyższą inkluzję zapisać bardziej bezpośrednio jako

$$f \in \mathcal{A}_2 \ \text{ i } \ \mathfrak{Re}[f'(z)] > 0 \Longrightarrow \left|\operatorname{Arg}\left[\frac{zF'(z)}{F(z)}\right]\right| < \frac{3\pi}{10}$$

lub równoważnie, wykorzystując (5.6), jako

$$F \in \mathcal{A}_2 \ \text{ i } \ \mathfrak{Re}\left[F'(z) + \frac{1}{2}zF''(z)\right] > 0 \Longrightarrow \left|\operatorname{Arg}\left[\frac{zF'(z)}{F(z)}\right]\right| < \frac{3\pi}{10}.$$

W pracy [17] dowodzimy następującej zależności:
Jeli $f \in \mathcal{A}$, to

$$\mathfrak{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] < \mathfrak{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] - \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \sqrt{1+z}.$$

Powyższy warunek jest ściśle związany z przynależnością funkcji f do klasy $\mathcal{SL}^*$, omawianej na początku autoreferatu. Wcześniej w pracy M. S. Robertson, *Certain classes of starlike functions*, Michigan Math. J. 76, no.1, (1954), 755–758, pokazano geometrycznie pokrewny wynik: Jeżeli $f \in \mathcal{A}$, $f(z)/z \neq 0$ i $k \in (0, 2]$, to

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{2}{2+kz}.$$

W pracy [18] dowodzimy następującej zależności. Niech $\alpha < 1$. Jeśli $h \in \mathcal{A}$ i

$$h'(\mathbb{U}) \subset \Omega(\alpha) = \{w \in \mathbb{C} : |w - 2\alpha + 1| > |\mathfrak{Re}w - \alpha|\},$$

to

$$\mathfrak{Re}\left[\frac{h(z)}{z}\right] > \alpha \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Jeden z wniosków z powyższej zależności jest twierdzeniem z wcześniejszej pracy S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Marx–Strohhäcker differential subordination systems*, Proc. Amer. Math. Soc. 99(1987), 527–534.

W pracy [19] rozważamy splot całkowy

$$(f \circledast g)(z) = \int_0^z \frac{(f * g)(t)}{t}\mathrm{d}t,$$

funkcji z klasy $k - \mathcal{ST}$, $0 \le k < \infty$,

$$k - \mathcal{ST} = \left\{ f \in \mathcal{S} : \ \mathfrak{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|, \quad (z \in \mathbb{U} \right\}, \tag{5.7}$$

badanej w pracy S. Kanas, A. Wiśniowska, *Conic regions and k-uniform convexity*, J. Comput. Appl. Math. 105(1999), 327–336. Podajemy, między innymi, warunki implikujące zawieranie typu

$$N_\delta(k - \mathcal{ST}) \circledast N_\delta(\mathcal{K}) \subset k - \mathcal{ST},$$

gdzie $N_\delta(k - \mathcal{ST})$ oznacza δ-otoczenie klasy $k - \mathcal{ST}$, a $\mathcal{K}$ klasę funkcji wypukłych. Są to wyniki sprowadzające się dla $k = 0$ do znanego wyniku z pracy St. Ruscheweyh, *Neighborhoods of univalent functions*, Proc. Amer. Math Soc. 49(1975), 109–115, mówiącego, że $N_{1/4}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{S}^*$. W pracy rozważany jest też tzw. promień stabilności splotu całkowego dla pary klas funkcji.

W pracy [20] dowodzimy własności klasy $V_k^p(H; A, B)$ funkcji zdefiniowanej podobnym warunkiem do (5.5), z $p = 1$.

W pracy [21] badamy TN_δ otoczenia funkcji $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$

$$TN_\delta(f) = \left\{ g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in \mathcal{A} : \sum_{n=2}^{\infty} T_n |a_n - b_n| \le \delta \right\}.$$

wprowadzone w pracy T. Sheil-Small, E. M. Silvia, *Neighborhoods of analytic functions*, J. Analyse Math. 52(1989), 210–240. T_n jest pewnym ciągiem liczbowym. W [21] rozważamy $T_n = 1/[(n-1)n^2]$. Dowodzimy, między innymi, że jeżeli f należy do klasy funkcji wypukłych, to $TN_x(f) \supset \mathcal{S}$, gdzie $x = 3 - \pi^2/6 = 1,355\ldots$. Wyniki przedstawione nawiązują do wcześniej uzyskanych w pracach. R. Fourniera, *On neighbourhoods of univalent starlike functions*, Ann. Polon. Math. 47(20(1986), 189–202; *On neighbourhoods of univalent convex functions*, Rocky Mountain J. Math. 16(3)(1986), 579–589; *A note on neighbourhoods of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 87(1)(1983), 117–120.

W pracy [22] wprowadzamy liczbę

$$\begin{aligned} S(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) &= \min \{ s \in \mathbb{R} : \mathcal{I}^s (f * g) \in \mathcal{Z} \quad \forall f \in \mathcal{X} \ \ \forall g \in \mathcal{Y} \} \\ &= \min \{ s \in \mathbb{R} : \mathcal{I}^s (\mathcal{X} * \mathcal{Y}) \subset \mathcal{Z} \}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Z}$ są podklasami $\mathcal{H}$, a

$$\mathcal{I}^s f(z) = \mathcal{I}^s \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} z^n.$$

oznacza operator Sălăgeana, St. Ģ. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Complex analysis—fifth Romanian-Finnish seminar, Part 1 (Bucharest, 1981), Lecture Notes in Math., 1013, Springer, Berlin, 1983, pp. 362–372. Wyznaczamy wartości liczby S dla różnych trójek spośród klas funkcji, jak na przykład wypukłych, gwiaździstych i tych zdefiniowanych w (5.7).

W pracy [23] pokazujemy, że jeżeli $f \in \mathcal{A}$ i

$$\mathfrak{Re} \left[e^{i\varphi} (f'(z) + z f''(z/\alpha) - \beta) \right] > 0, \quad z \in \mathbb{U},$$

to pod pewnymi dodatkowymi warunkami na α, β, φ funkcja f jest gwiaździsta rzędu μ zależnego od α, β, φ. Dowodzimy tego wyniku w oparciu o zasadę dualnosci w teorii iloczynu Hadamarda wprowadzoną w pracy St. Ruscheweyh, *Duality for Hadamard products with applications to extremal problems for functions regular in the unit disc*, Trans. Amer. Math Soc. 210(1975), 63–74, która została nieco przybliżona w rozdziale trzecim autoreferatu.

W pracy [24] uzupełniamy i poprawiamy rezultaty dotyczące operatora i związanych z nim klas funcji wprowadzonych w pracy M. K. Aouf, H. Silverman, H. M. Srivastava, *Some families of linear operators associated with certain subclasses of multivalent functions*, Comp. Math. Appl. 55(2008), 535–549. Uogólnienia opierają sie na zastosowaniu bardziej skutecznych metod z teorii podporządkowań różniczkowych.

W pracy [25] rozważamy własności klasy $\mathcal{S}^*(q_c)$ funkcji $f \in \mathcal{A}$ takich, że

$$\left|[zf'(z)/f(z)]^2 - 1\right| < c, \quad z \in \mathbb{U}.$$

Badamy relacje $\mathcal{S}^*(q_c)$ z innymi znanymi klasami funkcji zdefiniowanymi geometrycznymi warunkami. Między innymi został wyznaczony promień wypukłości rzędu α i promień gwiaździstości rzędu α dla klasy $\mathcal{S}^*(q_c)$. Szczególne przypadki tych wyników podane zostały wcześniej w pracy J. Sokół, *Radius problems in the class $\mathcal{SL}^*$*, Appl. Math. Comput. 214(2009), 569–573.

W pracy [26] wykorzystujemy rożniczkowo-całkowy operator Dzioka Ω_β^α z pracy J. Dziok, *Applications of the Jack Lemma*, Acta Math. Hungar. 105(1-2)(2004), 93–102, używając go do zdefiniowania nowej klasy funkcji

$$\mathcal{J}(\sigma, \Omega_\beta^\alpha; h) = \left\{ f \in \mathcal{A}(p) : \sigma \left[1 + \frac{z(\Omega_\beta^\alpha f(z))''}{(\Omega_\beta^\alpha f(z))'} \right] + (1-\sigma) \frac{z(\Omega_\beta^\alpha f(z))'}{\Omega_\beta^\alpha f(z)} \prec ph(z),\ z \in\ \mathbb{U} \right\},$$

której własności badamy w [26]. Symbol $\mathcal{A}(p)$ oznacza klasę funkcji $f \in \mathcal{A}$, które są p-listne w kole jednostkowym.

W pracy [27] definiujemy klasę $\mathcal{SLM}_\alpha$ funkcji f analytitycznych w kole jednostkowym takich, że

$$\alpha \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] + (1-\alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \widetilde{p}(\mathbb{U}) \quad \text{dla} \quad z \in \mathbb{U} \tag{5.8}$$

gdzie

$$\widetilde{p}(z) = \frac{\tau z + \tau^2 z^2}{1 - \tau z - \tau^2 z^2} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

Liczba $\tau = (1 - \sqrt{5})/2$ dzieli przedział $[0, 1]$ w złotym stosunku. Wyznaczamy relacje wprowadzonej klasy z innymi klasami, w szczególności z klasą funkcji α-wypukłych wprowadzonej w pracy P. T. Mocanu, *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme*, Mathematica (Cluj) 11(34) (1969), 127– 133.

W pracy [28] badamy własności klasy $\mathcal{KSL}$, zdefiniowanej warunkiem (5.8) z $\alpha = 1$. Podajemy, między innymi, dokładne oszacowania współczynników funkcji w tej klasie; tzw. wzór strukturalny dla funkcji w tej klasie; dokładne oszacowania modułu funkcji i modułu pochodnej; wyznaczamy rząd mocnej wypukłości w sensie podanym w pracy J. Stankiewicz, *Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 20(1966)(1971), 59–75.

W pracy [29] badamy własności operatora $I_{p,n}^\lambda$ na klasie funkcji p-listnych wprowadzonego w pracy X. Fu, M. Liu, *Some subclasses of analytic functions involving the generalizaed Noor integral operator*, J. Math. Anal. Appl. 323(2006), 190–2008. W szczególnosci podajemy warunki na to by $|I_{p,n}^\lambda f(z)| < 1$ w kole jednostkowym.

W pracy [30] rozważamy głównie wystarczające warunki dla funkcji z kilku znanych klas funkcji na to by spełniały warunek Breaza: $\mathfrak{Re}(f'(z)) \geq \beta |zf''(z)|$ w kole jednostkowym dla ustalonej liczby β, $0 < \beta \leq 1$. W szczególności rozważamy klasę zdefiniowaną w (5.7) oraz klasę funkcji $f \in \mathcal{A}$ takich, że

$$\left|\frac{f'(z)-1}{f'(z)+1}\right| < \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

zdefiniowaną i badaną wcześniej w pracach K. S. Padmanabhan, *On a certain class of functions whose derivatives have a positive real part in the unit disc*, Ann. Polon. Math. 23(1970), 73–81, oraz T. R. Caplinger, W. M. Causey, *A class of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 39(1973), 357–361.

W pracy [31] szacujemy część rzeczywistą ilorazu $f(z)/z$, gdy f należy do klasy funkcji k-gwiaździstych zdefiniowanej warunkiem (5.7). Główny wynik jest lepszy od uzyskanego w pracy A. Wiśniowska-Wajnryb, *Some extremal bounds for subclasses of univalent functions*, Appl. Math. Comput. 215(2009), 2634–2641, dzięki zastosowaniu bardziej subtelnych metod.

W pracy [32] wyznaczamy nowe własności operatora

$$\Omega_z^{\lambda} f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\lambda)}\ a_k z^k,$$

gdzie $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$. Operator został wprowadzony w pracy S. Owa, H. M. Srivastava, *Univalent and starlike generalized hypergeometric functions*, Canad. J. Math. 39(1987), 1057–1077.

W pracy [33] badamy własności funkcji poddanych działaniu operatora Carlsona-Shaffera, B. C. Carlson, D. B. Shaeffer, *Starlike and pre-starlike hypergeometric functions*, SIAM J. Math. Anal. 15(1984), 737–745, takich, że wtedy spełniają warunek

$$\mathfrak{Re}\left[1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right] > k\left|\frac{1}{\gamma}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right|, \quad (z \in \mathbb{U}), \tag{5.9}$$

gdzie $k \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Warunek (5.9) można spotkać już w K. G. Subramanian, G. Murugusundaramoorthy, P. Balasubrahmanyam, H. Silverman, *Subclasses of uniformly convex and uniformly starlike functions*, Math. Japon. 42(3)(1995), 517-522, jednakże dopiero później, z $\gamma = 1$, stał się on bardziej znany dzięki gruntownym badanim w pracy S. Kanas, A. Wiśniowska, *Conic regions and k-uniform convexity*, J. Comput. Appl. Math. 105(1999), 327–336. W pracy [33] zajmujemy się zastosowaniem własności podporządkowan różniczkowych Briot-Boqueta do wyznaczania zależności między funkcjami opisanymi w (5.9). Ponadto podajemy oszacowania ich współczynników i pewne własności iloczynu Hadamarda takich funkcji.

W pracy [34] zajmujemy się własnościami pewnej klasy funkcji meromorficznych w $\mathbb{U} \setminus \{0\}$, które były intensywnie badane w latach 50-60-tych XX w. np. w pracy W. C. Royster, *Meromorphic starlike multivalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 107 (1963), 300-308. Funkcje meromorficzne wciąż są badane w różnych aspektach. Praca [34] nawiązuje do pracy M. L. Mogra, T. R. Reddy, O. P. Juneja, *Meromorphic univalent functions with positive coefficients*, Bull. Austral. Math. Soc. **32** (1985), 161–176. Dzięki dodatkowemu założeniu, że badane funkcje meromorficzne mają dodatnie współczynniki udało sie uzyskac kilka ciekawych wyników. W pracy [34] badane funkcje meromorficzne poddane są działaniu zmodyfikowanego operatora Dzioka-Srivastavy.

W pracy [35] zajmujemy się własnościami iloczynu Hadamarda. Mówimy, że $f \in \mathcal{A}$ należy do klasy funkcji pregwiaździstych $\mathcal{R}_\alpha$ jeżeli

$$f * \frac{z}{(1-z)^{2-2\alpha}} \in \mathcal{S}^*_\alpha \quad \text{gdy} \quad \alpha < 1,$$

lub

$$\mathfrak{Re}\frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2} \quad \text{gdy} \quad \alpha = 1.$$

Funkcje pregwiaździste odgrywają ważną rolę w rozwiązywaniu problemów dotyczących iloczynu Hadamarda. Otrzymujemy na przykład $\mathcal{R}_0 = \mathcal{K}$, $\mathcal{R}_{1/2} = \mathcal{S}^*_{1/2}$, czyli ważne klasy funkcji. Ponadto,

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{R}_\alpha \subset \mathcal{R}_\beta \subset \overline{co}\mathcal{K} \quad \text{dla} \quad 0 \le \alpha \le \beta \le 1.$$

W pracy [35] pokazujemy, że jeżeli $\alpha \le 1$, $g \in \mathcal{R}_\alpha$ oraz $f \in \mathcal{K}_\alpha$, to

$$g * f \in \mathcal{K}_\alpha. \tag{5.10}$$

Ponadto, $\mathcal{R}_\alpha * \mathcal{K}_\alpha = \mathcal{K}_\alpha$. Jest to uzupełnienie serii podobnych wyników z pracy St. Ruscheweyh oraz T. Sheil–Small, *Hadamard product of schlicht functions and the Pólya-Schoenberg conjecture*, Comm. Math. Helv. 48(1973), 119–135. Ponadto w [35] pokazujemy, że jeżeli $\alpha \le 1$, $g \in \mathcal{R}_\alpha$, $F \in \mathcal{K}_\alpha$, $f \in \mathcal{A}$ oraz $f \prec F$, to $g * f \prec g * F$. Gdy $\alpha = 0$ ten wynik staje się rezultatem dowiedzionym wcześniej, St. Ruscheweyh, *Convolutions in Geometric Function Theory*, Sem. Math. Sup. 83, Presses Univ. Montreal 1982, strona 86.

W pracy [36] zajmujemy się badaniem nowych zależności w klasie funkcji $f \in \mathcal{A}$ takich, że

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1 + Az^n}{1 + Bz^n}, \; z \in \mathbb{U},$$

gdzie $-1 \le B < A \le 1$, która została wprowadzona w pracy R. Jurasińska, J. Stankiewicz, *Coefficients in some classes defined by subordination to multivalent majorants*, Proceedings of Conference on Complex Analysis (Bielsko-Biała, 2001), Ann. Polon. Math. 80(2003), 163–170.

W pracy [37] metodami podporządkowań różniczkowych badamy własności operatora

$$I^h_{\beta,\gamma}(f)(z) = \left[\frac{\gamma+\beta}{z^\gamma}\int_0^z f^\beta(t)h^{\gamma-1}(t)h'(t)\,\mathrm{d}t\right]^{1/\beta},$$

gdzie $f \in \mathcal{A}$, a parametry są stosownie dobrane. W szczególności badamy pod jakimi warunkami podwójne podporządkowanie

$$I^h_{\beta,\gamma}(g_1)(z) \prec I^h_{\beta,\gamma}(f) \prec I^h_{\beta,\gamma}(g_2)$$

wynika z podporządkowania $g_1 \prec f \prec g_2$. Podobne zależności można znaleźc w pracy T. Bulboacă, *Sandwich-type theorems for a class of integral operators*, Bulletin of the Belgian Math. Society-Simon Stevin, 13(3)(2006), 537–550, w której powyższy operator był badany w szczególnym przypadku gdy $\gamma = 0$.

W pracy [38] badamy własności funkcji p-listnych takich, że

$$\left((1-\lambda)\frac{L^c_k f(z)}{z^p} + \lambda\frac{L^c_{k+1}f(z)}{z^p}\right) \prec h(z), \tag{5.11}$$

gdzie L^c_k jest dowolnym operatorem liniowym klasy funkcji p-listnych w siebie takim, że

$$cL^c_k f(z) = z(L^c_{k-1}f(z))' + (c-p)L^c_{k-1}f(z).$$

W ten sposób unifikujemy wiele z wcześniej uzyskanych wyników, w których zadany był konkretny operator i zadana była konkretna funkcja h w definicji (5.11).

W pracy [39] dowodzimy nowych warunków wystarczających na wypukłość i gwiaździstość. Na przykład, jeżeli $f(z) = z + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^n$ i $zf'(z)/f(z)$ są analityczne w kole jednostkowym $\mathbb{D}$, $zf'(z)/f(z) \neq 4/3$ oraz

$$\mathfrak{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} < \frac{8+m}{6} \quad \text{dla} \quad |z| < 1, \tag{5.12}$$

to f jest gwiaździsta. Wcześniej w pracy R. Singh, S. Singh, *Some sufficient conditions for univalence and starlikeness*, Colloqium Mathematicum 47(1982), 309–314, pokazano gwiaździstość f pod warunkiem

$$\mathfrak{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} < \frac{3}{2} \quad \text{dla} \quad |z| < 1,$$

zamiast (5.12).

W pracy [40] zajmujemy się własnościami iloczynu Hadamarda dla funkcji pregwiaździstych rzędu α, uogólniając wcześniejszy wynik podany w (5.10).

W pracy [41] zajmujemy się głównie szacowaniem współczynników funkcji $f \in \mathcal{A}$ takich, że

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{z(I_n f)'(z)}{(I_n f)(z)}\right\} > k\left|\frac{z(I_n f)'(z)}{(I_n f)(z)} - 1\right| \quad (z \in \mathbb{U}),$$

gdzie

$$I_n f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m!}{(n+1)_{m-1}} a_m z^m \quad (z \in \mathbb{U}),$$

jest operatorem Noora, K. I. Noor, *On new class of integral operator*, J. Natur. Geom. 16(1999), 71–80. Klasę tych funkcji wprowadzono w pracy A. K. Mishra, P. Gochhayat, *Fekete-Szegö problem for a class defined by an integral operator*, Kodai Math. J. 33(2010) 310–328. Praca [41] jest uzupełnieniem zawartych tam wyników.

W pracy [42] głównym wynikiem jest, że jeżeli f jest funkcją gwiaździstą, to

$$g \prec f \;\Rightarrow\; \mathrm{L}_k[g] \prec \mathrm{L}_k[f], \tag{5.13}$$

gdzie $\mathfrak{Re}k > 0$ i

$$\mathrm{L}_k : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \mathrm{L}_k[f](z) = \frac{1+k}{z^k}\int_0^z f(t)t^{k-1}\,\mathrm{d}t$$

jest operatorem Bernardiego, S. D. Bernardi, *Convex and starlike univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 135(1969), 429-446. Dowodzimy również, że jeżeli $f \in \mathcal{H}$ i $f(z) = z + a_n z^n + \cdots$ oraz k jest nieujemną liczbą rzeczywistą taką, że

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} &> \delta_0(k)\\ &= \begin{cases} -nk/2 & \textit{dla} \quad 0 \le k \le 1, \\ -n/(2k) & \textit{dla} \quad k > 1, \end{cases}\end{aligned}$$

to $\mathrm{L}_k[f]$ jest wypukłą funkcją jednolistną.

W pracy [43] badamy własności klasy $\mathcal{SL}$, zdefiniowanej warunkiem (5.8) z $\alpha = 0$. Podajemy, między innymi, dokładne oszacowania współczynników funkcji w tej klasie; tzw. wzór strukturalny dla funkcji w tej klasie; dokładne oszacowania modułu funkcji i modułu pochodnej; wyznaczamy rząd mocnej gwiaździstości w sensie podanym w pracy J. Stankiewicz, *Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 20(1966)(1971), 59–75.

W pracy [44] rozpatrujemy klasę funkcji $f \in \mathcal{A}$ takich, że

$$\mathfrak{Re}\left\{e^{i\alpha}\frac{z(H_m^l(\alpha_1)f(z))'}{H_m^l(\alpha_1)f(z)}\right\}+\mu > \left|\frac{z(H_m^l(\alpha_1)f(z))'}{H_m^l(\alpha_1)f(z)}-1\right| \quad (z\in\mathbb{U}),$$

gdzie $H_m^l(\alpha_1)$ jest zmodyfikowanym operatorem Dzioka-Srivastavy. W [44] są badane różnorodne relacje tej klasy z innymi klasami funkcji. Na przykład pokazaliśmy, że splot z funcją pregwiaździstą stosownego rzędu nie wyprowadza poza badaną klasę.

W pracy [45] badamy własności klasy zdefiniowanej warunkiem (5.8). Znajdujemy funkcje jednolistne bliskie $\widetilde{p}$ w pewnym geometrycznym sensie by można było osłabić nieco warunek (5.8) ale zapisać ten osłabiony za pomocą podporządkowania funkcji jednolistnej, co umożliwia użycie szeregu metod z teorii podporządkowań różniczkowych. Niejednolistność funkcji $\widetilde{p}$ w warunku (5.8) stanowi dużą trudność w badaniu tej klasy funkcji.

W pracy [46] badamy klasę funkcji wprowadzoną w M. K. Aouf, T. M. Seoudy, *Classes of analytic functions related to the Dziok–Srivastava operator*, Integral Trans. Spec. Func. 22(6) (2011), 423–430, która jest związana z operatorem Dzioka–Srivastavy. Tutaj stosujemy operator Dzioka–Rainy związanego z uogólnioną funkcją hipergeometryczną Wrighta z pracy J. Dziok and R. K. Raina, *Demonstratio Math.* 37(3)(2004), 533-542). Używamy metod podporządkowań różniczkowych do uzykania nowych wyników.

W pracy [47] dowodzimy, między innymi, następującego uogólnienia wyniku z pracy S. Ponnusamy, V. Karunakaran, *Differential subordinations and conformal mapping*, Complex Variables 11(1989), 79–86. Niech $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}\alpha > n\delta \geq 0$ i $\beta < 1$. Jeśli $f(z) \in \mathcal{A}$, $f(z) = z^n + a_{n+k}z^{n+k} + \cdots$, $g(z) \in \mathcal{A}$ spełniają

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{\alpha g(z)}{zg'(z)}\right\} > \delta \quad (z\in\mathbb{U}),$$

oraz

$$\mathfrak{Re}\left\{(1-\alpha)\frac{f(z)}{g(z)}+\alpha\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\}+\frac{\delta k}{2(1-\beta_1)}\left|\frac{f(z)}{g(z)}-\beta_1\right|^2 > \beta \quad (z\in\mathbb{U}),$$

to

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} > \beta_1 \quad (z\in\mathbb{U}),$$

gdzie $\beta_1 = (2\beta+\delta k)/(2+\delta k)$. W szczególnym przypadku, gdy $f(z) = \beta_1 g(z)$, powyższy wynik staje się wynikiem z wspomnianej wyżej pracy.

W pracy [48] dowodzimy, między innymi, następującego warunku na gwiaździstość. Niech $f(z) = p(z) = z + a_m z^m + a_{m+1}z^{m+1} + \cdots$ będzie funkcją analityczną w $\mathbb{U}$ z $a_m \neq 0$. Załóżmy rówmież, że

$$\left|1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq \sqrt{\frac{5+m}{4}} \quad \text{dla} \quad |z|<1.$$

Jeśli $zf'(z)/f(z)$ jest analityczna w $\mathbb{U}$ i nie przyjmuje wartości $3/2$, to

$$\mathfrak{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \ \text{ oraz } \ \mathfrak{Re}\left\{\frac{f(z)}{zf'(z)}\right\} > \frac{2}{3} \quad \text{dla} \quad |z|<1.$$

Literatura

[1] K. Piejko, J. Sokół, Convolution properties of a class of analytic functions, Demonstratio Math. Vol. XXXVII, No 1, (2004), 63–69.

[2] K. Piejko, J. Sokół, J. Stankiewicz, On some problem of convolution of bounded functions, North-Holland, Math. Studies, Funct. Anal. and its Appl. 197(2004), 229–239.

[3] K. Piejko, J. Sokół, J. Stankiewicz, On a convolution conjecture of bounded functions, J. Ineq. Pure Appl. Math. Vol.6, Issue 2, Article 34 (2005).

[4] J. Sokół, Classes of analytic functions associated with the Choi-Saigo-Srivastava operator, J. Math. Anal. Appl. 318(2006), 517–525.

[5] J. Sokół, Convolution and subordination in the convex hull of convex mappings, Appl. Math. Lett. 19(2006), no. 4, 303–306.

[6] J. Sokół, On sufficient condition for starlikeness of certain integral of analytic function, J. Math. Appl. 28(2006), 127–130.

[7] K. Piejko, J. Sokół, On the Dziok-Srivastava operator under multivalent analytic functions, Appl. Math. Comp. 177(2006), 839–843.

[8] J. Sokół, Starlikeness of Hadamard product of certain analytic functions, Appl. Math. Comp. 190(2007), 1157–1160.

[9] J. Sokół, A linear operator and associated class of multivalent analytic functions, Demonstratio Math. Vol. XL, No.3(2007), 559–566.

[10] J. Sokół, The convexity of Hadamard product of three functions, J. Math. Appl. 29(2007), 121–125.

[11] J. Sokół, L. Trojnar–Spelina, Convolution properties for certain classes of multivalent functions, J. Math. Anal. Appl. 337(2008), 1190–1197.

[12] K. Piejko, J. Sokół, Subclasses of meromorphic functions associated with the Cho-Kwon-Srivastava operator, J. Math. Anal. Appl. 337(2008), 1261–1266.

[13] J. Sokół, A. Szynal–Liana, Radius of convexity of certain class of analytic function, J. Math. Anal. Appl. 334(2008), 1190–1197.

[14] J. Sokół, On some applications of the Dziok-Srivastava operator, Appl. Math. Comp. 201(2008), 774–780.

[15] J. Sokół, On a Class of Analytic Multivalent Functions, Appl. Math. Comp. 203(2008), 210–216.

[16] J. Sokół, Starlikeness of the Libera transform of functions with bounded turning, Appl. Math. Comp., 203(2008), 273–276.

[17] J. Sokół, On an application of certain condition for starlikeness, J. Math. Appl. 30(2008), 131–135.

[18] J. Sokół, On functions with derivative satisfying a geommetric condition, Appl. Math. Comp. 204(2008), 116–119.

[19] U. Bednarz, J. Sokół, On the integral convolution of certain classes of analytic functions, Taiwanese J. Math. No. 5, 13(2009), 1387–1396.

[20] J. Dziok, J. Sokół, Some inclusion properties of certain class of analytic functions, Taiwanese J. Math., No. 6B, 13(2009), 2001–2009.

[21] U. Bednarz, J. Sokół, On T-neighborhóds of analytic functions, J. Math. Appl. 32(2010), 25–32.

[22] U. Bednarz, J. Sokół, On order of convolution consistence of the analytic functions, Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica LV(3)(2010), 41–50.

[23] J. Sokół, Duality of Hadamard product applied to certain condition for alpha-starlikeness, Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica LV(3)(2010), 213–221.

[24] J. Sokół, Classes of multivalent functions associated with a convolution operator, Comput. Math. Appl. 60(2010), 1343–1350.

[25] M. K. Aouf, J. Dziok, J. Sokół, On a subclass of strongly starlike functions, Appl. Math. Letters 24(2011), 27–32.

[26] J. Dziok, R. K. Raina, J. Sokół, Certain results on subordinations associated with a differintegral operator, Math. Scandinavica 109(2)(2011), 253–268.

[27] J. Dziok, R. K. Raina, J. Sokół, On alpha-convex functions related to shell-like functions connected with Fibonacci numbers, Appl. Math. Comput. 218(2011), 966–1002.

[28] J. Dziok, R. K. Raina, J. Sokół, Certain results for a class of convex functions related to a shell-like curve connected with Fibonacci numbers, Comput. Math. Appl. 61(9)(2011), 2605–2613.

[29] M. K. Aouf, J. Dziok, J. Sokół, Inequalities involving certain integral operator, European Jour. of Pure and Appl. Math. 4(4)(2011), 322–329.

[30] S. Sivasubramanian, J. Sokół, Hypergeometric transforms in certain classes of analytic functions, Math. Comput. Modelling, 54(2011), 3076–3082.

[31] J. Sokół, A. Wiśniowska-Wajnryb, On certain problem in the clases of k-starlike functions, Comput. Math. Appl. 62(2011), 4733–4741.

[32] J. K. Prajapat, R. K. Raina, J. Sokół, Dependence conditions for analytic functions under fractional differintegral operators, Math. Sciences Research Journal 15(12)2011, 333–340.

[33] S. Hussain, J. Sokół, On a Class of Analytic Functions Related to Conic Domains and associated with Carlson-Shaffer Operator, Acta Math. Scientia 32(4)(2012), 1399–1407.

[34] J. Dziok, G. Murugusundaramoorthy, J. Sokół, On certain class of meromorphic functions with positive coefficients, Acta Math. Scientia, 32(4)(2012), 1376–1390.

[35] K. Piejko, J. Sokół, On the convolution and subordination of convex functions, Appl. Math. Letters 25(2012), 448–453.

[36] R. Jurasińska, J. Sokół, Some problems for certain family of starlike functions, Math. Comp. Modelling 55(2012), 2134–2140.

[37] H. A. Al-Kharsani, N. M. Al-Areefi, J. Sokół, A Class of Integral Operators Preserving Subordination and Superordination for Analytic Functions, International Scholary Research Network ISRN Math. Analisis, Volume 2012, Article 909632, 17 stron.

[38] J. Sokół, K. I. Noor, H. M. Srivastava, A family of convolution operators for multivalent analytic functions, European Journal of Pure and Appl. Math. Vol. 5, No.4(2012), 469–479.

[39] J. Sokół, M. Nunokawa, On some sufficient condition for starlikeness, J. Inequal. Appl. 2012/1/282, 11 stron.

[40] M. Arif, K. I. Noor, J. Sokół, Some properties of a generalized class of prestarlike functions, Scientific Research and Essays, 7(45)(2012), 3897–3902.

[41] J. Sokół, D. Bansal, Coefficients bounds in some subclass of analytic functions, Tamkang Journal of Math. 43(2012) No. 4, 621–630.

[42] J. Sokół, M. Nunokawa, On the subordination under Bernardi operator, Proc. Japan Acad. 89 Ser. A(2013), 11–14.

[43] J. Dziok, R. K. Raina, J. Sokół, On a class of starlike functions related to a shell-like curve connected with Fibonacci numbers, Math. Compu. Modelling 57(2013), 1203–1211.

[44] Neng Xu, Ding-Gong Yang, J. Sokół, A class of analytic functions involving the Dziok-Srivastava operator, J. Inequal. Appl. 2013/1/138, 14 stron.

[45] J. Dziok, R. K. Raina, J. Sokół, Differential subordinations and alpha-convex functions, Acta Math. Scientia 33B(2013), 609–620.

[46] N. Sarkar, P. Goswami, J. Dziok, J. Sokół, Subordination for multivalent analytic functions associated with Wright generalized hypergeometric function, Tamkang J. of Math. 44(1)(3013), 61-71.

[47] M. Nunokawa, K. Kuroki, J. Sokół, S. Owa, New extensions concerned with results by Ponnusamy and Karunakaran, Advances in Difference Equations, 2013/134, 8 stron.

[48] M. Nunokawa, J. Sokół, An improvement of Ozaki's condition, Appl. Math. Comp. DOI 10.1016/j.amc.2013.04.054.

Janusz Sokół